第13卷 第8期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 8
1989年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1989

13卷

Lemaitre 度规中 Dirac 方程的径向解

李 元 杰
(华中理工大学，武汉)

摘 要

本文给出球对称度规下 Dirac 方程的径向解，证明了 Schwarzschild 黑洞周围不存在费米量子束缚态. 讨论了几种可能的情况. 其中有一个暂态孤子波解，为检验黑洞存在提供了新的信息. 定态解则描述了黑洞对粒子的吸积和蒸发过程.

一

s limit
:ut off

关于黑洞周围的玻色子量子束缚态问题，在许多文献中有过讨论[1-5]. 然而，对费米子量子束缚态问题的研究却不多，1982 年 J. M. Cohen 和 R. T. Powers 用谱分析方法讨论过这个问题[6]，本文将直接求径向方程的解，进而讨论其量子束缚态情况，分析了几种物理上可能的结果.

在 Lemaitre 度规中、线元为.

$$ds^2=-d\tau^2+\left[\frac{3}{2}\frac{R-\tau}{r_g}\right]^{-2/3}dR^2+\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{4/3}r_g^{2/3}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

式中，

$$r=r_g^{1/3}\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}$$

$$\tau=t+2(r_gr)^{1/2}+r_g\ln\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r_g}}{\sqrt{r}+\sqrt{r_g}}$$

$r_g=2M$ 是黑洞视界半径.

引进 ω^μ:

$$\omega^0=d\tau,\qquad \omega^1=\left(\frac{3}{2}\frac{R-\tau}{r_g}\right)^{-1/3}dR, \tag{2}$$

$$\omega^2=\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}r_g^{1/3}d\theta,\qquad \omega^3=\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}r_g^{1/3}\sin\theta d\phi.$$

则(1)式简写为:

$$ds^2=-(\omega^0)^2+(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2 \tag{3}$$

本文 1988 年 8 月 16 日收到.

弯曲时空中的 Dirac 方程为

$$[\gamma^\mu(\omega_\mu - \Gamma_\mu) + m]\psi = 0 \tag{4}$$

其中，γ^μ 是 4×4 Dirac 矩阵，ω_μ 为切矢量 $\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta$，为旋量联络利用(1),(2),(3)式,可求出非零 ω^α_β, $\gamma_{\alpha\beta\mu}$ 及 Γ_μ

$$\omega^1_0 = \frac{1}{3}(R-\tau)^{-1}\omega^1,\quad \omega^2_0 = -\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-1}\omega^2,$$

$$\omega^2_1 = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\omega^2,\quad \omega^3_0 = -\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-1}\omega^3,$$

$$\omega^3_1 = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\omega^3,\quad \omega^3_2 = \mathrm{ctg}\theta\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\omega^3;$$

$$\gamma_{101} = \frac{1}{3}(R-\tau)^{-1},\quad \gamma_{202} = -\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-1}$$

$$\gamma_{212} = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3},\quad \gamma_{303} = -\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-1},$$

$$\gamma_{313} = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3},\quad \gamma_{323} = \mathrm{ctg}\theta\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3};$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{12(R-\tau)}\gamma^1\gamma^0,$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{6}(R-\tau)^{-1}\gamma^2\gamma^0 - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\gamma^2\gamma^1,$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{6}(R-\tau)^{-1}\gamma^3\gamma^0 - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\gamma^3\gamma^1 - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{-2/3} r_g^{-1/3}\mathrm{ctg}\theta\gamma^3\gamma^2.$$

将 Γ_μ 代入(4)式,再以 $\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}\gamma^0$ 左乘之有:

$$\begin{aligned}&\Big\{-\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}\partial_\tau + \gamma^0\gamma^1\frac{3}{2}(R-\tau)r_g^{-1/3}\partial_R + \gamma^0\gamma^2 r_g^{-1/3}\partial_\theta \\ &+ \gamma^0\gamma^3 r_g^{-1/3}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(R-\tau)^{-1/3} - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(R-\tau)^{-1/3} \\ &- \frac{1}{4}r_g^{-1/3}\gamma^0\gamma^1 - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(R-\tau)^{-1/3} - \frac{1}{4}r_g^{-1/3}\gamma^0\gamma^1 - \frac{1}{4}r_g^{-1/3}\mathrm{ctg}\theta\gamma^0\gamma^2 \\ &+ \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3} m\gamma^0\Big\}\psi = 0\end{aligned} \tag{5}$$

这里,我们已取 $\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$ $\vec{\sigma}$ 为 Pauli 矩阵[6].

