第13卷 第8期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 8
1989 年 8 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1989

快报

格点 Schwinger 模型的准确基态

郑　波
（中山大学，广州）

摘　要

本文提出一种改进的格点 Schwinger 模型，证明其具有正确的经典连续极限，并找到其准确基态.

一、引　言

格点规范理论的连续极限问题是一个根本问题. 最近，在纯规范场方面，郭硕鸿等人[1]对一类具有可解准确基态的格点规范理论进行了深入的研究，取得相当进展. 但对含费米场情形我们仍没有可靠结果.

由于 Schwinger 模型的简单可解性[2]，人们可以通过对格点 Schwinger 模型的研究，了解格点规范理论的连续极限行为. 这方面已有强耦合展开和 Monte Carlo 模拟等方法的一些工作[3,4]. 作者在参考文献[5]中，通过求解准确解，也对 Naive 格点 Schwinger 模型的高能连续极限进行了探讨.

本文利用格点理论的不唯一性，给出一种具有可解准确基态的改进的格点 Schwinger 模型. 这一结果有助于我们对格点 Schwinger 模型的进一步研究.

二、模型及准确基态

现在以 Naive 格点理论为例演示我们的结果. 最简单的 Naive 格点 Schwinger 模型的 Hamiltonian 为[3]

$$H_0=\frac{1}{2}e^2a\sum_x E(x)^2+\frac{1}{2a}\sum_{\substack{x\\k=\pm1}}\bar{\phi}(x)\gamma_k U(x,k)\phi(x+k), \tag{2.1}$$

其中 $\bar{\phi}(x)$、$\phi(x)$ 为费米场，$U(x,\pm1)$ 为规范场，且

$$[U(x,1),E(x)]=U(x,1),\ [U(x,-1),E(x-1)]=-U(x,-1). \tag{2.2}$$

直接寻找 H_0 的准确基态较困难，所以我们提出一种新的 Hamiltonian. 取

$$H=\frac{1}{2}e^2a\sum_x e^{-CR_1}E(x)e^{2CR_1}E(x)e^{-CR_1}, \tag{2.3}$$

本文 1989 年 3 月 14 日收到.

其中 C 为待定实数，

$$R_1 = \sum_{\substack{x \\ k=\pm 1}} \bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k). \tag{2.4}$$

定义 $|0\rangle$ 态为

$$E(x)|0\rangle = 0. \tag{2.5}$$

这里 $|0\rangle$ 还可以含有不带规范场的费米子海．容易明白，设

$$|\Omega\rangle = e^{CR_1}|0\rangle, \tag{2.6}$$

则有

$$H|\Omega\rangle = 0. \tag{2.7}$$

即 $|\Omega\rangle$ 为 H 的本征值为零的本征态．又因为

$$(e^{CR_1}E(x)e^{-CR_1})^+ = e^{-CR_1}E(x)e^{CR_1},$$

所以 H 正定，$|\Omega\rangle$ 为 H 的基态．

三、经典连续极限

略去场量的空间指标，记

$$\begin{aligned} A_n &= [R_1,[R_1,\cdots[R_1,E]\cdots]]\,(n\ \text{重对易子}) \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ k_l=\pm 1}}^{n} (-1)^{n-l}\frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!}\bar{\psi}\gamma_{k_1}U\cdots\gamma_0\gamma_{k_l}[U,E]\cdots\psi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

重写 H 如下：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}e^2a\sum_x\left(E+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n\frac{1}{n!}C^n\right)\left(E+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{1}{n!}C^n\right) \\ &= \frac{1}{2}e^2a\left(\sum_x E^2 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_x\sum_{\nu=0}^{\infty}[E, A_{2\nu+1}]\frac{1}{(2\nu+1)!}C^{2\nu+1}, \\ T_2 &= \sum_x\sum_{\substack{n=1 \\ \nu=0}}^{\infty}(-1)^n[A_n, A_{n+2\nu+1}]\frac{1}{n!(n+2\nu+1)!}C^{2n+2\nu+1}, \\ T_3 &= \sum_x\sum_{\nu=1}^{\infty}(EA_{2\nu}+A_{2\nu}E)\frac{1}{(2\nu)!}C^{2\nu}, \\ T_4 &= \sum_x\sum_{\substack{n=1 \\ \nu=0}}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{\nu,0}\right)(A_nA_{n+2\nu}+A_{n+2\nu}A_n)\frac{(-1)^n}{n!(n+2\nu)!}C^{2n+2\nu}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

易见，若记

$$R_n=\sum_x \bar{\psi}(x)\gamma_{k_1}U(x,k_1)\cdots\gamma_0\gamma_{k_n}U\left(x+\sum_{i=1}^{n-1}ki,kn\right)\psi\left(x+\sum_{i=1}^{n}ki\right), \tag{3.4}$$

则有

$$T_1+T_2=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma_{2i+1}R_{2i+1}, \tag{3.5}$$

