第13卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 6
1989年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1989

非线性 σ-模型的拓扑项的研究*

高孝纯 汪 涌
许晶波 李文铸
(浙江大学物理系，杭州)

摘 要

本文研究了 1+1 维 $O(3)$非线性 σ-模型的哈密顿正则系统，证明了若对系统作一适当的正则变换，该模型中的拓扑项即可自行消失．文章对该结果的意义作了进一步的讨论．

一、引 言

长期以来，对非线性 σ-模型的研究一直受到人们的普遍重视．我们知道，1+1 维非线性 σ-模型与 3+1 维非阿贝尔规范理论有许多共同的特征[1-6]，对该模型的研究有助于人们了解规范理论的许多重要性质． 1+1 维非线性 σ-模型在超弦紧致化方面也可能起到重要作用[7]． 作为一维反铁磁 Heisenberg 模型的连续经典极限，1+1 维非线性 σ-模型还可用来研究量子霍尔效应[8-12]． 作为二维反铁磁 Heisenberg 模型的连续经典极限，2+1 维非线性 σ-模型则可能在高温超导的研究中起到重要作用[13-15]．

很多人研究过非线性 σ-模型的拓扑问题． 近来，Heisenberg 模型在连续极限下的拓扑问题正越来越引起人们的广泛注意[15-16]．

本文着重研究了 1+1 维 Heisenberg 模型在连续极限下拓扑项的起源问题． Affleck 曾经研究过这一问题[9-12]，并在拉氏密度中得到一反映模型的拓扑性质的拓扑项． 本文将证明，若对体系作一适当的正则变换，该拓扑项即自行消失．本文还对该结果的意义作了进一步的讨论．

二、连续极限下的 Heisenberg 模型作为 Hamilton 正则系统与拓扑项

一维反铁磁 Heisenberg 模型的 Hamilton 量为:

$$H = \Sigma \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+1}, \quad \boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1) \tag{1}$$

* 本课题受到国家自然科学基金的资助.

本文 1989 年 2 月 10 日收到.

定义：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_{2i+\frac{1}{2}} &= (\boldsymbol{S}_{2i+1} - \boldsymbol{S}_{2i})/2\sqrt{S(S+1)}; \\ \boldsymbol{l}_{2i+\frac{1}{2}} &= (\boldsymbol{S}_{2i+1} + \boldsymbol{S}_{2i})/2\Delta \end{aligned} \tag{2}$$

这里的 Δ 为格点间距.

在大 S 连续极限下，它们满足 $O(3)$ σ-模型的场与转动生成元的对易关系与约束条件[9]:

$$\begin{aligned} &[l^a(x), n^b(y)] = i\epsilon^{abc} n^c(x)\delta(x-y) \\ &[l^a(x), l^b(y)] = i\epsilon^{abc} l^c(x)\delta(x-y) \\ &[n^a(x), n^b(y)] = 0 \\ &\boldsymbol{n}^2 = 1, \quad \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

在(2)式中解出 $\boldsymbol{S}_i$，代入(1)式，就得到在该极限下 Hamilton 量为 $2\Delta\sqrt{S(S+1)}\cdot H_\sigma$. 这里 H_σ 是 σ-模型的 Hamilton 量，

$$H_\sigma = \int dx \left\{ \frac{g^2}{2}\left[\boldsymbol{l} - \frac{\theta}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2g^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}\right)^2 \right\} \tag{4}$$

其中，$g^2 = 2/S$，拓扑角 $\theta = 2\pi S$.

为将 Hamilton 密度表述成正则形式，我们用球坐标来表示 $\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ 以 θ，φ 为独立的正则坐标，相应的正则动量记为 π_θ，π_φ，

选择，

$$\begin{aligned} l_x &= -\sin\varphi\pi_\theta - \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\pi_\varphi \\ l_y &= \cos\varphi\pi_\theta - \sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\pi_\varphi \\ l_z &= \pi_\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

则 Hamilton 密度

$$\begin{aligned} \mathscr{H} = &\frac{g^2}{2}\pi_\theta^2 + \frac{g^2}{2}\pi_\varphi^2/\sin^2\theta - \pi_\theta\sin\theta\nabla\varphi \\ &+ (\pi_\varphi/\sin\theta)\nabla\theta + \frac{1}{g^2}[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2] \end{aligned} \tag{6}$$

通过正则手续即可得出拉氏密度为[9-12]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu\boldsymbol{n})^2 + \frac{\theta}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n}) \tag{7}$$

$\mathscr{L}$ 中的最后一项即为拓扑项. 瞬子的拓扑荷可表为

$$q = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\,\epsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n}) \tag{8}$$

现在，让我们来考察上述系统在正则变换下的行为.