作分离变量: $\psi = Z(\tau, R)Y(\theta, \varphi)$，我们就得到

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ B & 0 & 0 & A \end{pmatrix} Z = lZ \tag{6}$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & C & -D \\ 0 & 0 & D & -C \\ C & -D & 0 & 0 \\ D & -C & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = lY \tag{7}$$

其中，

$$A = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3} \partial_\tau + im\left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(R-\tau)^{-1/3}$$

$$B = \frac{1}{2} r_g^{-1/3}[1 - 3(R-\tau)\partial_R],$$

$$C = r_g^{-1/3}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi, \quad D = ir_g^{-1/3}\left(\partial_\theta - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\theta\right)$$

我们只关心方程(6)的解，它可写为两组独立的方程

$$\begin{cases} AZ_1 + BZ_2 = lZ_1 \\ BZ_1 + AZ_2 = lZ_2 \end{cases} \tag{8}$$

将它重新组合可得：

$$\begin{cases} (A+B)(Z_1+Z_2) = l(Z_1+Z_2) \\ (A-B)(Z_1-Z_2) = l(Z_1-Z_2) \end{cases} \tag{9}$$

即

$$\left[\partial_\tau \mp \partial_r + im + \frac{3}{8} r_g^{1/2} - r^{-3/2}\left(lr_g^{1/3} \mp \frac{1}{2}\right)\gamma^{-1}\right](Z_1 \pm Z_2) = 0 \tag{10}$$

作变换

$$u = \frac{1}{2}(\tau + r), \qquad V = \frac{1}{2}(\tau - r)$$

方程(10)就可改写为

$$\left[\partial_v + im + \frac{3}{8} r_g^{1/2}(u-v)^{-3/2} - \left(lr_g^{1/3} - \frac{1}{2}\right)(u-v)^{-1}\right](Z_1+Z_2) = 0$$

$$\left[\partial_u + im + \frac{3}{8} r_g^{1/2}(u-v)^{-3/2} - \left(lr_g^{1/3} + \frac{1}{2}\right)(u-v)^{-1}\right](Z_1-Z_2) = 0 \tag{11}$$

将(11)式积分得

$$Z_1 + Z_2 = f(u)e^{-imv}(u-v)^{-\left(lr_g^{1/3}-\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{3}{4}r_g^{1/2}(u-v)^{-1/2}}$$

$$Z_1 - Z_2 = g(v)e^{-imu}(u-v)^{lr_g^{1/3}+\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4}r_g^{1/2}(u-v)^{-1/2}} \tag{12}$$

其中，$f(u)$，$g(v)$ 分别是 u，v 的任意函数. 将(12)式中 u，v 还原为变量 r，τ，(12) 式

就成为:

$$Z_1 + Z_2 = f\left[\frac{1}{2}(\tau + r)\right] e^{-im(\tau - r)/2} r^{-\left(l r_g^{1/3} - \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{3}{4} r_g^{1/2} r^{-1/2}} \tag{13}$$

$$Z_1 - Z_2 = g\left[\frac{1}{2}(\tau - r)\right] e^{-im(\tau + r)/2} r^{l r_g^{1/3} + \frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4} r_g^{1/2} r^{-1/2}} \tag{14}$$

(13),(14)是球对称度规下，Dirac 方程的径向严格解.

二

现在,我们对径向严格解进行几点讨论.

