第13卷 第8期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 13, No. 8
1989 年 8 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1989

快报

同时具有动力学破缺和普通自发破缺的手征 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \sigma$-模型

沈　坤　　裘忠平
（华中师范大学粒子物理研究所，武汉）

摘　　要

本文研究了真空同时具有动力学破缺和普通自发破缺的手征 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ σ-模型，得到了有质量的 π 介子，并对 π 介子获得质量的机制做了讨论。

一、引　　言

众所周知，当 Lagrangian 具有某种对称性，而真空态在相应对称变换下非不变时，该对称性以自发破缺的方式实现 (Goldstone mode)，相应地，要产生零质量、无自旋的 Goldstone 玻色子。然而，在真实的物理世界中，这些粒子都是有质量的。为了使 Goldstone 玻色子获得质量，需要在原来对称的 Lagrangian 中引入小的明显破缺项。例如，在线性 σ-模型中，通过引入线性的明显破缺项 $c\sigma$ 使 π 介子获得质量[1]。由此可见，这样的理论既包含有自发破缺，也包括有明显破缺。需要特别强调的是其中明显破缺项的引入具有手加的特征，而缺乏理论的解释。问题的另一方面是，通常在分析真空的简并性质时，往往只限于讨论由于标量场的自作用所导致的简并真空态，而忽视了理论中包含的不同的场之间的相互作用所导致的真空简并。在这篇文章里，我们把这两方面的问题结合起来考虑，试图通过两种性质不同的真空简并的一起解除使原来无质量的 Goldstoue 粒子获得质量。例如，在 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ 手征对称的 σ-模型中，标量场的自作用使真空出现一种简并(本文将称之为“普通的”，其标志是标量场的真空期待值不为零)；与此同时，由于费米子之间通过交换介子将产生净吸引的相互作用，有可能形成正、反费米子对的真空凝聚，使真空出现另一种简并(一般称之为“动力学的”)，真空的这两种简并的一起解除将产生有质量的 π 介子。

二、自洽方程

研究自洽方程可作为研究真空自发破缺的一个有效途径[2]。为了研究同时存在动力

本文 1989 年 1 月 25 日收到。

学自发破缺(简称动力学破缺)和普通自发破缺的真空态，首先要导出相应的自洽方程.

具有 $SU(2)_L\otimes SU(2)_R$ 手征对称性的 σ-模型的 Lagrangian 为[5]

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi - \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2]$$
$$-\frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 - v^2)^2. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 为 Pauli 矩阵，$\psi(x) = \begin{bmatrix}\psi_p(x)\\ \psi_n(x)\end{bmatrix}$ 为核子场的同位旋二重态，$\sigma(x)$ 是同位旋为零的标量场，$\boldsymbol{\pi}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))$ 为同位旋为1的赝标量场.

考虑有外源存在时，Lagrangian 为

$$\mathscr{L}_J = \mathscr{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\sigma\sigma + \boldsymbol{J}_\pi\cdot\boldsymbol{\pi}. \tag{2}$$

其中 J 表示所有的外源，即 $J = (\bar{\eta}, \eta, J_\sigma, \boldsymbol{J}_\pi)$. 相应的运动方程为

$$[\gamma\cdot\partial_x + g(\sigma(x) + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)\gamma_5)]\psi(x) = \eta(x), \tag{3a}$$
$$\bar{\psi}(x)[-\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}_x + g(\sigma(x) + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)\gamma_5)] = \bar{\eta}(x), \tag{3b}$$
$$(\Box + \lambda v^2)\sigma(x) = g\bar{\psi}(x)\psi(x) + \lambda\sigma(x)(\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)) - J_\sigma(x), \tag{3c}$$
$$(\Box + \lambda v^2)\boldsymbol{\pi}(x) = ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi(x) + \lambda\boldsymbol{\pi}(x)(\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)) - \boldsymbol{J}_\pi(x). \tag{3d}$$

将(3c)、(3d)式两边对真空态求平均，有

$$(\Box + \lambda v^2)\langle\sigma(x)\rangle_0^J = g\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle_0^J + \lambda\langle\sigma(x)(\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x))\rangle_0^J - J_\sigma(x), \tag{4a}$$
$$(\Box + \lambda v^2)\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J = ig\langle\bar{\psi}(x)\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi(x)\rangle_0^J + \lambda\langle\boldsymbol{\pi}(x)(\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x))\rangle_0^J - \boldsymbol{J}_\pi(x). \tag{4b}$$

其中 $\langle A(x)\rangle_0^J \equiv \langle O_{\text{out}}|A(x)|O_{\text{in}}\rangle^J/\langle O_{\text{out}}|O_{\text{in}}\rangle^J$.

