

变盘和环状束流空间电荷场的计算

宋忠恒 王晓敏

(中国原子能科学研究院,北京 102413)

摘 要

给出了变盘和环状束流空间电荷场的公式和计算方法,介绍了在束流动力学计算中如何利用关于场的计算结果.

一、场计算的重要性

在电子直线加速器束流动力学的三维计算中,对低能区电子束空间电荷场的处理是一个至关重要的问题,因为这时电子速度远小于光速,且电子的相运动甚为显著.所谓空间电荷场,即束流产生的遵循洛伦兹规范的场.束流的空间电荷场使束团的纵向聚束延缓,横向截面增大,导致束流能散度和径向发射度变坏.在束流强度不是太大的情况下,空间电荷场对束流横向运动的影响较之纵向为甚.

文献[1]和[2]在作束流动力学的三维计算时,根据需要分别采用半径可变的盘状束流模型和环状束流模型.即将一注入的脉冲束流理想化为有限长柱,先将其沿纵向分成电量相等的若干电荷盘,对于环状束流模型,再将各电荷盘分成电量相等的若干电荷环,研究这些盘或环在外场和空间电荷场作用下的纵向和横向运动.图1就是完成这一计算的方块图,可以看出,空间电荷场的计算在其中占有很大的份量.

由于被跟踪的盘状或环状束团很多,而电子计算机的容量和速度有限,为了使对束流动力学作计算机模拟成为可能,我们将与束流空间电荷场有关的部分预先算出,作为输入文件,在动力学计算中利用插值法就可以将运动方程中的空间电荷力项求出.

下面分别讨论与此有关的问题.

二、空间电荷场的表式

以下分别给出盘状和环状束流空间电荷场的表式.

1. 环状束流

设一束半径为 R_k 的柱状束流通过半径为 a 的束流通道.先将这一注入的脉冲束流分成电量相等的若干电荷盘,然后再将各盘分成电量相等的若干电荷环.假设电荷环内电荷密度均匀分布.这时,一个内、外半径分别为 b_1 和 b_2 的电荷环作用在另一个内、外

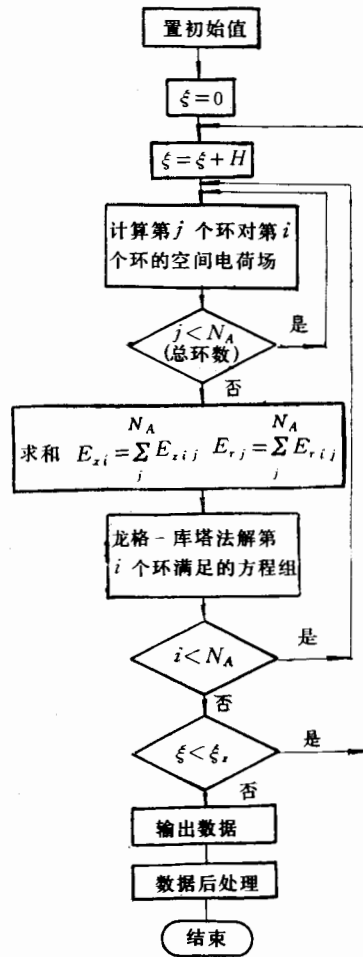


图1 束流动力学计算过程图示

半径分别为 r_1 和 r_2 的电荷环上的空间电荷场的平均值的表式为:

$$\bar{E}_z = 2 \left(\frac{It}{N} \right) \frac{1}{\epsilon_0 \pi a^2} \sum_{i=1}^{\infty} f(a, b, \beta_{0i}) f_1(a, r, \beta_{0i}) \text{sign} |z'| \times \begin{cases} f_1(a, L, \beta_{0i}) e^{-\beta_{0i} |z'|/a} & (|z'| > L); \\ f_2(a, L, \beta_{0i}) \text{sh} \beta_{0i} |z'|/a & (|z'| < L). \end{cases} \quad (1)$$

$$\bar{E}_r = 2 \left(\frac{It}{N} \right) \frac{1}{\epsilon_0 \pi a^2} \sum_{i=1}^{\infty} f(a, b, \beta_{0i}) f_2(a, r, \beta_{0i}) \beta_{0i} \text{sign} |z'| \times \begin{cases} f_1(a, L, \beta_{0i}) e^{-\beta_{0i} |z'|/a} & (|z'| > L); \\ f(a, L, \beta_{0i}, z) & (|z'| < L). \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$f(a, b, \beta_{0i}) = \frac{\frac{b_2}{a} J_1 \left(\beta_{0i} \frac{b_2}{a} \right) - \frac{b_1}{a} J_1 \left(\beta_{0i} \frac{b_1}{a} \right)}{\left[\left(\frac{b_2}{a} \right)^2 - \left(\frac{b_1}{a} \right)^2 \right] \beta_{0i}^2 J_1^2(\beta_{0i})};$$

