

二维和三维空间 $SU(2)$ 规范群的 Wilson 圈平均值*

李志兵 郑维宏 郭硕鸿

(中山大学, 广州)

摘 要

本文采用改进了的 Monte Carlo 方法在二维和三维空间计算了 $SU(2)$ 格点规范理论的 $n \times m$ Wilson 圈平均值, 并与分立子群 Y_{120} 以及二维的准确结果作了比较.

一、引 言

在哈密顿形式格点理论中^[1], 三维空间的 Wilson 圈与胶球质量、弦张力和玻色凝量等有非常密切的关系^[2]. 因为维数比拉氏形式格点理论少一维, 所需的 Monte Carlo 模拟时间就大大减少(代价是增加了解析运算量). 这一点给在大中型计算机上获取较好的结果提供了机会.

研究三维纯规范场的另一个很重要的理由涉及到有限温度 QCD 的性质. 三维纯规范场理论作为极高温(或高密度) FQCD 的极限理论, 在描述早期宇宙和高能重离子碰撞中可能找到其应用^[3].

Ambjorn 等在 $\beta = 3 \sim 6.5$ 之间用 $SU(2)$ 的分立子群 Y_{120} 近似计算了一些三维规范场的 Wilson 圈^[4]. 弦张力的计算表明, 三维规范场的标度区在 $\beta \geq 5$ 以后^[3,4]. 但由于分立子群不能连续地趋近单位元素, 当 β 较大时, Y_{120} 将冻结在单位元素上. 文献 [4] 给出冷结点 $\beta_c \sim 7.5$, 本文给出 $\beta_c \sim 9.4$. 而且我们的数据还表明由 Y_{120} 子群算出的 Wilson 圈早在 $\beta \sim 5.3$ 便开始明显偏离 $SU(2)$ 群的结果. 因此, 用连续的 $SU(2)$ 群重新对三维空间的 Wilson 圈进行计算是很有必要的.

二维空间的 Wilson 圈平均值有严格的解析结果. 由此可检验 Monte Carlo 模拟的可靠性和有效性.

常用的模拟 $SU(2)$ 群的方法主要有 Metropolis 方法^[5]和 Creutz 提出的 heat bath 方法^[6]. Cabibbo 和 Marinari 等在模拟 $SU(2)$ 的基础上, 把 Creutz 的方法推广到 $SU(N)$ 群的模拟^[7]. 最近 Y. F. Deng 改进了他们的方法^[8], 进一步提高了 MC 叠代的效率. 本文采用 Deng 的方法对二维和三维的 $SU(2)$ 规范群进行了 Monte Carlo 模

* 本工作得到中山大学高等学术中心基金会和国家教委科学基金会的资助.
本文 1988 年 6 月 11 日收到.

拟,并改进了 Wilson 圈的测量方法,使测量时间约缩短三分之一。

二、 $SU(2)$ 的 Monte Carlo 模拟

一个周界为 c 的 Wilson 圈定义为

$$\omega(c) = \text{Tr} \left(\prod_c U \right), \quad (1)$$

其中 \prod_c 表示规范链沿周界 c 的顺序乘积。它的平均值为

$$\langle \omega(c) \rangle = \int \prod_i dU_i \omega(c) \exp\left(\frac{\beta}{2} S\right) / \int \prod_i dU_i \exp\left(\frac{\beta}{2} S\right) \quad (2)$$

其中 dU_i 为 $SU(2)$ 群的 Haar 测度。我们取玻尔兹曼因子为

$$\frac{\beta}{2} S = \frac{\beta}{4} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^\dagger) \quad (3)$$

\sum_p 表示对空间所有 plaquette 求和。在拉氏形式格点理论中,上式为标准的 Wilson 作用量^[9];在哈氏形式中,(3)式定义的 $\exp\left(\frac{\beta}{2} S\right)$ 近似为纯规范场基态函数的绝对值平方^[10] (对 3+1 维的 $SU(N)$ 规范场,可以证明此函数是一个具有正确经典连续极限的 Hamiltonian 的严格基态^[11])。

在二维空间 $SU(2)$ 的情形下,(2)式可准确积出来:

$$\omega(c) = 2(I_2(2\beta)/I_1(2\beta))^4 \quad (4)$$

其中 I_n 为虚宗量 Bessel 函数, A 为 c 所张的最小面积。此处已设链变量取群的基础表示。

(2) 式在三维空间的积分需借助 Monte Carlo (MC) 方法。具体到 $SU(2)$, 某条链上的群元素 U_i 在其环境固定的情况下,以下面的几率出现:

$$P_c(U_i) \sim \exp\left(\frac{\beta}{2} \text{Tr}(\tilde{U} \cdot U_i)\right) \cdot dU_i \quad (5)$$

