第 13 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 5
1989 年 5 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS May, 1989

# 关于玻色弦的几何量子化(1)

虞 跃
(中国科学院高能物理研究所，北京)

郭 汉 英
(中国科学院理论物理研究所，北京)

**摘 要**

本文讨论玻色弦的几何量子化. 我们给出不同极化之间的关系和算子在不同极化中的表示. 本文指出，预量子化的 Hilbert 空间是共形变换群的么正表示，Virasoro 代数没有中心项. 但这个表示是可约的. 极化把这个么正表示约化为两个具有反号相因子的投影表示,从而得到共形反常. 因此,从几何量子化的观点来看,由于量子力学要求满足测不准原理,所以必须引入极化，而共形变换的生成元不能保持同一极化,从而引起共形反常.

## 一、引 言

玻色弦的正则量子化早已被人们所了解[1]. 我们知道，经典的玻色弦具有共形不变性. 但是,在量子化后这种不变性被破坏. 最近，有些作者用几何量子化[2,3]的方法对弦的量子化作了一些讨论[4]，并且证明 Virasoro 代数的反常项就是 Diff $S^1/S^1$ 上的全纯 Fock 丛的 Ricci 张量. 然而由于扣除了模展开的零模,就难以对弦给出完整的描述. 在我们现在的文章中,零模仍将被保留. 这样,弦可以作为有无穷多个第一类约束的经典体系. 我们讨论这个体系的几何量子化. 我们证明，不仅正则量子化的结果可由几何量子化同样地给出,而且用几何量子化程序,共形反常是如何出现的被描述得更清楚. 预量子化 Hilbert 空间 $H_p$ 是共形群没有反常的么正表示. 对 $H_p$ 作不同的极化则得不同的量子态 Hilbert 空间. 我们发现，$H_p$ 可以写成某两个物理上不等价的 Hilbert 空间的直积,他们分别由不同的极化得到且都是共形群的投影表示,具有相反符号的相因子，即 Virasoro 代数具有反号的中心项,并且其中一个是弦的 Hilbert 空间，另一个则不是.

这篇文章分为以下几节：第二节，我们简要回顾一下几何量子化. 第三节讨论玻色开弦的辛结构和预量子化. 第四节我们给出了四种常用的极化和相应的 Hilbert 空间，并且指出非零模取 Kähler 极化得到的 Hilbert 空间才是弦的量子态空间. 我们还研究了不同的极化和 Hilbert 空间之间的变换关系. 第五节我们研究两种物理上不等价的极化下 Virasoro 代数的反常并讨论了引起反常的原因. 第六节是通过一个 $U(1)$ 规范变换把第五节的结果变为更为熟悉的形式,从而得到与通常正则量子化完全一致的Hilbert空间. 第七节我们把对开弦的讨论推广到闭弦情况. 第八节是结论和讨论.

## 二、几何量子化简介[2,3]

经典力学完全可以用辛几何语言来描写. 若 $\Gamma$ 是一个 $2n$ 维流形, $\omega$ 是 $\Gamma$ 上的辛形式,且满足

$$d\omega = 0 \tag{2.1}$$

和

$$i_X\omega = 0 \Longleftrightarrow X = 0,\ X \in T\Gamma \tag{2.2}$$

满足(2.1)和(2.2)的流形 $(\Gamma,\omega)$ 称为辛流形. 经典力学的全部内容可由此给出. $\Gamma$ 即是相空间.

设 $f$ 是 $\Gamma$ 上的 $C^\infty$ 函数,由(2.2),可唯一地定义一个 $f$ 对应的 Hamilton 矢量场:

$$df = -i_{X_f}\omega \tag{2.3}$$

对于任意 $f,g \in C^\infty(\Gamma)$, 他们的 Poisson 括号定义为

$$\{f,g\} = -\omega(X_f,X_g) \tag{2.4}$$

用局域语言,设 $(q^i,p_i)\in\Gamma, i=1,\cdots,n$, 则

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \tag{2.5}$$

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{2.6}$$

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{2.7}$$

如果 $(q^i(t),p^i(t))$ 是 $X_f$ 的积分曲线,当且仅当

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial f}{\partial p_i}(t), \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial f}{\partial q^i}(t) \tag{2.8}$$

这时, $f$ 就是这个体系的哈密顿量. (2.8)正是熟知的哈密顿正则方程.