体系的生成泛函为

$$W[J] \equiv N\int[\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\sigma][\mathscr{D}\boldsymbol{\pi}]\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}_J\right). \tag{5}$$

场的平均值为

$$\langle\sigma(x)\rangle_0^J = (\hbar/i)\delta W/\delta J_\sigma(x). \tag{6}$$
$$\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J = (\hbar/i)\delta W/\delta\boldsymbol{J}_\pi(x). \tag{7}$$

根据场的平均值的定义，有

$$\langle\sigma^3(x)\rangle_0^J = (\langle\sigma(x)\rangle_0^J)^3 + 3\frac{\hbar}{i}\langle\sigma(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma(x)} + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma^2(x)}, \tag{8}$$

$$\langle\sigma(x)\boldsymbol{\pi}^2(x)\rangle_0^J = (\langle\pi(x)\rangle_0^J)^2\langle\sigma(x)\rangle_0^J + \frac{\hbar}{i}\langle\sigma(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}$$
$$+ 2\frac{\hbar}{i}\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J\cdot\frac{\delta\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)} + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)\cdot\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}. \tag{9}$$

由(8)、(9)式，(4)式可以表为

$$(\Box + \lambda v^2)\langle\sigma(x)\rangle_0^J = g\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle_0^J - J_\sigma(x) + \lambda\langle\sigma(x)\rangle_0^J[(\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J)^2$$
$$+ (\langle\sigma(x)\rangle_0^J)^2]$$
$$+ \lambda\left(\frac{\hbar}{i}\right)\left[3\langle\sigma(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma(x)} + \langle\sigma(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)} + 2\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J\cdot\frac{\delta\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}\right]$$

$$+\lambda\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left[\frac{\delta^2\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma^2(x)}+\frac{\delta^2\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)\cdot\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}\right]. \tag{10}$$

同理，对 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 场求平均后可化为

$$\begin{aligned}(\Box+\lambda v^2)\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J &= ig\langle\bar{\psi}(x)\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi(x)\rangle_0^J-\boldsymbol{J}_\pi(x)\\ &+\lambda\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J[(\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J)^2+(\langle\sigma(x)\rangle_0^J)^2]\\ &+\lambda\left(\frac{\hbar}{i}\right)\left[3\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}+2\langle\sigma(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma(x)}\right.\\ &\left.+\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J\frac{\delta\langle\sigma(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma(x)}\right]+\lambda\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left[\frac{\delta^2\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)\cdot\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}+\frac{\delta^2\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J}{\delta J_\sigma(x)\delta J_\sigma(x)}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

由(10)、(11)式可以看出，相应于 $\hbar$ 和 $\hbar^2$ 的项分别为对外源求一次和二次导数，它们描述量子效应．由于真空态是体系能量的最低态，任何一阶微扰都是以真空态为基础进行展开的．它是 $\hbar$ 的零阶效应，对应于树图近似[4]．因此，在树图近似下，可以忽略 $\hbar$ 的其余各阶项，并令外源为零．这样，(10)、(11)式化为

$$g\mathrm{tr}S_F(0)-\lambda\sigma_0(\sigma_0^2+\boldsymbol{\pi}_0^2-v^2)=0. \tag{12a}$$

$$ig\mathrm{tr}\gamma_5\boldsymbol{\tau}S_F(0)-\lambda\boldsymbol{\pi}_0(\sigma_0^2+\boldsymbol{\pi}_0^2-v^2)=0 \tag{12b}$$

其中 $\mathrm{tr}\,S_F(0)=-\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle_0^J|_{J=0}$，$\mathrm{tr}\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\,S_F(0)=-\langle\bar{\psi}(x)\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\,\psi(x)\rangle_0^J|_{J=0}$，$\sigma_0=\langle\sigma(x)\rangle_0^J|_{J=0}$，$\boldsymbol{\pi}_0=\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J|_{J=0}$，$\sigma_0$ 和 $\boldsymbol{\pi}_0$ 是时空常数．(12)式中的 $S_F(0)$ 是在忽略 $\hbar$ 的各阶效应，无外源时的费米子传播子．

