

# $SU(2)$ 群六链 Wilson 圈平均值的 格点计算\*

陈启洲 李志兵 罗向前 戴福华 郭硕鸿

(中山大学物理系, 广州)

## 摘 要

本文利用格点规范理论的累积展开方法和 Monte Carlo 模拟计算  $SU(2)$  群六条链的 Wilson 圈平均值, 得到二者相容的结果。

## 一、引 言

文献[1,2,3]利用累积展开法计算了  $U(1)$ 、 $SU(2)$  和  $SU(3)$  群元格平均值, 得到与 Monte Carlo 模拟相容的结果。这些解析计算表明: 累积展开法能够较好地处理强、弱和中间耦合区元格平均值随耦合常数  $g$  变化曲线的连接问题, 它不象强耦合展开和平均场方法那样, 元格平均值  $\langle \text{Tr}U_p \rangle$  只限于某一耦合区。累积展开法的缺点是当计入高阶修正时, 需要处理繁多的格点图形。

文献[4]发展了一种有精确基态的格点哈密顿量的变分计算方法。在  $d+1$  维理论中, 需要用到  $d$  维空间各种形状的 Wilson 圈的基态平均值。在  $2+1$  维情形, 这些平均值可以精确积分出来, 但对  $3+1$  维理论,  $3$  维空间 Wilson 圈平均值不能用解析方法精确得出。除了用 Monte Carlo 方法外, 我们还希望探索有效的解析近似方法。一种可能的方案是累积展开法。本文我们先对六链平面 Wilson 圈进行计算, 比较二级累积展开、Schwinger-Dyson 方程法和 Monte Carlo 法。计算表明累积展开法和 Monte Carlo 法所得结果比较接近。

## 二、累积展开计算

设  $W$  为六链 Wilson 圈的矩阵迹, 相应的平均值为

$$\begin{aligned} E &= \langle W \rangle = \langle \text{Tr}U_1U_2U_3U_4U_5U_6 \rangle \\ &= \langle \boxed{\phantom{U_1U_2U_3U_4U_5U_6}} \rangle = Z^{-1} \int [dU] \exp(S) W, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

\* 中山大学高等学术中心基金会及国家教委自然科学基金资助的课题。  
本文 1989 年 5 月 30 日收到。

$$S = \frac{\beta}{2N} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)$$

$$Z = \int [dU] \exp(S) = \exp(\langle S - S_0 \rangle_0) \int [dU] \exp(S_0) \exp(S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)$$

$$= Z_0 \exp(\langle S - S_0 \rangle_0) \left[ 1 + \frac{1}{2!} \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 \right], \quad (2)$$

而  $S_0$  为试探作用量

$$Z_0 = \int [dU] \exp(S_0)$$

$$\langle (\dots) \rangle_0 = Z_0^{-1} \int [dU] \exp(S_0) (\dots). \quad (3)$$

把(2)式代入(1)式,得

$$E = \frac{\langle W \rangle_0 + \langle W(S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0) \rangle_0 + \frac{1}{2!} \langle W(S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 + \dots}{1 + \frac{1}{2!} \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 + \dots}$$

$$= \langle W \rangle_0 + \langle W(S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0) \rangle_0 + \frac{1}{2!} \langle W(S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0$$

$$- \frac{1}{2!} \langle W \rangle_0 \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 + \dots. \quad (4)$$

利用文献[6]的单链积分

$$f(J) = \int dU_i \exp(\text{Tr}(J_i U_i^\dagger + U_i J_i^\dagger)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\text{Tr} J J^\dagger + \det J + \det J^\dagger]^n}{n!(n+1)!}, \quad (5)$$

并取  $J_{\alpha\beta}$  和  $J_{\alpha\beta}^\dagger$  的特殊情形 ( $\alpha, \beta$  是颜色指标  $\alpha, \beta = 1, 2$ ):

