

# 手征介子-夸克模型的低激发态共振

杨克炎 夏克定

(中国科学院上海原子核研究所, 上海)

## 摘要

本文导出了手征介子-夸克 Soliton 的量子涨落方程, 并计算了介子-Hedgehog 重子的散射相移。我们发现: 手征介子-夸克模型 (CMQM) 对涨落是稳定的, 并有共振态出现, 其共振宽度与实验值符合较好, 但共振能量仅是实验值的一半。

## 一、引言

M.C. Birse, M. K. Banerjee<sup>[1]</sup> 及 S. Kahana, G. Ripka<sup>[2]</sup> 在前几年分别提出了重子的手征介子-夸克模型(CMQM)。这是一个研究重子结构的唯象理论, 整个理论的出发点是: 导致重子束缚的 QCD 效应能够由价夸克和介子的相互作用的等效理论来表示。在半经典近似下, 这个模型能够得到稳定的、定域的, 能量有限的 Soliton 解, 并且成功地描述重子的各种特征参数。所以这个模型在物理上是有兴趣的, 可以作为描述重子的一个比较合理的模型, 值得进一步研究。

本文主要是讨论 CMQM 的量子涨落性质, 并通过  $P$  波  $\pi$ -核散射的相移分析研究在 CMQM 中的低激发态共振及其稳定性。近几年, 许多人<sup>[3]</sup>在重子的 Skyrme 模型上进行了这些研究, 但 Skyrme 是纯介子场论模型, 没有夸克自由度; 后来, G. Brown 等<sup>[4]</sup>在 Skyrme 模型的基础上引进了一个包含夸克场的空腔, 在这个包含夸克自由度的二相模型上, 他们也进行了类似的研究。这里, 我们在自然包括夸克自由度的 CMQM 中来研究这个问题。

核子的低激发共振态 ( $N(1440)$ ) 与基态核子有相同的自旋和同位旋, 是偶宇称共振, 它的共振能低于奇宇称共振态的能量, 而奇宇称共振被认为是夸克从  $1S$  到  $1P$  的跃迁。这方面理论计算和实验符合得较好<sup>[5]</sup>。而偶宇称的 Roper  $N(1440)$  共振在夸克激发框架下不能得到解释。事实上, 这个共振态是一个集体激发共振态<sup>[6]</sup>, 所以这使得在一些核子的介子场论模型中进行描述成为可能。在这些模型中 (如 Skyrme 模型、二相模型等), Roper 共振态被描述为手征场在手征角平衡位置上的涨落而引起的一种集体振动<sup>[3,4]</sup>。本文的工作也是基于上述思想, 在 CMQM 上作类似的考虑。另外, 我们将  $\Delta$

(1232)的第一激发态 $\Delta$ (1620)也认为是：“ $\Delta$ -Roper”共振态。

第二节中,我们将简要回顾 CMQM;第三节在背景场上引入涨落,得到散射方程;第四节是散射方程的数值计算及结果讨论;最后,我们进行了小结。

## 二、手征介子-夸克模型(CMQM)

手征介子-夸克模型是建立在满足  $SU(2) \times SU(2)$  手征对称性的 Gell-Mann-Lévy  $\sigma$ -model<sup>[7]</sup>上,它虽然比较简单,但却能对 $N$ 和 $\Delta$ 的性质作较好的描述。在这个模型中包括:三个有色相互作用的夸克及四个手征介子场( $\sigma, \pi$ ),我们略去色指标,可写出模型的 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\partial + g(\sigma + i\gamma_5 \tau \cdot \pi)]\psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - U(\sigma, \pi), \quad (2.1)$$

$$U(\sigma, \pi) \equiv \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \pi^2 - v^2)^2 + C\sigma. \quad (2.2)$$