根据 $S_F'(x,x')^J$ 的定义，应用运动方程(3)式，有

$$\begin{aligned}\gamma\cdot\partial_x S_F'(x,x')^J &= -i\delta^4(x-x')-g\langle T(\sigma(x)+i\boldsymbol{\tau}\\ &\quad\cdot\boldsymbol{\pi}(x)\gamma_5)\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle_0^J+\eta(x)\langle\bar{\psi}(x')\rangle_0^J,\end{aligned} \tag{13}$$

应用关系式

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta S_F'(x,x')^J}{\delta J_\sigma(y)} &= \langle T\sigma(y)\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle_0^J-S_F'(x,x')^J\langle\sigma(y)\rangle_0^J,\\ \frac{\hbar}{i}\frac{\delta S_F'(x,x')^J}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(y)} &= \langle T\boldsymbol{\pi}(y)\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle_0^J-S_F'(x,x')^J\langle\pi(y)\rangle_0^J.\end{aligned} \tag{14}$$

将(14)式代入(13)式中，有

$$\begin{aligned}&\left[\gamma\cdot\partial_x+g(\langle\sigma(x)\rangle_0^J+i\boldsymbol{\tau}\gamma_5\langle\boldsymbol{\pi}(x)\rangle_0^J)+\frac{\hbar}{i}g\left(\frac{\delta}{\delta J_\sigma(x)}+i\boldsymbol{\tau}\gamma_5\cdot\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{J}_\pi(x)}\right)\right]S_F'(x,x')^J\\ &\quad=-i\delta^4(x-x')+\eta(x)\langle\bar{\psi}(x')\rangle_0^J.\end{aligned} \tag{15}$$

在树图近似下，忽略 $\hbar$ 的各阶项，外源为零时的费米子传播子就满足方程

$$[\gamma\cdot\partial_x+g(\sigma_0+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}_0\gamma_5)]S_F(x-x')=-i\delta^4(x-x'). \tag{16}$$

因此，

$$S_F(0)=\int^\Lambda\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-1}{\gamma\cdot p-ig(\sigma_0+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}_0\gamma_5)}. \tag{17}$$

上式中的积分是发散的，为了使讨论有意义，必须引入动量截断 Λ[5]．

这样，(12)式和(17)式确定了相应的自洽方程，其中 $g\mathrm{tr}\,S_F(0)$ 和 $ig\mathrm{tr}\gamma_5\boldsymbol{\tau}S_F(0)$ 是物理真空复杂性的反映，它表示费米场与标量场的相互作用对体系的真空态是有影响的．

当不考虑费米场与标量场的相互作用对真空态的影响时，在自洽方程中没有费米子对的真空凝聚，(12)式化为

$$\lambda\sigma_0'(\sigma_0'^2+\boldsymbol{\pi}_0'^2-v^2)=0 \tag{18a}$$

$$\lambda\boldsymbol{\pi}_0'(\sigma_0'^2+\boldsymbol{\pi}_0'^2-v^2)=0 \tag{18b}$$

对比(12)式和(18)式可知，仅存在普通自发破缺时的 σ 场和 $\boldsymbol{\pi}$ 场的真空期望值 $(\sigma_0',\boldsymbol{\pi}_0')$ 不等于同时具有动力学破缺和普通自发破缺时的 σ 场和 $\boldsymbol{\pi}$ 场的真空期望值 $(\sigma_0,\boldsymbol{\pi}_0)$，这两组解的差别是由正、反费米子对的真空凝聚 $\langle\bar{\Phi}\psi\rangle_0$ 和 $\langle\bar{\Phi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\rangle_0$ 所引起的。这就是通常所说的动力学破缺[5]。这里费米子对的凝聚所产生的效果表现在标量场的真空期望值发生了改变。

考虑到强作用中宇称守恒，破缺方向选在 σ 场方向，即

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}\gamma_5S_F(0)=0,\\&\mathrm{tr}\,S_F(0)\neq 0.\end{aligned} \tag{19}$$

自洽方程(12)式的非平庸解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\pi}_0=0,\\&\lambda\sigma_0(\sigma_0^2-v^2)=g\,\mathrm{tr}\,S_F(0).\end{aligned} \tag{20}$$