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^\dagger = \frac{1}{4} \times \delta_{\alpha\beta},$$

$$X = \text{Tr} J J^\dagger + \det J + \det J^\dagger = \frac{1}{4} x^2, \quad (6)$$

(5)式变为文献[2]的结果

$$f(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{2I_1(x)}{x}, \quad (7)$$

$I_\nu(x)$  为  $\nu$  阶变形贝塞尔函数. 利用

$$\frac{\partial f(J)}{\partial J_{\alpha\beta}} = \frac{\partial x}{\partial J_{\alpha\beta}} \frac{\partial f(J)}{\partial x} = (J_{\beta\alpha} + \varepsilon_{\alpha i} \varepsilon_{\beta j} J_{ij}) \frac{\partial f(J)}{\partial x} = \frac{2}{x} I_2 \delta_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

得到

$$\langle S_0 \rangle = N_l \frac{x I_2(x)}{I_1(x)},$$

$$\langle S \rangle_0 = \frac{4\beta N_p}{2N} \left( \frac{I_2(x)}{I_1(x)} \right)^4. \quad (9)$$

在哈氏形式的格点规范理论中, 当空间维数  $d = 3$  时, 总元格数目  $N_p$  等于总链数  $N_l$ . 由自由能主部:

$$F_{\pm} = -\frac{1}{N_p} [\ln Z_0 + \langle S - S_0 \rangle_0] \quad (10)$$

取极小值条件

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

得到变分参数所满足的方程式

$$\left[ x - 16\beta \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^3 \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) = 0. \quad (12)$$

经过冗长的计算(见附录),得到  $E$  的二级表示式

$$\begin{aligned} E = & 2A^6 + \frac{\beta}{2N} A^4 [1 + 3B^3 + 9A^4(1 + 3B) - 40A^6] \\ & - 3 \times A^5(1 + 3B - 4A^2) + 2 \left( \frac{\beta}{2N} \right)^2 \{ 1 + 6B^4 + 3B^6 + 6B^7 \\ & + 36A^5[A + B^3(A + 2C)] + 4A^3[A^3(1 + B) + 2BC^3] \\ & + 22A^6(1 + 3B)(1 + 3B^3) - 40A^6(1 + 3B^4) \\ & + 72A^7[A + B^2(A + 2C)] - 176A^8(1 + 3B^3) \\ & + 14A^8(1 + 9B^2 + 6B^3) + 231A^{10}(1 + 3B)^2 \\ & + 144A^{11}(A + C) - 2540A^{12}(1 + 3B) + 6000A^{14} \} \\ & + 4 \left( \frac{\beta}{2N} \right) \times A^3 \{ 181A^6(1 + 3B) + 7A^2(1 + 3B^3) \\ & - 18A^5(A + C) - 18A^4(1 + 3B)^2 - 3A[A + B^2(A + 2C)] \\ & - (1 + 3B)(1 + 3B^3) - 400A^8 \} + x^2 A^4 \left[ \frac{15}{8} (1 + 3B)^2 \right. \\ & \left. + 3A(A + C) + 42A^4 - \frac{39}{2} A^2(1 + 3B) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{I_2(x)}{I_1(x)}, \quad B = \frac{I_3(x)}{I_1(x)}, \quad C = \frac{I_4(x)}{I_1(x)}. \quad (14)$$

### 三、Monte Carlo 模拟

我们从(1)式出发利用文献[7, 8, 9]的方法,对  $d=3$  时作了 Monte Carlo 模拟. Creutz 的 heat bath 方法每次迭代的效率非常高(翻转接受率为 100%),但对连续群每次迭代耗机时却较多. 文献[9]巧妙地将 Creutz 方法和 Metropolis 方法结合在一起,使每次迭代所需的机时接近较快的 Metropolis 方法,而翻转接受率保持在 90% 以上.