\tilde{U} 由同 U_i 一起构成 plaquette 的群元素决定(见图 1)

$$\tilde{U} = U_{\pi_1} + U_{\pi_2} + U_{\pi_3} + U_{\pi_4} = kU \quad (6)$$

其中 U_{π_i} 为 plaquette U_p 中除链 U_i 外其它三条链的乘积; $k = (\det(\tilde{U}))^{1/2}$, $U \in SU(2)$ 。作变换 $U'_i = U \cdot U_i$ 并将 U'_i 参数化为 $U'_i = a_0 + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $a_0 \cdot a_i (i=1, 2, 3)$ 均为实数且满足 $a_0^2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1$ 。由此可将(5)式化为

$$P_c(a_0) \sim \sqrt{1 - a_0^2} \exp(k\beta a_0) da_0, \quad a_0 \in [-1, 1] \quad (7)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在半径为 $\sqrt{1 - a_0^2}$ 的三维球面上随机取值。按上式给出的几率获得一个 U'_i , 作逆变换 $U_i = U^{-1}U'_i$ 后取作更新后的链变量, 此即 Creutz 的 heat bath 方法^[6]。但这意味着需求出下述积分的逆:

$$x = \frac{1}{z} \int_{-1}^{a_0} \sqrt{1 - t^2} \exp(k\beta t) dt \quad (8)$$

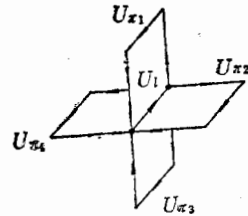


图 1

$$z = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \exp(k\beta t) dt = I_1(k\beta) \quad (9)$$

这是一件很耗时间的工作。Deng 引进的技巧^[8]是先以近似的几率 $P_s(a_0)$:

$$P_s(a_0) = \sqrt{1-a_0^2} \exp(\bar{k}\beta a_0) da_0 \quad (10)$$

获取 a'_0 (其中 \bar{k} 是与组态无关的参数,可调整它使接受率最大),然后用 Metropolis 方法按几率

$$\min(1, P_s(a'_0) \cdot P_s(a_0) / (P_s(a_0) \cdot P_s(a'_0))) \quad (11)$$

决定 a'_0 是否被接受。易证只要 P_s 与 a_0 无关,以上步骤产生的组态跃迁就满足细致平衡条件。应用线性内插法可造出一个近似于下式的逆的表 $a_0 = f(x)$:

$$x = \frac{1}{I_1(\bar{k}\beta)} \int_{-1}^{a_0} \sqrt{1-t^2} \exp(\bar{k}\beta t) dt \quad (12)$$

使

$$\int_{-1}^{f(x)} \sqrt{1-t^2} \exp(\bar{k}\beta t) dt / I_1(\bar{k}\beta) = x \quad (13)$$

取 x 为 $[0, 1)$ 间均匀分布的随机数,经过表 $f(x)$ 变换的随机数 a_0 即可作为 (11) 式中的 a'_0 。

Deng 的 MC 叠代方法在叠代次数一样的情况下,效率接近 heat bath 方法而所需机时却与 Metropolis 方法差不多。在叠代次数足够大以后,可以认为组态以几率密度 $\sim \exp\left(\frac{\beta}{2} S\right)$ 出现而与初态无关,即达到平衡。在平衡态中测量各种 Wilson 圈,然后作

算术平均便得到场论中真空平均值的近似值。

当需要计算大量 Wilson 圈时,花在测量上的机时也是相当可观的。为了压缩这个时间,应该在测量 Wilson 圈时最大限度地减少群元素相乘的次数。此处,我们引进一种递进算法。

将每个 plaquette 连同组态一起记录下来。一个大于 1×1 的 Wilson 圈可表为比它小的一个 Wilson 圈经相似变换后与另一个 Wilson 圈的乘积 (见图 2)。

当这些 Wilson 圈由小到大按顺序计算时,每个圈只需作一次相似变换和一次群乘法。对 $SU(2)$ 群,乘法 $g_m = g_1 \cdot g_2$ 和相似变换 $g_{i,i} = g^+ g' g$ 参数化后分别为

$$\begin{cases} g_m^0 = g_1^0 g_2^0 - \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \\ g_m^i = g_1^i g_2^0 + g_1^0 g_2^i - f_{ijk} g_1^j g_2^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (14)$$