在几何量子化中,对 $(\Gamma,\omega)$ 的量子化分为两步: 第一,建立一个与 Poisson 代数同构的算子代数

$$[\hat{O}_f,\hat{O}_g] = \hat{O}_{\{f,g\}} \tag{2.9a}$$

$$f = 1 \Rightarrow \hat{O}_f = id. \tag{2.9b}$$

$\hat{O}_f$ 的表示空间称为预量子化 Hilbert 空间 $H_p$. 第二,任意 $\psi\in H_p$ 还是独立变量$(q^i,p_i)$的函数,因此,在 $H_p$,测不准原理被破坏. 为了建立一个量子理论需要引入一个极化, 以最终得到量子化的算子代数和 Hilbert 空间.

预量子化 Hilbert 空间 $H_p$ 可以用 $\Gamma$ 上的复线丛 $E$ 的截面空间来描述. 与 $E$ 相伴随的主丛即是 $\Gamma$ 上的 $U(1)$ 主丛 $P$. 这时, $E$ 的截面空间 $\{\psi\}$ 相当于一个带荷 $-i$ 的 $U(1)$ Higgs 场,而 $P$ 上的连络就是 $U(1)$ 规范场. 当连络 $\theta$ 由(2.11)给出时

$$\omega = d\theta \tag{2.10}$$

则 $\{\psi\} = H_p$. 这时若 $\theta$ 有一个规范变换

$$\theta \to \theta + d\Lambda \tag{2.11}$$

则

$$\psi \to \psi e^{i\Lambda} \tag{2.12}$$

$X_f$ 方向的协变导数是

$$\nabla_{X_f} = X_f - i\theta(X_f) \tag{2.13}$$

$\omega$ 则是主丛 $P$ 上的曲率 2 形式

$$[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} = -i\omega(X,Y) \tag{2.14}$$

满足(2.9)的算子可以用 $\nabla_{X_f}$ 来构造

$$\hat{O}_f = -i\nabla_{X_f} + f \tag{2.15}$$

因此，$\hat{O}_f$ 就是 $f$ 的预量子化算子．为了得到一个满足测不准原理的量子力学，我们还必须引入一个极化来限制 $H_p$ 中过多的自由度．

为了方便，我们讨论 $\Gamma$ 是拓扑平庸的情况．这时，极化就是直接对 $\psi$ 作限制[2]．所谓极化，在 $\Gamma$ 是平庸的时，就是引入一个 $\Gamma$ 上的 Lagrange 分布 $F$，它满足