上述表达式中,  $\psi$ 、 $\sigma$  和  $\pi$  分别表示夸克场、 $\sigma$  介子场和  $\pi$  介子场。介子场的自相互作用导致了  $\sigma$  介子场的真空期望值不为零:

$$\langle \sigma \rangle_{\text{真空}} = -F_\pi, \quad (2.3)$$

$F_\pi$  值为 93MeV, 是  $\pi$  介子的衰变常数。(2.2)式中的常数为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= (m_\sigma^2 - m_\pi^2)/2F_\pi, \\ v^2 &= F_\pi^2(m_\sigma^2 - 3m_\pi^2)/(m_\sigma^2 - m_\pi^2), \\ c &= m_\pi^2 F_\pi. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$m_\pi, m_\sigma$  分别是  $\pi$  介子、 $\sigma$  介子的质量。假如  $m_\pi$  不为零, 则在(2.2)式中的  $\sigma$  线性项直接破缺手征对称性, 导致流代数的结果(CVC, PCAC)。 $\sigma$  的真空期望值给出自由夸克的动力学质量:

$$m_q = gF_\pi. \quad (2.5)$$

这个模型在半经典的近似处理下,重子被认为是由耦合成色单态的三个价夸克组成,由依赖时间的旋量  $q_i(r, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  来表示价夸克的轨道,而手征介子场是 Hedgehog 形式的解。耦合成色单态的三个夸克处于同一个旋量态上,此旋量表示为:

$$q_0(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[ \begin{array}{c} G_0(r) \\ i\hat{\sigma} \cdot \hat{r} F_0(r) \end{array} \right] \chi e^{i\epsilon t}, \quad (2.6)$$

$\chi$  是 Hedgehog 自旋-同位旋旋量:

$$\chi = (u\downarrow - d\uparrow)/\sqrt{2}. \quad (2.7)$$

在介子场的半经典处理中,  $\sigma_0(r)$ ,  $\pi_0^\alpha(r)$  可以取以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0(r) &= \sigma_0(r), \\ \pi_0^\alpha(r) &= \pi_0(r)\delta^{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在这个系统中守恒的量子数是  $K$

$$K = I + J, \quad (2.9)$$

这里  $J$  是角动量,  $I$  是同位旋。由假定(2.8)式,使得:

$K^p = 0^+$  ( $p$  指宇称)。

对于定态的 Hedgehog 场, Euler-Lagrange 方程是:

$$\left. \begin{aligned} H_0 f_0(r) &= \epsilon f_0(r), \\ \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] \sigma_0(r) &= \frac{\delta U}{\delta \sigma_0} + f_0^+ M_\sigma f_0, \\ \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} \right] \pi_0(r) &= \frac{\delta U}{\delta \pi_0} + f_0^+ M_\pi f_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

这里我们已引入记号:

$$\begin{aligned} f_0(r) &\equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \begin{bmatrix} G_0(r) \\ F_0(r) \end{bmatrix}; \quad M_\sigma \equiv n \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_\pi \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \\ H_0 &\equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \\ -\frac{d}{dr} & 0 \end{bmatrix} + M_\sigma \sigma_0 + M_\pi \pi_0. \end{aligned}$$

W. Broniowski 等<sup>[8]</sup>已经比较详细的讨论了介子场和夸克场的耦合常数  $g$  对系统的经典稳定性的影响。结果表明:  $g$  在 4.6—6.5 的范围内是比较合适的, 我们以后的讨论也仅限于这个范围。参数  $\lambda^2$  的取值依赖于  $m_\sigma$  的实验值。

对于方程(2.10)所描述的体系, 也可以近似地把手征场表示成处于手征环上的简化情形:

$$\sigma_0^2(r) + \pi_0^2(r) = F_\pi^2. \quad (2.11)$$

引入手征角  $\theta_0(r)$  来代替  $\sigma_0(r), \pi_0(r), \theta_0(r)$  满足:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0(r) &= -F_\pi \cos \theta_0(r), \\ \pi_0(r) &= -F_\pi \sin \theta_0(r). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

把(2.12)式代入(2.10)方程组中的二个定态的手征介子场方程, 从而可合并成一个手征角方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \theta_0(r)}{dr} - \frac{\sin 2\theta_0(r)}{r^2} - m_\pi^2 \sin \theta_0(r) \\ + \frac{39}{4\pi F_\pi r^2} [(G_0^2(r) - F_0^2(r)) \sin \theta_0(r) + 2G_0(r)F_0(r) \cos \theta_0(r)] = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 三、 $P$ 波 $\pi N$ 散射的相移分析