1. 对于 $l = 0$，为保证波函数在 $r \to \infty$ 时有限,在(13)式中取

$$f\left[\frac{1}{2}(\tau + r)\right] \sim \frac{1}{(\tau + r)^{1/2}}$$

则 t 足够大时,有 $Z_1 + Z_2 \to 0$，不妨令 $Z_2 = -Z_1$，在(14)式中取

$$g\left[\frac{1}{2}(\tau - r)\right] = \operatorname{sech}(\tau - r)$$

于是得

$$Z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r}\,\operatorname{sech}(\tau - r)\, e^{-im(\tau + r)/2} e^{\frac{3}{4} r_g^{1/2} r^{-1/2}}$$

$$Z_2 = -Z_1 \tag{15}$$

当 $t \to \infty$ 时解(15),亦为零,但它包含了一个暂态沿径向向外传播的孤子波. 这表明,当星体坍缩成黑洞时,可能会发出一束高能孤子波,它给检验黑洞存在的实验提供了新的信息.

2. 对于 $l > 0$，假定一般情况下 $l r_g^{1/3} \gg \frac{1}{2}$，为保证(14)式在 $r \to \infty$ 处的有限性，可适当选取 $g\left[\frac{1}{2}(\tau - r)\right]$，使 t 足够大时，$Z_1 - Z_2 \to 0$，于是,不妨取 $Z_1 = Z_2 = Z$，则(13)式可写成

$$Z = \frac{1}{2} f\left[\frac{1}{2}(\tau + r)\right] e^{-im(\tau - r)/2} r^{-\left(l r_g^{1/3} - \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{3}{4} r_g^{1/2} r^{-1/2}} \tag{16}$$

对于定态解,令

$$\frac{1}{2} f\left[\frac{1}{2}(\tau + r)\right] = C e^{-i\left(\omega - \frac{m}{2}\right)(\tau + r)} \tag{17}$$

于是有

$$Z = C e^{-i\omega t} e^{-i[(\omega - m) r + 2\omega r_g^{1/2} r^{1/2}]} \left[\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}}\right]^{-i\omega r_g} \cdot e^{-\frac{3}{4} r_g^{1/2} r^{-1/2}} r^{-\left(l r_g^{1/3} - \frac{1}{2}\right)}, \tag{18}$$

式中 C 为归一化常数.

解(18)在除原点外的整个区域都是有界连续的.

$\omega = m$ 时为极端非相对论情况．这时粒子距黑洞较远，解(18)简化为

$$Z = Ce^{-i\omega t}e^{-i2\omega r_g^{1/2}r^{1/2}}\left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r_g}}{\sqrt{r}+\sqrt{r_g}}\right)^{-i\omega r_g} \cdot e^{-\frac{3}{4}r_g^{1/2}r^{-1/2}}r^{-\left(lr_g^{1/3}-\frac{1}{2}\right)} \tag{19}$$

这是一个沿径向向黑洞中心传播的波，它描述了黑洞吸引粒子的过程．

$\omega \gg m$ 时为极端相对论情况．这时粒子距黑洞较近，或 $r \sim r_g$．

解(18)则表示一个沿径向向外传播的波，它描述一个从黑洞视界内透射或蒸发出来的衰减波．

总之，以上讨论表明，在 Schwarzschild 黑洞周围没有费米量子的束缚态，这一结论与文献[6]是一致的．当费米量子无轨道角动量 ($l = 0$) 时，黑洞能发出一孤子波向外传播．当费米量子 $l > 0$ 时，定态解描述了黑洞对费米子的吸引和 Hawking 蒸发过程．

参　考　文　献

[1] 张端明、李元杰. *Commun in Theor Phys.*, **V4** (1985), 853.
[2] 李元杰、张端明，高能物理与核物理，**V10**, **N4**(1986), 412.
[3] 李元杰，高能物理与核物理，**V11**, **N2** (1987), 198.
[4] 章世伟、苏汝铿，物理学报，**31**(1982), 311.
[5] 须重明、谢光中，科学通报，**25**(1980), 1063.
[6] Cohen. J. M., Powers, R. T, *Commun, Math. Phys* **86** (1982), 69.

RADIAL SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION IN A LEMAITRE METRIC

LI YUANJIE

(Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

ABSTRACT

In this paper the radial solutions of the Dirac equation in a metric with spheroidal symmetry are given. It is shown that there exists no quantum bound states of Fermions about the Schwarzschild black hole. Some cases are discussed, one is a soliton wave of the temporal state, which provides a new insight for checking the existence of a black hole, the other is a solution of the stationary state which describes the accretion and vaporization of the black hole.