和

$$\begin{cases} g_{i,i}^0 = g^{0'} \\ g_{i,i}^i = 2(g^0(g^0 g^{i'} + f_{ijk} g^j g^{k'}) + \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}') - g^{i'}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (15)$$

以上两式共有浮点乘法 37 个,加法 16 个。而通常的测量大于 $|x|$ 矩形 Wilson 圈的方法需做四次以上的群乘法,即 64 次浮点乘法和 28 次加法。可见我们的方法可节省三分之一以上的测量时间。

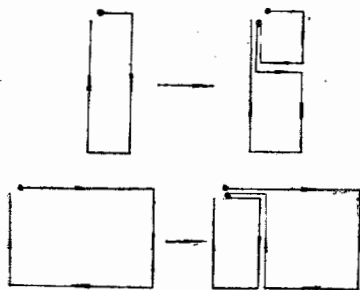


图 2

三、结 果

图3中实线为二维空间 $SU(2)$ 的准确结果, 粗点为 8×8 点阵上 $SU(2)$ 的 MC 结果, “+”号为 12×12 点阵上 Y_{120} 的 MC 结果. $SU(2)$ 的 MC 结果在整个计算范围内与准确结果吻合得很好, Y_{120} 的结果在 $\beta/4 \geq 3$ 以后逐渐偏离准确值. MC 的统计误差在图上已很难看见.

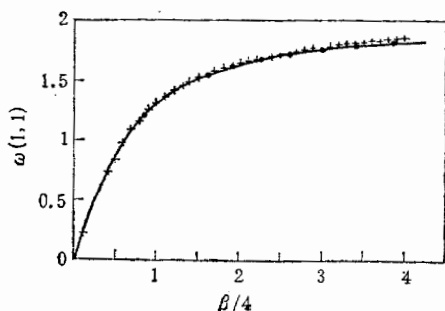


图 3

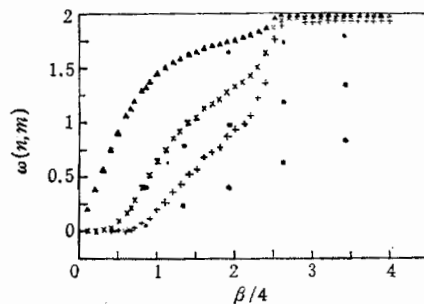


图4 “▲、×、+”分别为 1×1 、 2×2 、 3×3 的 Y_{120} 分立群的 Wilson 圈. 圆点为 $SU(2)$ 的相应结果

在三维空间情形, Y_{120} 在 $\beta/4 \sim 1.33$ 便明显偏离 $SU(2)$ 的 MC 结果; 当 $\beta/4 \sim 2.35$ 时, 分立群 Y_{120} 被冻结在单位群元素上, 分立子群近似完全失效 (见图4). 表1列出了两种尺寸的三维点阵的一些 Wilson 圈平均值数据. 两组数据的偏差在 10% 之内. 除了有限点阵效应外, 造成此偏差的另一因素是叠代次数的不同 (见表2). 我们的结果和文献[4](1984)的结果在表3中作了比较. 虽然[4]的 MC 模拟采用了比我们大一倍多的点阵, 叠代次数也大很多(4000—6000次叠代), 但他们的结果和我们用 Y_{120} 模拟得

表1 三维空间 $SU(2)$ 群的 Wilson 圈平均值

点 阵	$10 \times 10 \times 10$			$6 \times 6 \times 6$		
	β					
$\omega(n \times n)$	5.33	7.68	10.45	5.33	7.68	10.45
1×1	1.5651 (9)	1.646 (3)	1.7293 (3)	1.60	1.73	1.80
2×2	0.778 (5)	0.967 (2)	1.1725 (9)	0.84	0.98	1.33
3×3	0.242 (8)	0.410 (7)	0.63 (2)		0.41	

括号内的数字为最后一位的统计误差.

表2 叠代次数与点阵

	总叠代次数	点阵	起动方式
$SU(2)$	1000(800)	8×8	冷起动
Y_{120}	360(200)	12×12	热起动, 降温
$SU(2)$	780(200)	$10 \times 10 \times 10$	冷起动; 以前一点的第250个组态为初态
Y_{120}	250(50)	$6 \times 6 \times 6$	
	150(50)	$8 \times 8 \times 8$	热起动, 降温

括号内的数字为预热叠代次数.