$$[F,F] \subseteq F; \omega(X,Y) = 0,\ \forall X,Y \in F$$

和

$$\dim F = \frac{1}{2}\dim\Gamma \tag{2.16}$$

量子态定义为 $H_p$ 中那些沿 $F$ 是协变常数的态，记量子态的 Hilbert 空间为 $H_F$，则

$$H_F = \{\psi \in H_p \mid \nabla_X\psi = 0,\ \forall X \in F\} \tag{2.17}$$

这时，$H_F$ 是平方可积的，即对 $\psi, \phi \in H_F$

$$(\psi, \phi) = \int \det\omega\, \bar{\psi}\phi \tag{2.18}$$

是有很好定义的．在取极化 $F$ 后，若 $\hat{O}_f$ 保 $F$，即

$$[X_f, e^i] = \sum_{j=1}^{n} a_j^i e^j \tag{2.19}$$

其中 $e^i, i = 1, \cdots, n$ 是 $F$ 的一组基，则量子化后的算子是

$$\hat{O}_f^F = \hat{O}_f - \frac{1}{2} i \sum_{i=1}^{n} a_i^i \tag{2.20}$$

当 $\hat{O}_f$ 不保 $F$ 时，就需要研究 BKS 核问题[2]．若 $\hat{O}_f$ 保 $F'$ 而不保 $F$，则

$$\hat{O}^F = U_{FF'}\hat{O}_f^{F'}U_{F'F} \tag{2.21}$$

其中 $U_{FF'}: H_{F'} \to H_F$． 若 $U_{FF'}$ 是么正的，则 $F$ 与 $F'$ 的关系是么正关系，$\hat{O}_f^F$ 是一个么正算子，$H_F$ 与 $H_{F'}$ 描述等价的量子力学系统．若 $U_{FF'}$ 不么正，则 $F'$ 称之为辅助极化[2]，$H_F$ 与 $H_{F'}$ 在物理上不等价，$\hat{O}_f^F$ 一般也非么正．

如果经典力学体系有第一类约束：

$$\begin{aligned} &\varphi^\alpha(q,p) = 0,\ \alpha = 1, \cdots, m, m < 2n \\ &\{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\} = C_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\gamma \end{aligned} \tag{2.22}$$

则量子化后约束是

$$\hat{O}_{\varphi^\alpha}\psi = 0,\ \psi \in H_F \tag{2.23}$$

这时，$F$ 必须满足相容性条件[5]

$$[\hat{O}_{\varphi^\alpha}, \nabla_X]\phi = 0, \ \forall X \in F \tag{2.24}$$

## 三、玻色开弦的辛几何和预量子化

玻色开弦的相空间 $\Gamma$ 可用座标 $(q^\mu(\sigma), p^\mu(\sigma))$, $\sigma \in [0, \pi]$, $q^{\mu\prime}(0) = q^{\mu\prime}(\pi) = 0$, $p^{\mu\prime}(0) = p^{\mu\prime}(\pi) = 0$, $\mu = 1, \cdots, d-1$,描述. 辛形式是

$$\omega = \int_0^\pi d\sigma dp^\mu \wedge dq_\mu \tag{3.1}$$

$f$ 是 $\Gamma$ 上的 $C^\infty$ 函数,则

$$X_f = \int_0^\pi d\sigma \frac{\partial f}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu} - \frac{\partial f}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial p^\mu} \tag{3.2}$$

取 $(q(\sigma), p(\sigma))$ 的傅立叶展开

$$q(\sigma) = q_0 + \sum_{m \neq 0} \frac{i}{m}\alpha_m \cos m\sigma$$

$$p(\sigma) = p_0 + \sum_{m \neq 0} \alpha_m \cos m\sigma \tag{3.3}$$

约束是

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m = 0, n = 0, \pm 1, \cdots \tag{3.4}$$

若定义

$$z_n = \bar{\alpha}_n/\sqrt{n}, \bar{z}_n = \alpha_n/\sqrt{n}, n > 0, \tag{3.5}$$

则用振子形式写出的 $\omega$, $X_f$ 和 Poisson 括号是

$$\omega = dp_0 \wedge dq_0 + i\sum_{n>0} dz_n \wedge d\bar{z}_n \tag{3.6a}$$

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial q_0}\frac{\partial}{\partial p_0} + i\sum_{n>0}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n}\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \tag{3.6b}$$

$$\{f, g\} = -X_f g = X_g f \tag{3.6c}$$

这时,(3.4)满足共形代数

$$\{L_n, L_m\} = (n-m)L_{n+m} \tag{3.7}$$

这说明约束(3.4)是第一类的. 在定义(3.5)下,(3.4)写成

$$L_0 = -\frac{1}{2}p_0^2 - \sum_{n>0} m z_m \bar{z}_m$$

$$L_n = -\sqrt{n}\ p_0 \bar{z}_n - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,\bar{z}_{n-m}\bar{z}_m - \sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,\bar{z}_m z_{m-n}, n > 0$$

$$L_{-n} = -\sqrt{n}\ p_0 z_n - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\ z_{n-m} z_m$$

$$-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,z_m\bar{z}_{m-n},\ n>0 \tag{3.8}$$