下面我们来讨论  $\pi$  介子-重子散射。我们希望通过研究围绕手征场平均值的小振动, 运用相移分析的方法来确定共振态的发生。为了在(2.13)式中引入涨落, 我们将定态形式的手征场方程还原到含时间的方程形式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta(r, t)}{dt^2} &= \frac{d^2 \theta(r, t)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \theta(r, t)}{dr} - \frac{\sin 2\theta(r, t)}{r^2} - m_\pi^2 \sin \theta(r, t) \\ &+ \frac{3g}{4\pi F_\pi r^2} [(G_0^2(r) - F_0^2(r)) \sin \theta(r, t) + 2G_0(r)F_0(r) \cos \theta(r, t)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

我们将在  $\theta(r, t)$  的半经典近似下的解  $\theta_0(r)$  上引入涨落  $\xi(r)$ , 由  $\xi(r)$  可分别得到  $\pi$  场的涨落和  $\sigma$  场的涨落, 取决于平均场  $\theta_0(r)$  的数值。在小振子近似下<sup>[4]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \theta(r, t) &= \theta_0(r) + \xi(r)e^{i\omega t}, \\ q(r, t) &= q_0(r, t) + \phi(r)e^{-iEt}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$q_0(r, t)$  是在平均场  $\theta_0(r)$  时的夸克场解(见(2.6)式),  $\phi(r)$  是由  $\xi(r)$  引起的夸克场的涨落。当研究手征 Soliton 体系作为一种呼吸模式的集体激发时, 核子和 Roper 共振的波函数可以简单地看成是一个一维谐振子的  $1S$  态和  $2S$  态波函数, 它们相应的夸克场的涨落分别为  $\phi_N$  和  $\phi_R$ , 能量差为  $E_R - E_N$ <sup>[4]</sup>。于是就通过引入手征场的涨落建立起整个手征 Soliton 系统的一种集体激发, 而并没有导致单个夸克的激发。一旦  $\pi$  介子-重子散射在能量  $\omega$  时发生了共振, 该共振能量  $\omega$  就是 Roper 共振态和核子态的能量差  $E_R - E_N$ 。

我们把(3.2)式中第一式代入(3.1)中, 并忽略  $\xi(r)$  的二次及二次以上的项, 从而得到有关  $\xi(r)$  的方程, 其中有关的  $\theta_0(r)$  项是满足(2.13)的, 可以从等式两边消去。从而得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\xi(r)}{dr} + \left\{ \left[ (\omega^2 - m_\pi^2) - \frac{2\cos 2\theta_0}{r^2} - m_\pi^2(\cos \theta_0 - 1) \right] \right. \\ \left. + \frac{3g}{4\pi F_\pi r^2} [(G_0^2(r) - F_0^2(r))\cos \theta_0 - 2G_0(r)F_0(r)\sin \theta_0] \right\} \xi(r) = 0. \quad (3.3) \end{aligned}$$

此式可以化简为:

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + [K^2 - V_{\text{eff}}(r)]u(r) = 0, \quad (3.4)$$

这里,  $K^2 \equiv (\omega^2 - m_\pi^2)$ ,  $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$ ,  $u(r) = \xi(r)/r$ .

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= \frac{2\cos 2\theta_0}{r^2} + m_\pi^2(\cos \theta_0 - 1) \\ &- \frac{3g}{4\pi F_\pi r^2} [(G_0^2(r) - F_0^2(r))\cos \theta_0 - 2G_0(r)F_0(r)\sin \theta_0]. \quad (3.5) \end{aligned}$$

为了方便下面联合求解, 我们把  $V_{\text{eff}}(r)$  还原成  $\sigma_0(r)$ 、 $\pi_0(r)$  表示:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= 2(\sigma_0^2(r) - \pi_0^2(r))/F_\pi^2 r^2 - m_\pi^2(\sigma_0(r)/F_\pi + 1) \\ &+ \frac{3g}{4\pi F_\pi r^2} [(G_0^2(r) - F_0^2(r))\sigma_0(r) - 2G_0(r)F_0(r)\pi_0(r)]. \quad (3.6) \end{aligned}$$