$$\begin{aligned}
 f_1(a, r, \beta_{0s}) &= \frac{\frac{r_2}{a} J_1\left(\beta_{0s} \frac{r_2}{a}\right) - \frac{r_1}{a} J_1\left(\beta_{0s} \frac{r_1}{a}\right)}{\left(\frac{r_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2}; \\
 f_2(a, r, \beta_{0s}) &= \left[\left(\frac{r_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2 \right] \int_{r_1/a}^{r_2/a} J_1\left(\beta_{0s} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) d\left(\frac{r}{a}\right); \\
 f_1(a, L, \beta_{0s}) &= \frac{\text{sh}^2(\beta_{0s} L/a)}{(\beta_{0s} L/a)^2}; \quad f_2(a, L, \beta_{0s}) = \frac{e^{-\beta_{0s} L/a} \text{sh}(\beta_{0s} L/a)}{(\beta_{0s} L/a)^2}; \\
 f(a, L, \beta_{0s}, z) &= \frac{L}{a} e^{-\beta_{0s} z_0/a} - \frac{1}{\beta_{0s}} \text{sh}(\beta_{0s} L/a) \text{ch}(\beta_{0s} |z'|/a) e^{-\beta_{0s} L/a}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

上述各式中, $z' = z - z_0$ 是两电荷环之间的纵向距离; β_{0s} 是零阶贝塞尔函数的第 s 个根; I, t 分别是注入脉冲束流的强度和宽度; L 是环的纵向半宽度; N 是电荷环数; ϵ_0 是介电常数.

根据电荷密度均匀分布, 每个环电量相等的假设, 若盘的起始半径为 R_k , 则可得

$$r_1^2 - r_2^2 = -R_k^2/NR, \tag{6}$$

式中 NR 是每个盘所分的环数.

由于电荷环在运动中径向可以伸缩, 又假设电荷环里电荷密度均匀分布, 随着半径的伸缩, 为了保持电荷环的电量不变, 就要相应地改变环的径向宽度 Δr , 这也涉及到在运动中环的内、外半径 r_1, r_2 的确定. 为了确定 r_1 和 r_2 , 引进“电荷中心环”的概念. 所谓电荷中心环, 就是将环的电量平分分为两部分的一个无限细的环. 由此可得

$$r_1^2 + r_2^2 = 2r^2, \tag{7}$$

式中 r 即为电荷中心环的半径, 也就是在动力学计算中被跟踪的粒子的径向坐标. 电荷中心环的纵向坐标即为环的几何中心.

联立 (6) 式和 (7) 式, 得

$$\begin{cases} r_2^2 = r^2 + \frac{1}{2} R_k^2/NR \\ r_1^2 = r^2 - \frac{1}{2} R_k^2/NR. \end{cases} \tag{8}$$

如果视电荷为无限细的环模型, 只要两个环不是太靠近, 也不会出现大的问题, 虽然两者有一定差别, 由于简化了问题, 也是可以用的.

在 $L \rightarrow 0$ 时, 公式 (1) 和 (3) 中的 $f_1(a, L, \beta_{0s}) \rightarrow 1$, 问题蜕化为薄环模型, 即不考虑环的厚度. 这在实际上是可行的, 因为在动力学计算中, 为了提高精度, 往往将一注入的脉冲束流分为相当多的盘, 每个盘所占相宽很小, 在这样窄的范围里认为电荷密度均匀分布是完全可以的, 所以不必象处理径向那样来处理纵向问题.

2. 盘状束流

设一半径为 b 的柱状束流通过半径为 a 的束流通道. 将这一柱状束流分成电量相等的若干电荷盘, 这些盘在运动中半径是可以变化的. 这时一个半径为 b 的电荷盘作用在

另一个半径为 r 的电荷盘上的空间电荷场的平均值的表式为:

$$\bar{E}_z = 2 \left(\frac{Iz}{N} \right) \frac{1}{\pi \epsilon_0 a^2} \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\beta_{0\delta} \frac{b}{a} \right) J_1 \left(\beta_{0\delta} \frac{r}{a} \right)}{\frac{b}{a} \beta_{0\delta}^2 J_1^2(\beta_{0\delta})} \frac{r}{a} \text{sign} |z'|$$

$$\times \begin{cases} f_1(a, L, \beta_{0\delta}) e^{-\beta_{0\delta} |z'|/a} & (|z'| > L); \\ f_2(a, L, \beta_{0\delta}) \text{sh} \beta_{0\delta} |z'|/a & (|z'| < L). \end{cases} \quad (9)$$

和

$$\bar{E}_r = 2 \left(\frac{Iz}{N} \right) \frac{1}{\pi \epsilon_0 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\beta_{0i} \frac{b}{a} \right)}{\frac{b}{a} \beta_{0i} J_1^2(\beta_{0i})} f(a, r, \beta_{0i}) \text{sign} |z'|$$

$$\times \begin{cases} f_1(a, L, \beta_{0i}) e^{-\beta_{0i} |z'|/a} & (|z'| > L); \\ f(a, L, \beta_{0i}, z) & (|z'| < L). \end{cases} \quad (11)$$

$$(12)$$

式中

$$f(a, r, \beta_{0i}) = \left(\frac{r}{a} \right)^{-2} \int_0^{r/a} J_1 \left(\beta_{0i} \frac{r}{a} \right) \left(\frac{r}{a} \right) d \left(\frac{r}{a} \right), \quad (13)$$