其中 σ_{2i+1} 为待计算实数．我们的方法是，要求 $\frac{1}{2}e^2a\sigma_1R_1$ 和 H_0 的费米场部分一致，即令

$$\sigma_1=\frac{1}{(ae)^2}, \tag{3.6}$$

定出常数 C，然后再证明 T_1+T_2 的其余部分及 T_3+T_4 的经典连续极限为零．从而得到，在经典意义下

$$H\to H_0,\ 当\ a\to 0. \tag{3.7}$$

即 H 具有正确的经典连续极限．

经过不太困难的计算可得

$$\sigma_1=-2C+\sum_{\substack{n=0\\ \nu=0}}^{\infty}[3-2(2n+2\nu+1)]\frac{(2n+2\nu)!}{n!(n+2\nu+1)![(n+\nu)!]^2}C^{2n+2\nu+1}. \tag{3.8}$$

利用

$$\frac{(2n+2\nu)!}{[(n+\nu)!]^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2n+2\nu+1} \tag{3.9}$$

及贝塞尔函数求和公式，我们有

$$\sigma_1=-2C+3\int_0^C dC'I_0(-4C')-2CI_0(-4C), \tag{3.10}$$

其中 $I_0(z)$ 为零阶虚宗量贝塞尔函数．这样，由(3.6)及(3.10)我们便得到确定 C 的方程

$$-2C+3\int_0^C dC'I_0(-4C')-2CI_0(-4C)=\frac{1}{(ae)^2}. \tag{3.11}$$

不难明白，当 $a\to 0$ 时，$C\to-\infty$，σ_1 的主要贡献来自(3.10)中最后一项．因为

$$I_0(-4C)\to\frac{1}{\sqrt{-8\pi C}}e^{-4C},\ 当\ a\to 0, \tag{3.12}$$

所以

$$C\to\frac{1}{2}\ln(ae),\ 当\ a\to 0. \tag{3.13}$$

同样地，

$$\sigma_3=-2\sum_{\substack{n=0\\ \nu=0\\ n+2\nu\geqslant 4}}^{\infty}a_3\frac{(2n+2\nu-2)!}{[(n+\nu-1)!]^2n!(n+2\nu+1)!}C^{2n+2\nu+1} \tag{3.14}$$

其中

$$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3!}(n+2\nu)(n+2\nu-1)(8n+4\nu-7) + \frac{1}{2!}(n+2\nu)(n-1)(n-1)$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3!}(n-1)(n-2)(2n-3). \tag{3.15}$$

当 $a\to 0$ 时，

$$\sigma_3 \sim \sum_{\substack{n=0\\ \nu=0}}^{\infty} \frac{(2n+2\nu-2)!(2n+2\nu+1)(2n+2\nu)(2n+2\nu-1)}{[(n+\nu-1)!]^2 n!(n+2\nu+1)!} C^{2n+2\nu+1}$$

$$\sim C^3 I_0(-4C) \sim \frac{C^2}{(ae)^2}. \tag{3.16}$$

因为当 $a\to 0$ 时，$aR_3 \sim a^4$，所以

$$a\sigma_3 R_3 \sim c^2 a^2,\ 当\ a\to 0. \tag{3.17}$$

进一步，一般有

$$a\sigma_{2i+1}R_{2i+1} \sim c^{2i}a^{2i}. \tag{3.18}$$

因为 $a\to 0$ 速度比 $\frac{1}{c}\to 0$ 快，所以

$$a\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{2i+1}R_{2i+1} \to 0,\ 当\ a\to 0. \tag{3.19}$$

即除 $\sigma_1 R_1$ 项外，$T_1 + T_2$ 的其余部分经典连续极限为零.

对于 T_3 和 T_4 项，只要注意到

$$E\to a^0,\ A_n\to a^m,\ 当\ a\to 0, \tag{3.20}$$

可知其经典连续极限为零. 必须指出的是，T_3 和 T_4 项恰好符合 Weyl 顺序，经典场可以直接量子化. 至此，我们完成了(3.7)式的证明.

四、讨　论

(1) 我们的方法可以直接推广于 Susskind 费米子理论.

(2) 利用连续理论格点化的不唯一性，我们找到一种具有可解准确基态的格点 Schwinger 模型. 代价是 Hamiltonian 变复杂了.

(3) 今后的努力方向是，在准确基态的基础上研究有关物理，如手征对称性及能谱等，以彻底弄清格点 Schwinger 模型的连续极限.

作者感谢郭硕鸿教授的有益讨论.

参　考　文　献

[1] Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., *Phys. Rev.* **D38** (1988), 2591.
[2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962), 2425. S. Coleman, *Ann. Phys.* **101** (1976), 239.
[3] T. Banks, J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D13** (1976), 1043. A. Carroll, J. Kogut, D. K. Sinclair and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D13** (1976), 2270.
[4] O. Martin and S. Otto, *Nucl. Phys.* **B203** (1982), 297.
[5] 郑波和郭硕鸿，高能物理与核物理，13(1989)，696.

THE EXACT GROUND STATE OF THE LATTICE SCHWINGER MODEL

ZHENG BO
(*Zhongshan University, Guangzhou*)

ABSTRACT

A modified lattice Schwinger model is proposed and its exact ground state is found.