考虑如下的一个变换：

$$\begin{aligned} &\theta \to \theta' = \theta, \quad \varphi \to \varphi' = \varphi \\ &\pi_\theta \to \pi_\theta' = \pi_\theta - \frac{1}{g^2}\sin\theta\partial_x\varphi \\ &\pi_\varphi \to \pi_\varphi' = \pi_\varphi + \frac{1}{g^2}\sin\theta\partial_x\theta \end{aligned} \tag{9}$$

这时，系统的 Hamilton 密度变为

$$\mathscr{H} \to \mathscr{H}' = \frac{g^2}{2}\pi_\theta'^2 + \frac{g^2}{2}\pi_\varphi'^2/\sin^2\theta' + \frac{1}{2g^2}[(\nabla\theta')^2 + \sin^2\theta'(\nabla\varphi')^2] \tag{10}$$

可以证明,变换后的 Hamilton 正则系统(10)与变换前的(6)具有相同形式的正则方程即,

$$\begin{cases} \dot\theta = \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\theta}, & \dot\pi_\theta = -\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\theta} \\ \dot\varphi = \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\varphi}, & \dot\pi_\varphi = -\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{和}\begin{cases} \dot\theta' = \dfrac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\pi_\theta'}, & \dot\pi_\theta' = -\dfrac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\theta'} \\ \dot\varphi' = \dfrac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\pi_\varphi'}, & \dot\pi_\varphi' = -\dfrac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\varphi'} \end{cases} \tag{12}$$

因此变换(9)是一正则变换.

由正则变换后的 Hamilton 密度(10)式得

$$\dot\theta' = \frac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\pi_\theta'} = g^2\pi_\theta' \qquad \dot\varphi' = \frac{\partial\mathscr{H}'}{\partial\pi_\varphi'} = g^2\pi_\varphi'/\sin^2\theta' \tag{13}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \pi_\theta'\dot\theta' + \pi_\varphi'\dot\varphi' - \mathscr{H} \\ &= \frac{1}{g^2}\dot\theta'^2 + \frac{\sin^2\theta'}{g^2}\dot\varphi'^2 - \frac{1}{2g^2}\dot\theta'^2 - \frac{\sin^2\theta'}{2g^2}\dot\varphi'^2 \\ &\quad - \frac{1}{2g^2}[(\nabla\theta')^2 + \sin^2\theta'(\nabla\varphi')^2] \\ &= \frac{1}{2g^2}[\dot\theta'^2 - (\nabla\theta')^2 + \sin^2\theta'(\dot\varphi'^2 - \nabla\varphi')^2] \\ &= \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 \end{aligned} \tag{14}$$

拓扑项自行消失!

注意,拉氏密度在正则变换下可相差一个全散度,其积分后得到的表面项并不一定为零. 还应注意的是,以分立模型取连续极限而来的 Hamilton 量(4)式,并不是由正则变量来表示的. Affleck[9-12]等人选取了一组正则变量来表示这一 Hamilton 量. 本文选取了另一组正则变量来表示这同一 Hamilton 量. 我们认为即使两组正则变量不是差一正则变换,也无先验的理由断定那一种选取更优越. 就是说给了一个不用正则变量表示的哈密顿量,在选取正则变量来表示这一哈密顿量时有很大的自由度. 本文指出了,正是这种自由度的存在使得我们不能从 Hamilton 量(4)断定拉氏量中拓扑项是否存在. 显然,本文所说的两种正则变量的选取相当于在拉氏表述中作了某种奇异的变换.

三、讨　论

(1) 我们已经证明通过对体系作一正则变换,拓扑项可自行消失. 但一般来说,在量子理论中,拓扑项的出现及消失与真空态或波函数的相位有关[16],我们将在另一文章中对

此作出讨论[17]．（2）我们看到，从分立的模型过渡到连续模型并不能必然地得到拓扑，项关键在于如何构造正则系统． 最近，为研究高温超导机制，Polyakov 等人[13]提出要在 2+1 维 $O(3)$ 非线性 σ-模型中引入一拓扑项，以稳定瞬子态和使瞬子激发具有费米子特性．目前，人们极感兴趣的是，如何从分立模型中追寻该拓扑项的来源[15]．人们期望能通过对分立的反铁磁 Heisenberg 模型取连续极限得到该拓扑项．我们认为，本文对 1+1 维情形进行的讨论，同样适用于 2+1 维情形，并预期能得到类似的结论．这方面的工作正在进行当中．

参　考　文　献

[1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 79.
[2] A. T. Belavin and A. M. Polyakov, *JEPP Lett.*, 22(1975), 245.
[3] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **72B**(1977), 224.
[4] H. Eichenher, *Nucl. Phys.*, **B146**(1978), 215.
[5] H. Eichenher, *Nucl. Phys.*, **B155**(1979), 544.
[6] E. Brezin, J. Zinn-justin, *Phys. Rev.*, **B14**(1976), 3110.
[7] E. Witten, *Phys. Lett.*, **B149**(1984), 351.
[8] H. Levin, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Nucl. Phys.*, B240(1984), 30.
[9] I. Affleck, *Nucl. Phys.*, **B257**(1985), 397.
[10] I. Affleck, *Nucl. Phys.*, **B265**(1986), 409.
[11] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 408.
[12] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1048.
[13] I. Dzyaloshinskii, A. Polyakov and P. Wiegmann, *Phys. Lett.*, **127A**, 112(1988).
[14] A. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 325.
[15] K. Wu, L. Wu and C. J. Zhu, Trieste Preprint, (1988).
[16] Y. Wu and A. Zee, *Phys. Lett.*, **147B**(1984), 325.
[17] W. Z. Li, X. C. Gao and Y. Wang (to be published).

THE STUDY OF TOPOLOGICAL TERMS OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL

Gao Xiaochun　Wang Yong　Xu Jingbo　Li Wenzhu

(Department of Physics, Zhejiang University Hangzhou)

Abstract

The canonical system of $O(3)$ nonlinear sigma model in $1+1$ dimensions is studied in this paper. It is shown that the topological term in the model will disappear under a suitable canonical transformation for the system. The significance of this result is discussed.