N 是电荷盘数。其它符号与前述相同。

表示电荷盘的空间电荷场的公式 (9)–(12), 可以直接由表示电荷环的空间电荷场的公式 (1)–(4) 蜕化而成。

在 (9)–(12) 中, 如果令源盘半径 $b = r_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 观察盘半径 $r = r_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), 在 (9)–(12) 式的求和号前加一个求和号 $\sum_{i=1}^N$, 即为 N 个电荷盘作用在观察盘 r_j 上的空间电荷场的总和。若再加一个求和号 $\sum_{j=1}^N$, 即可求出 N 个电荷盘作用在任一个观察盘上的空间电荷场的总和。对 (1)–(4) 式也是一样。

上述场的表示式都是对运动坐标系而言, 在实际应用时要作相对论变换。

三、计算方法

从上节的公式可以看出, 要完成场的计算, 首先要解决一阶贝塞尔函数的计算以及含有一阶贝塞尔函数的积分的计算。由于一阶贝塞尔函数的计算可以采用多项式逼近求和公式和积分公式, 所以含有一阶贝塞尔函数的积分的计算也可以采用两种方法。

一阶贝塞尔函数的积分表式为:

$$J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (14)$$

可用变步长辛普生求积的方法来计算上述一阶贝塞尔函数。

一阶贝塞尔函数多项式逼近公式为

$$J_1(x) = z \sum_{k=0}^7 a_k x^{2k} + \Delta, \quad (15)$$

式中 $z = x/4$, $0 \leq x \leq 4$, $\Delta \leq 10^{-9}$ 。系数 a_k 的数据如下:

$$\begin{aligned} a_0 & 1.9999999998; \\ a_1 & -3.9999999710; \\ a_2 & 2.6666660544; \\ a_4 & 0.1777582922; \\ a_3 & -0.8888839649; \\ a_5 & -0.0236616773; \\ a_6 & 0.0022069155; \\ a_7 & -0.0001289769. \end{aligned}$$

两种方法的计算结果基本相同,用多项式逼近公式计算,速度远快于求积分的方法。

场的公式中含有一阶贝塞尔函数的积分的项

$$B = \int_{x_1}^{x_2} J_1(x) x dx \quad (16)$$

的求解,可以将 $J_1(x)$ 作为一个过程,在用辛普生求积的过程中不断调用。

公式 (16) 也可以写成二重积分的形式:

$$B = \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \varphi) \sin \varphi x d\varphi dx. \quad (17)$$

可用高斯法求上述二重积分。在场的计算中,两者的计算结果在小数点后面第五位才略有差别,但用解二重积分求场的方法所用的时间远大于前者。

四、在动力学计算中的插值计算

根据实际可能出现的情况,将源电荷环和观察环的电荷中心环的半径由可能出现的最小情况变到最大,即源环和观察环在径向各有若干个插值结点;将源电荷环和观察环之间的距离从可能出现的最小值取到可以不计及相互影响距离为止,即在纵向也有若干个插值结点,以满足动力学计算时的需要。这样,根据前述场的表示式计算出来的场的数,是一个具有许多插值结点的三维数组,它在动力学计算中作为输入文件。

在粒子动力学计算中,当解动力学方程组求出各电荷环的运动状态后,利用三维线性插值公式

$$\begin{aligned} f(r, b, z) = & f(r_i, b_j, z_k) + \frac{f(r_i, b_j, z_{k+1}) - f(r_i, b_j, z_k)}{z_{k+1} - z_k} (z - z_k) \\ & + \frac{f(r_i, b_{j+1}, z_k) - f(r_i, b_j, z_k)}{b_{j+1} - b_j} (b - b_j) \\ & + \frac{f(r_{i+1}, b_j, z_k) - f(r_i, b_j, z_k)}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i), \end{aligned} \quad (18)$$

从场的数据输入文件诸多插值结点中选取最靠近插值点 (r, b, z) 的相邻插值结点,计

算出所需要的值。因为在动力学计算时被跟踪的环的数量很多,所以可求出各源电荷环在观察环上的总空间电荷场。

若在束流动力学的计算中采用半径可变的盘电荷模型,束流空间电荷场的处理可以采用类似的方法。

参 考 文 献

- [1] 宋忠恒、王晓敏,高能物理与核物理, **14** (1990), 16.
- [2] 王晓敏、宋忠恒,强激光与粒子束, **2** (1990), 191.

Calculation of Space Charge Field for Annulus and Disc Bunch of Charged Particles

SONG ZHONGHENG WANG XIAOMIN

(*Institute of Atomic Energy, Beijing 102413*)

ABSTRACT

The formulas of the space charge fields for annulus and disc bunch of charged particles and the methods of the calculation are developed. The use of the calculation results of the fields in computer simulation of the beam dynamics is introduced.