我们考察了  $\beta = 0 \sim 20$  范围,所用最大的点阵为  $10^3$ , 总迭代次数为 600—780 次/点. Monte Carlo 模拟原则上是一种严格的数值方法,但在实际应用中由于计算设备和可用机时的限制,会引入一些系统误差和统计误差. 有限点阵效应和有限迭代次数效应便是其中最重要的两种误差. 根据渐近自由理论,当  $a \rightarrow 0$  时  $1/g^2 \rightarrow \infty$ . 故当  $\beta$  增大时

点阵的物理尺度相应缩小,有限点阵效应变得严重. 而当  $1/g^2$  很小时, Wilson 圈的平均值接近于零,所以“信噪”比很小<sup>1)</sup>, 容易被统计涨落所淹没. 故 MC 模拟有一个适用的窗口. 这个窗口的确切宽度与计算机能力有关. 我们计算了  $10^3$  和  $6^3$  两种尺寸的点阵,两组结果有 10% 左右的差异. 我们觉得这些数据是有统计意义的.  $10^3$  点阵的计算结果示于图 1 中.

#### 四、结 论

文献[5]引进了 Schwinger-Dyson 方程方法来计算 Wilson 圈的平均值, 它的基本步骤是: (1) 将 Wilson 圈的平均值  $E$  展开至某一级  $i$ ; (2) 求出第  $i$  级 Schwinger-Dyson 方程的根  $J_i$ ; (3) 选出满足自由能最小的根  $J_i^*$ ; (4) 把  $J_i^*$  代入  $S_0$  的表达式中并计算  $E$ .

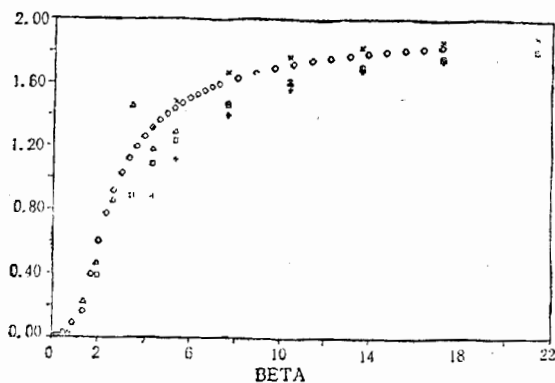










图 1  $E$  与  $\beta$  的关系, 其中 + 为平均场结果,  $\times$  代表一级累积展开结果,  $\triangle$  为二级累积展开结果,  $\diamond$  为零级 Schwinger-Dyson 方程结果,  $\square$  为 Monte Carlo 模拟结果

图 1 给出 3 维 6 链 Wilson 圈平均值的平均场法、一级和二级累积展开法、Schwinger-Dyson 方程法和 Monte Carlo 模拟的结果. 为了适应  $3+1$  维变分计算的需要, 我们计算到较深的弱耦合区 ( $\beta \approx 20$ ). 由图可见, 对 6 链 Wilson 圈来说, 二级累积展开(相当于文献[2]的三级近似)已给出和 Monte Carlo 相近的结果. 对更大的 Wilson 圈, 可能要算到更高级的近似.

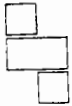







#### 附 录

这个附录给出有贡献的图形的组态数及表示式. 我们用  $\langle | \rangle_0$  代表  $\langle \text{Tr} U_i J_i^+ \rangle_0$  或  $\langle \text{Tr} J_i U_i^+ \rangle_0$ ,  $\langle \square \rangle_0$  代表  $\langle \text{Tr} U_p \rangle_0 = \langle \text{Tr} U_1 U_2 U_3 U_4 \rangle_0$ ,  $\langle \square \rangle_0$  代表六链 Wilson 圈.








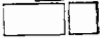


1) 信噪比: 在此处是指测量值的绝对值与统计误差之比.