表3 三维空间的 Wilson 圈平均值

		$\beta = 5$				$\beta = 5.5$			
		1×1	2×2	3×3	4×4	1×1	2×2	3×3	4×4
$SU(2)$	$10 \times 10 \times 10$	1.53	0.70	0.20	0.00	1.56	0.78	0.25	0.00
Y_{120}	$8 \times 8 \times 8$	1.56	0.88	0.39		1.59	0.98	0.47	
Y_{120}^*	$16 \times 16 \times 32$		0.8758 (8)	0.380 (1)	0.132 (1)		0.968 (1)	0.472 (2)	0.194 (2)
		$\beta = 6$				$\beta = 6.5$			
		1×1	2×2	3×3	4×4	1×1	2×2	3×3	4×4
$SU(2)$	$10 \times 10 \times 10$	1.59	0.84	0.30	0.03	1.61	0.88	0.33	0.05
Y_{120}	$8 \times 8 \times 8$	1.64	1.03	0.58		1.67	1.14	0.67	
Y_{120}^*	$16 \times 16 \times 32$			0.560 (2)	0.259 (2)		1.1228 (8)	0.645 (2)	0.327 (2)

Y_{120}^* 栏的数据引自[4], 括号内的数字为最后一位的统计误差.

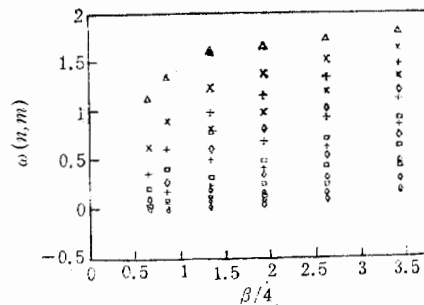


图 5

到的结果并没有很大的差别, 然而跟我们用 $SU(2)$ 算出的结果却有严重的偏离.

图 5 标出三维空间边长 ≤ 5 的 $n \times m$ 的 Wilson 圈 $\omega(n, m)$ 值, 三角形、交叉、十

字、小方和菱形分别对应 $n = 1, 2, 3, 4, 5$, 而 m 是从小到大自上而下排列的.

本文作者之一曾和 Y. F. Deng 进行有益的讨论, 致谢.

参 考 文 献

- [1] J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 395;
J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 659.
- [2] J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775;
Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., "Exact ground state, mass gap, and string tension in lattice gauge theory", submitted to *Phys. Rev.*;
H. Arisue, M. Kato and T. Fujiwara, *Progr. of Theor. Phys.*, **70**(1983), 229.
- [3] A. Linde, *Rep. Progr. Phys.*, **42**(1979), 389; *Phys. Lett.*, **B96**(1980), 289;
E. Shuryak, *Phys. Rep.*, **61**(1980), 71, and references therein;
K. Farakos, G. Koutsoumbas and S. Sarantakos, *Phys. Lett.*, **B189**(1987), 173.
- [4] J. Ambjorn, P. Olesen and C. Peterson, *Nucl. Phys.*, **B244**(1984), 262.
J. Ambjorn, A. J. G. Hey and S. Otto, *Nucl. Phys.*, **B210**(1982), 347.
- [5] N. Metropolis et al., *J. Chem. Phys.*, **21**(1953), 1087.
- [6] M. Creutz, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2038; *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 553.
- [7] N. Cabibbo and E. Marinari, *Phys. Lett.*, **B119**(1982), 387;
A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, Santa Barbara Preprint NSF-ITP-8507.
- [8] Y. F. Deng, CCAST (WORLD LABORATORY) Symposium/Workshop Proceedings, Vol. 1, Ed. by X.-Y. Li, Z.-M. Qiu and H.-C. Ren, 419-447.
- [9] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D14**(1974), 2455.
- [10] to see [2] H. Arisue et al.
- [11] 郑维宏, 刘金明, 郭硕鸿, *高能物理与核物理*, **1**(1988), 134.

THE WILSON LOOP EXPECTATION VALUES IN 2-AND 3-DIMENSIONAL $SU(2)$ LGT

LI ZHIBING ZHENG WEIHONG GUO SHUOHONG

(Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

An improved Monte Carlo scheme is applied to the computation of the expectation values of $n \times m$ Wilson loops in both 2-and 3-dimensional $SU(2)$ lattice gauge theories. The results are compared with those simulated by the discrete group Y_{120} and the exact results in two dimensions.