预量子化的 Hilbert 空间 $H_p$ 就是 $\Gamma$ 上的预量子化线丛的截面空间 $\{\phi(q_0,\ p_0,\ z_n,\ \bar{z}_n)\}$。若取

$$\theta=p_0dq_0+\frac{i}{2}\sum_{n>0}(z_nd\bar{z}_n-\bar{z}_ndz_n) \tag{3.9}$$

则由(2.15)，$L_n$ 的预量子化算子是

$$\hat{O}_{L_0}=p_0i\frac{\partial}{\partial q_0}+\frac{1}{2}p_0^2-\sum_{l>0}\left(lz_l\frac{\partial}{\partial z_l}-l\bar{z}_l\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\right)$$

$$\begin{aligned}\hat{O}_{L_n}=&\,i\sqrt{n}\,\bar{z}_n\nabla_{\partial/\partial q_0}-\sqrt{n}\,p_0\nabla_{\partial/\partial z_n}-\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,\bar{z}_m\nabla_{\partial/\partial z_{n-m}}\\&-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}z_{m-n}\nabla_{\partial/\partial z_m}-\sqrt{n}\,p_0\bar{z}_n\\&-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,\bar{z}_{m-n}\bar{z}_m-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\bar{z}_m\\&\times\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{m-n}}+\frac{1}{2}z_{m-n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{O}_{L_{-n}}=&\,i\sqrt{n}\,z_n\nabla_{\partial/\partial q_0}+\sqrt{n}\,p_0\nabla_{\partial/\partial\bar{z}_n}+\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}z_m\nabla_{\partial/\partial\bar{z}_{n-m}}\\&+\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,\bar{z}_{m-n}\nabla_{\partial/\partial\bar{z}_m}-\sqrt{n}\,p_0z_n\\&-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,z_{n-m}z_m-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}z_m\\&\times\left(\frac{\partial}{\partial z_{m-n}}+\frac{1}{2}\bar{z}_{m-n}\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

可以证明，(3.10) 仍满足共形代数

$$[\hat{O}_{L_n},\hat{O}_{L_m}]=(n-m)\hat{O}_{L_{n+m}},\quad m,n=0,\pm1,\cdots \tag{3.11}$$

这说明预量子化 Hilbert 空间 $H_p$ 是共形代数的幺正表示，共形反常不出现。

## 四、极化和不同极化间的变换

为了得到弦的 Hilbert 空间，我们需要引入极化。下面四种极化是常用的

$$F(1)=\left\{\frac{\partial}{\partial p_0},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\right\},\quad F(2)=\left\{\frac{\partial}{\partial q_0},\ \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$$

$$F(3)=\left\{\frac{\partial}{\partial q_0},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\right\},\quad F(4)=\left\{\frac{\partial}{\partial p_0},\ \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} \tag{4.1}$$

对应的 Hilbert 空间就是

$$\begin{aligned}&H_{F(1)}=\{\Phi^1=e^{-\frac{1}{2}k_0f^1(q_0,z_n)}\}\\&H_{F(2)}=\{\Phi^2=e^{ip_0q_0+\frac{1}{2}k_0f^2(p_0,\bar{z}_n)}\},\ 等等\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $k_0=\sum_{n>0}|z_n|^2$. 以后我们将看到,弦的 Hilbert 空间是 $H_{F(1)}$ 或 $H_{F(3)}$. 现在,我们选取 $H_{F(1)}$.