这里  $\sigma_0(r)$ 、 $\pi_0(r)$ 、 $G_0(r)$ 、 $F_0(r)$  均为自治场解, 从而  $V_{\text{eff}}(r)$  由自治场完全确定。从(3.4)式我们看到这是  $\xi(r)$  的散射方程, 类似一般散射形式的 Schrödinger 方程。我们称(3.5)式的  $V_{\text{eff}}(r)$  为相互作用的有效势,  $V_{\text{eff}}(r)$  中的第一项当  $r \rightarrow 0$  时有渐近行为  $2/r^2$ , 是与角动量  $l = 1$  的离心势相关的; 第二项是与手征对称破缺相联系; 最后一项是介子-夸克耦合对有效势的贡献, 是纯夸克效应。下面我们用数值求解方法求解(3.6)及(3.4)式, 得到散射相移  $\delta(k)$ , 从而确定系统共振态的能量和宽度。

我们知道, 对  $\omega^2 < 0$  的情况, 在我们的小振动近似表达式中会出现指数变化项:

$$\theta(r, t) = \theta_0(r) + \xi(r)e^{\pm i|\omega|t}, \quad (3.7)$$

这表明 Soliton 对小振动是不稳定的。对  $\omega^2 > 0$  的情形，在某一能量下存在束缚态的条件是满足 Bohr-Sommorfeld 量子化规则：

$$\frac{4\pi}{3} \int_a^b P^3 d^3 r \geq h^3, \quad (3.8)$$

积分限  $a, b$  是该能量所对应的经典转折点。根据方程(3.4)可以知道，对于允许的最大束缚态能量  $m_\pi^2$  的情况，存在束缚态的条件将成为<sup>[3]</sup>：

$$S = \frac{2}{3\pi} \int_a^b [-V_{\text{eff}}(r)]^{\frac{3}{2}} r^2 dr \geq 1. \quad (3.9)$$

#### 四、数值计算及结果讨论

在第三节中，Roper 共振态被描述为手征场在手征角平衡位置上的涨落而引起的一种集体振动。

$P$  波介子-Hedgehog 重子的散射相移可由  $\xi(r)$  的渐近行为来定出。 $\xi(r)$  的  $P$  波解的渐近形式是<sup>[4]</sup>

$$\xi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \cos \delta(k) j_1(Kr) - \sin \delta(k) n_1(Kr), \quad (4.1)$$

这里  $\delta(k)$  是  $\pi$  介子动量  $K = (\omega^2 - m_\pi^2)^{1/2}$  时的相移。

我们类似文献[1]中，选定参数  $g = 5.38$  ( $m_q = 500$  MeV)，参数  $\lambda^2$  则取 80 左右的不同值，来求解联立耦合方程组(2.10)，从而得到不同  $\lambda^2$  取值下的  $\sigma_0(r)$ ， $\pi_0(r)$ ， $F_0(r)$ ， $G_0(r)$  的自治数值解(见图 1)。我们看到，夸克场被定域在 0.5 fm 附近， $\pi_0(r)$ 、 $\sigma_0(r)$  很好地满足(2.11)式的手征环的条件，然后，我们从(3.6)式可计算出  $V_{\text{eff}}(r)$ ，图 2 表示出  $\lambda^2 = 20$  的  $V_{\text{eff}}(r)$  的曲线。把  $V_{\text{eff}}(r)$  代入散射方程(3.4)，求得不同动量  $K$  下  $u(r)$  (或  $\xi(r)$ )，把它与(4.1)式中的  $\xi(r)$  比较，即可以求得相移  $\delta(k)$ 。图 3 表示  $\lambda^2 = 20$  的相移曲线。从图 3 中看到：相移在 220 MeV 左右迅速上升，在 310 MeV 左右达到最大值 106°，这指示着一个共振态的存在。共振的能量  $\omega_R$  和宽度  $\Gamma_R$ ，可由截面随  $\pi$  介子能