三、自发破缺后的质量谱

$\sigma(x)$、$\boldsymbol{\pi}(x)$ 场应围绕该场的真空期望值进行量子化，即将场进行平移

$$\begin{aligned}&\sigma(x)\to\sigma(x)+\sigma_0,\\&\boldsymbol{\pi}(x)\to\boldsymbol{\pi}(x)\end{aligned} \tag{21}$$

平移后的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\bar{\Phi}(\gamma.\partial+m_N)\psi-g\bar{\Phi}(\sigma+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi\\&-\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2-\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2-\frac{1}{2}m_\pi^2\cdot\boldsymbol{\pi}^2\\&-\lambda\sigma_0(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2)\sigma-\frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2)^2-g\mathrm{tr}S_F(0)\cdot\sigma.\end{aligned} \tag{22}$$

其中核子质量为

$$m_N=g\sigma_0 \tag{23}$$

σ、$\boldsymbol{\pi}$ 介子的质量分别为

$$m_\sigma^2=\lambda(3\sigma_0^2-v^2), \tag{24}$$

$$m_\pi^2=g\,\mathrm{tr}\,S_F(0)/\sigma_0. \tag{25}$$

由(25)式可知，当没有动力学破缺时，$\boldsymbol{\pi}$ 介子的质量为零，这就是一般所熟知的结论. 当同时存在动力学破缺和普通自发破缺时，$\boldsymbol{\pi}$ 介子就获得了质量，并且在 Lagrangian 密度(22)式中产生了 σ 场的线性项，该项的效应正好抵消了由相互作用 $-g\bar{\Phi}\psi\sigma$ 所产生的蝌蚪图的贡献，破缺之后的 σ 场总的蝌蚪图的贡献为零，这是破缺之后要求平移后的场 σ 的真空期待值 $\langle\sigma\rangle_0=0$ 的结果.

下面，我们就 $\boldsymbol{\pi}$ 介子获得质量的物理机制作一些讨论. 我们认为，当真空同时存在两

种不同性质的简并时，只要这两种简并均被解除，π 介子就获得质量．当普通自发破缺发生时，核子就获得了质量，手征对称性发生了破缺；这时，动力学破缺的发生就相当于具有裸质量的动力学破缺理论，相应产生的束缚态是赝标介子 π，此束缚态的极点不在 $q^2 = 0$ 处，而在 $q^2 \neq 0$ 处[5]．因此，π 介子就具有非零质量．或者，当动力学破缺发生时，$\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_0 \neq 0$，相应的标量场的拉氏量中有一个线性破缺项 $-g\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_0\sigma$ 出现．这时，标量场的破缺就跟线性 σ-模型完全相似，从而使 π 介子获得了质量．这里，$-g\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_0$ 相当于线性 σ-模型中的明显破缺项的系数 c．如令 $c = -g\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_0$，那么，$\pi$ 介子的质量谱(25)式可以表为

$$m_\pi^2 = c/\sigma. \tag{26}$$

这与线性 σ-模型所给出的质量谱完全相同[3]．因此，线性 σ-模型中所引入的明显破缺项可以解释为来源于费米子对的真空凝聚．

由以上讨论可知，通过真空的两种不同性质的简并的一起解除，可以使原来无质量的 Goldstone 粒子获得质量．

最后，我们指出，以上讨论只在微扰论的树图近似下成立．对微扰论各阶都成立的一般讨论，我们将另文进行．

我们感谢朱重远教授、刘连寿教授和李家荣教授的有益讨论．

参　考　文　献

[1] M. Gell-Mann and M. Levy, *Nuovo Cimento,* **16**(1960), 705.

[2] Liu Bao-hua and Li Jia-rong, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 190.

[3] C. Itzykson and J. B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York, 1980.

[4] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rep.*, **C9**(1973), 1.

[5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**(1961), 345; **124**(1961), 246.

THE CHIRAL $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ σ-MODEL WITH MASSIVE π MESONS

SHEN KUN　QIU ZHONGPING

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan)

ABSTRACT

The chiral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ σ-Model with both spontaneous and dynamical symmetry breaking is investigated and massive π mesons are obtained. The physical mechanism of how π mesons acquire mass is discussed.