若预量子化算子保 $F(1)$, 则 $\hat{O}^1_f$ 由 (2.20)给出. 若 $\hat{O}_f$ 不保 $F(1)$, 但保 $F(2)$, 则

$$\hat{O}^1_f=U_{12}\hat{O}^2_f U_{21} \tag{4.3}$$

其中

$$U_{21}=e^{ip_0q_0+\frac{1}{2}k_0}\frac{1}{\sqrt{V}}\int dq'_0\prod_{n=1}dz_n e^{-ip_0\cdot q'_0}$$

$$U_{12}=e^{-\frac{1}{2}k_0}\frac{1}{\sqrt{V}}\int dp_0\prod_{n=1}d\bar{z}_n \tag{4.4}$$

$V$ 是积分的归一化常数. 且可证

$$U_{21}U_{12}=I_2,\quad U_{12}U_{21}=I_1 \tag{4.5}$$

其他一些 $H_{F(i)}$ 之间的变换也可类似地得到. 下面写出几个重要的不保极化的算子.

$$p^1_0=p^4_0=-i\frac{\partial}{\partial q_0}$$

$$z^2_n=z^4_n=-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}+\frac{1}{2}z_n$$

$$\bar{z}^1_n=\bar{z}^3_n=\frac{\partial}{\partial z_n}+\frac{1}{2}\bar{z}_n \tag{4.6}$$

## 五、共形反常和极化

根据上节结果,在 $F(1)$ 和 $F(2)$ 下,

$$\hat{O}^1_{L_0}=-\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)^2-\sum_{l>0}lz_l\left(\frac{\partial}{\partial z_l}+\frac{1}{2}\bar{z}_l\right)+\beta$$

$$\begin{aligned}\hat{O}^1_{L_n}=&-\sqrt{n}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_n}+\frac{1}{2}\bar{z}_n\right)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\\&\times\left(\frac{\partial}{\partial z_m}+\frac{1}{2}\bar{z}_m\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-m}}+\frac{1}{2}\bar{z}_{n-m}\right)-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\\&\times z_m\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-m}}+\frac{1}{2}\bar{z}_{n-m}\right),\quad n>0\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{O}^1_{L_{-n}}=&-\sqrt{n}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)z_n-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,z_{n-m}z_m\\&-\sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,z_m\left(\frac{\partial}{\partial z_{m-n}}+\frac{1}{2}\bar{z}_{m-n}\right),\quad n>0.\end{aligned}$$

其中 $\beta$ 是(2.21)右边的第二项的贡献.

$$\hat{O}^2_{L_n}=\hat{O}^1_{L_n}\left(\beta\to-\beta,\ -i\frac{\partial}{\partial q_0}\to p_0,\ z_n\to\bar{z}_n,\ \frac{\partial}{\partial z_n}+\frac{1}{2}\bar{z}_n\to-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\right.$$

$$+\frac{1}{2}z_n\Big),\quad n=0,\ \pm1,\cdots \tag{5.2}$$

计算对易关系，立刻发现

$$[\hat{O}^i_{L_n},\hat{O}^i_{L_m}]=(n-m)\hat{O}^i_{L_{n+m}}+(-)^{i+1}\left(\frac{d}{12}n^3-\beta n\right)\delta_{m+n,0} \tag{5.3}$$

显然，$H_{F(1)}\otimes H_{F(2)}$ 与 $H_p$ 同构，因此若定义

$$\hat{O}'_{L_n}=\hat{O}^1_{L_n}\oplus\hat{O}^2_{L_n},\quad n=0,\pm1,\cdots, \tag{5.4}$$

则从(5.3)可得

$$[\hat{O}'_{L_n},\ \hat{O}'_{L_m}]=(n-m)\hat{O}'_{L_{n+m}} \tag{5.5}$$

所以，$\{\hat{O}'_{L_n}\}$ 给出了预量子化算子代数的另一个表示．由此可以看到，预量子化算子代数可表示为通过不等价的极化被分解出来的两个具有反号中心项的算子代数的直和．当我们舍弃其中一个时，反常就出现了．因此，反常的原因在于量子态要求满足测不准原理而要引入极化，但共形变换的生成元不能保同一个极化，从而导致了反常．