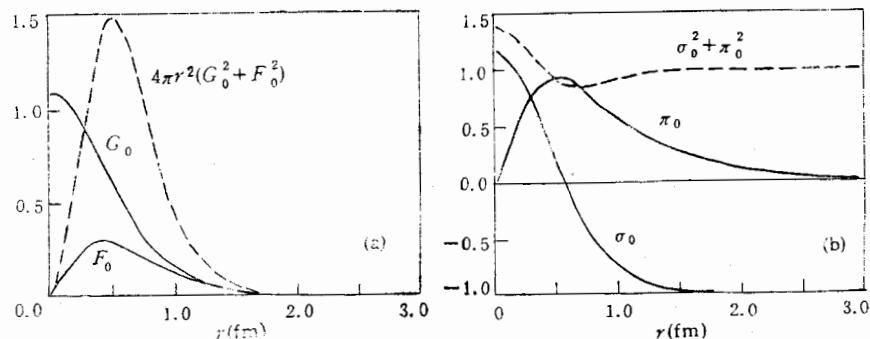


图 1  $g = 5.38$ ,  $\lambda^2 = 82.12$  的 Hedgehog 解

(a) 夸克的大、小分量， $G_0$ 、 $F_0$  的单位是  $\text{fm}^{-3/2}$  (实线)，径向夸克密度单位是  $\text{fm}^{-1}$  (虚线)。(b) 介子场， $\sigma_0$ 、 $\pi_0$  的单位是  $F_\pi$  (实线)， $\sigma_0^2 + \pi_0^2$  的单位是  $F_\pi^2$  (虚线)

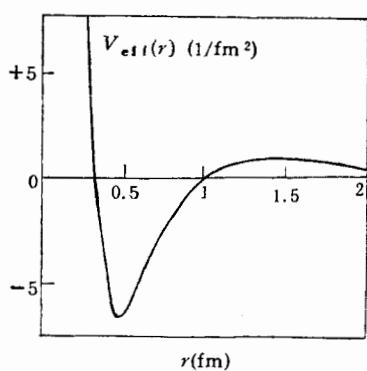
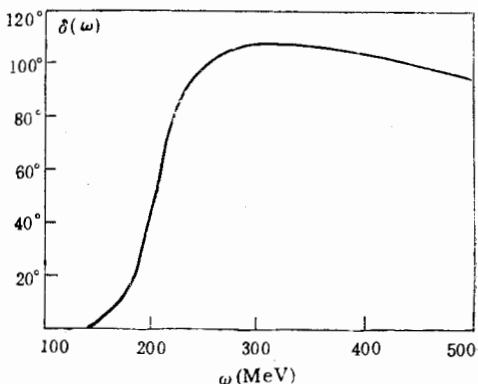
图2 有效势  $V_{\text{eff}}(r)$  曲线 $g = 5.38, \lambda^2 = 20$ 

图3 相移-介子能量曲线

 $g = 5.38, \lambda^2 = 20$ 量  $\omega$  的变化得出:

$$\sigma = \frac{12}{K^2} \sin \delta(K). \quad (4.2)$$

图4给出了  $g = 5.38, \lambda^2 = 20$  时的截面曲线,由此可求出相应的共振能量  $\omega_R$  和宽度  $\Gamma_R$  分别为 220MeV 和 90MeV。这里的  $\omega_R, \Gamma_R$  显然是  $N(1440)$  及  $\Delta(1620)$  二个共振态的混合值。用投影的方法能在 Hedgehog 重子态中分离出  $N(1440)$  及  $\Delta(1620)$  的各自的  $\omega_R, \Gamma_R$  值。在文献[9]中,做了类似的讨论,其分离的结果与原混合值相近,这里我们不作讨论。在表1中,我们给出了不同参数  $\lambda^2$  下的各个  $\omega_R, \Gamma_R$

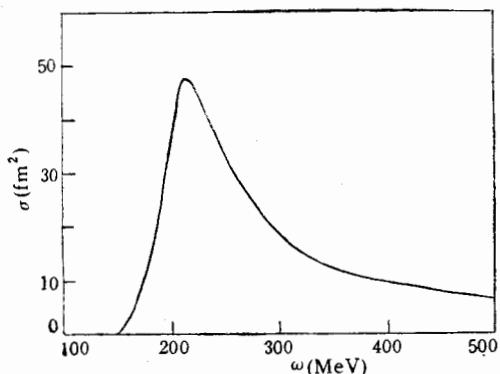


图4 截面-介子能量曲线

 $g = 5.38, \lambda^2 = 20$ 表1 各个  $\lambda^2$  值下的  $m_\sigma, W_R, \Gamma_R, S$  值,  $g = 5.38, m_\sigma$  为  $\sigma$  介子的质量

$\lambda^2$	20	30	50	80	100	150
$M_\sigma(\text{MeV})$	605	734	940	1185	1323	1617
$W_R(\text{MeV})$	220	210	200	190	180	175
$\Gamma_R(\text{MeV})$	90	75	50	40	30	25
$S$	0.3	0.33	0.37	0.39	0.41	0.45