图 形	组 态 数	单个图形的贡献
	1	$\frac{x}{2} A$
	1	$\frac{x^2}{16} (1 + 3B)$
	$6(2d - 3)$	$A^3(1 + 3B)$
	2	$A^4(1 + 3B^3)$
	6	$\frac{x}{4} A^3(1 + 3B)$
	$12(2d - 3)^2$	$\frac{1}{2} A^{10}(1 + 3B)^2$
	$2(2d - 3)^2$	$\frac{1}{2} A^{10}(1 + 3B)^2$
	$8(2d - 3)^2$	$\frac{1}{2} A^{10}(1 + 3B)^2$
	$8[(2d - 3)^2 - (2d - 4)]$	$\frac{1}{2} A^{10}(1 + 3B)^2$
	30	$\frac{1}{2} A^4(1 + 3B)^2 \frac{x^2}{16}$

续表

图 形	组 态 数	单个图形的贡献
	$8(2d-3)^2$	$\frac{1}{2} A^{10}(1+3B)^2$
	$8[(2d-3)^2 - (2d-4)]$	$\frac{1}{2} A^{10}(1+3B)^2$
	$8[(2d-3)^2 - (2d-4)]$	$\frac{1}{2} A^{10}(1+3B)^2$
	$8 \frac{(2d-3)(2d-4)}{2!}$	$\frac{1}{2} A^{10}(1+3B)^2$
	$4(2d-3)$	$\frac{1}{2} A^8(1+9B^2+6B^3)$
	$8(2d-4)$	$\frac{1}{2} A^8(1+9B^2+6B^3)$
	$12 \frac{(2d-3)(2d-4)}{2!}$	$4A^{11}(B+C)$
	6	$4A^8(B+C) \frac{x^2}{16}$

续表

图 形	组 态 数	单个图形的贡献
	$8(d-2)$	$\frac{1}{2} A^6(1+3B)(1+3B^3)$
	$12(2d-3)$	$\frac{1}{2} A^6(1+3B)(1+3B^3)$
	$12(2d-3)$	$2A^7[A+B^2(A+2C)]$
	$6(2d-3)$	$2A^7[A(1+B^3)+2CB^3]$
	2	$2A^3[A^3(1+B)+2BC^3]$
	2	$\frac{1}{2} A^3(1+6B^4+3B^6+6B^7)$
	$6(2d-3)$	$x A^8(A+C)$
	$48(2d-3)$	$\frac{x}{8} A^7(1+3B)^2$
	6	$2A^6[A(1+B^3)+2CB^3] \frac{x}{4}$
	8	$\frac{1}{2} A^3(1+3B)(1+3B^3)$

## 参 考 文 献

- [1] X. -H. He, T. -C. Hsien and Y. -S. Song, *Phys. Lett.*, **153B** (1985), 417.  
[2] 吴济民、赵佩英, 高能物理与核物理, **10**, (1986), 297.  
[3] 陈启洲、刘金明、薛迅、郑维宏、郭硕鸿, “ $SU(3)$  群的累积展开”, 高能物理与核物理, (待发表).  
[4] S. -H. Guo, J. -M. Liu and Q. -Z. Chen, *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985), 409.  
S. -H. Guo, W. -H. Zheng and J. -M. Liu, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2593.  
[5] S. -S. Xue, Ph. D. Thesis, Institute of High Energy Physics, Beijing, June 1986.  
[6] K. E. Eriksson et al., *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 2276.  
[7] A. Ambjorn, P. Olesen and C. Peterson, *Nucl. Phys.*, **B244** (1984), 262.  
[8] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 553; **45**(1980), 313; **46** (1981), 441; *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 147.  
[9] Y. -F. Deng, in *Lattice Gauge Theory Using Parallel Processors*, X. -Y. Li, Z. -M. Qiu and H. -C. Ren, eds., Gordon and Breach, 1987.

## VACUUM EXPECTATION VALUES OF 6-LINK WILSON LOOP IN $SU(2)$ LATTICE GAUGE THEORY

CHEN QIZHOU, LI ZHIBING, LUO XIANGQIAN,

DAI FUHUA AND GUO SHUOHONG

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

### ABSTRACT

We calculate the vacuum expectation values of 6-link  $SU(2)$  Wilson loop by using cumulant expansion and Monte Carlo simulation respectively. Their results are consistent