的值。另外,我们还计算了耦合常数  $g$  在可允许的范围内变动时,对  $\omega_R, \Gamma_R$  的影响(这时  $\lambda^2$  取定),计算表明:  $\omega_R, \Gamma_R$  都随着耦合常数  $g$  的增加而减小,但它们变化的幅度都不大,我们一般取定  $g = 5.38$  来计算。从表1中我们看到:由于不存在  $\omega^2 < 0$  的解,因而 Soliton 对于小振动来说是稳定的,同时由计算得到的  $V_{\text{eff}}(r)$ ,计算(3.9)式给出的束缚态存在条件,我们得到  $S$  为 0.3—0.4,这表明在  $\omega^2 > 0$  时,满足  $S < 1$ ,因此,没有束缚态存在。

从上述计算结果和实验值的比较可以看到: 当  $\lambda^2 = 20$  时,  $\Gamma_R$  为 90 MeV 这与 Roper 共振的单  $\pi$  衰变宽度之实验值  $133 \pm 67$  MeV 符合较好。但  $\omega_R$  仅达到 Roper 共振实验值 400—500 MeV 的一半, 这与二相模型在  $R_0 = 0.41$  fm 时所得到的  $\omega_R(220$  MeV) 及  $\Gamma_R(100$  MeV) 相近<sup>[4]</sup>。这两个模型的一致应该是合理的, 从物理图象上考虑, 二相模型与手征介子-夸克模型都相当于在袋模型和 Skyrme 模型之间的中间情况。实际上, 我们的模型在描述重子激发态方面存在着不足, 在 CMQM 中没有夸克绝对禁闭机制, 只有束缚态的夸克, 最大束缚能是 500 MeV ( $g = 5.38$ )。所以, 不能期望这个模型能对重子的激发态进行根本的描述。对 Roper 共振的描述的改进似乎应该进一步引进  $\omega$  介子场的贡献。我们注意到了最近的一个工作<sup>[10]</sup>, 它在一个改进的 Skyrme 模型中, 考虑了  $\omega$  介子的影响, 从而改进了原先的 Skyrme 模型对 Roper 共振的计算结果。

作者之一感谢邱锡钧研究员, 宋宏秋副研的热情指导, 并对曾凡安副研, 侯仁锡助研在计算机方面的帮助表示谢意。

### 参 考 文 献

- [1] M. C. Birse, M. K. Banerjee, *Phys. Lett.*, **136B**(1984), 284; *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 118.
- [2] S. Kahana, G. Ripka, V. Soni, *Nucl. Phys.*, **A415**(1984), 351;  
S. Kahana, G. Ripka, *Nucl. Phys.*, **A429**(1984), 462.
- [3] I. Zahed, ULF-G. Meissner, U. B. Kaulfuss, *Nucl. Phys.*, **A426**(1984), 525; J. Breit, C. R. Nappi, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 889; K. F. Liu, J. S. Zhang, G. R. E. Black, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 2015.
- [4] G. E. Brown, H. Q. Song, R. K. Su, K. F. Liu, *Nucl. Phys.*, **A458**(1986), 537.
- [5] N. Isgur, G. Karl, *Phys. Lett.*, **72B**(1977), 109; *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 4187.
- [6] T. A. De Grand, G. Rebhi, *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 2358.
- [7] M. Gell-Mann, M. Levy, *Nuovo. Cimento*, **16**(1960), 705.
- [8] W. Broniowski, T. D. Cohen, *Nucl. Phys.*, **A458**(1986), 652.
- [9] K. F. Liu, J. S. Zhang, in: *Soliton in Nuclear and Elementary Particle Physics*, eds: Chodos, E. Hadjimichael, H. C. Tze (World Scientific, Singapore, 1984)
- [10] 沈齐兴, 李炳安; 高能物理与核物理, **2**(1989), 128.

## LOW-LYING RESONANCE IN CHIRAL MESON-QUARK MODEL

YANG KEYAN XIA KEDING

(Institute of Nuclear Research, Academia Sinica, Shanghai)

### ABSTRACT

The quantum fluctuations of the chiral Meson-Quark Model is formulated and the meson-hedgehog baryon scattering phase shift is calculated. It is found that the chiral Meson-Quark Model is stable against small oscillations and the resonance exists. The calculated resonance width is consistent with experimental data, but the resonance energy is only half of the experimental data.