## 六、玻色开弦的量子态 Hilbert 空间

为了得到与正则量子化一致的结果，我们对 $H_{F(i)},i=1,2$ 作 $U(1)$ 规范变换

$$\begin{aligned}&\theta\to\theta+(-)^i d(ik_0/2)\\&\Phi^i\to(f^1(q_0,\ z_n),\ f^2(p_0,\bar{z}_n))\end{aligned} \tag{6.1}$$

这时，$\hat{O}^1_{L_n}$ 和 $\hat{O}^2_{L_n}$ 变为

$$\begin{aligned}\hat{L}_n(1)&=\hat{O}^1_{L_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}+\frac{1}{2}\bar{z}_n\to\frac{\partial}{\partial z_n}\right)\\ \hat{L}_n(2)&=\hat{O}^2_{L_n}\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}+\frac{1}{2}z_n\to-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

若定义

$$\begin{aligned}&\hat{\alpha}_m=\sqrt{m}\,\frac{\partial}{\partial z_m},\quad \hat{\alpha}^+_m=\sqrt{m}\,z_m\\&\hat{\beta}_m=\sqrt{m}\,\bar{z}_m,\quad \hat{\beta}^+_m=\sqrt{m}\,\frac{\partial}{\partial\bar{z}_m}\end{aligned} \tag{6.3}$$

则 $\hat{L}_n(i)$ 即是正则量子化中熟知的形式，$\hat{\alpha}^+_m(\hat{\beta}^+_m)$ 是产生算子，$\hat{\alpha}_m(\hat{\beta}_m)$ 是消灭算子．而 $\{\hat{L}_n(i)\}$ 也满足对易关系(5.3)，具有反号的反常项． 若作 $f^1\otimes f^2$，则正好给出 $H_p$，而 $\hat{L}_n=\hat{L}_n(1)\oplus\hat{L}_n(2)$ 则给出预量子化共形代数的又一个表示，没有反常． 由(6.3)定义的产生消灭算子可以看出，$\{f^1(q_0,z_n)\}$ 给出了弦的正能态，而 $\{f^2(p_0,\bar{z}_n)\}$ 的谱无下界，给出负能态． 因此， 物理态由所有独立的经典约束 $L_n=0,\ n\geqslant0$ 量子化后作用在 $\{f(q_0,z_n)\}$ 上得到：

$$\mathscr{H}=\{|\text{phys.}\rangle\}=\{f\in\{f(q_0,z_n)\}|(\hat{L}_n(1)-\beta\delta_{n,0})f=0\} \tag{6.4}$$

由于 $\hat{L}_n(1)$ 与 $\left(\frac{\partial}{\partial p_0},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\right)$ 可对易．因此，(6.4)中的量子化的约束与极化是相容的，不给出新的约束．(6.4) 给出的 Hilbert 空间正是通常用正则量子化方法得到的物理态空

间.

## 七、玻色闭弦情况

对玻色闭弦,相空间 $\Gamma$ 与开弦的比较,唯一不同的是边界条件:

$$q^\mu(\sigma) = q^\mu(\sigma + 2\pi),\ \ p^\mu(\sigma) = p^\mu(\sigma + 2\pi) \tag{7.1}$$

辛形式是

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\sigma dp^\mu \wedge dq_\mu \tag{7.2}$$

$q$, $p$ 的傅立叶展开可以分解为独立时左、右运动两部分. 若 $\alpha^\mu_{Hn}, \alpha^\mu_{Hn}$, $H = R, L$,是左、右运动的模,则定义

$$z^\mu_{Hn} = \bar{\alpha}^\mu_{Hn}/\sqrt{n},\ \ \bar{z}^\mu_{Hn} = \alpha^\mu_{Hn}/\sqrt{n}, n > 0, H = R, L \tag{7.3}$$

这时,辛形式,哈密顿矢量场和 Poisson 括号定义为:

$$\omega = dp_0 \wedge dq_0 + i \sum_{\substack{H=L,R\\ n>0}} dz_{Hn} \wedge d\bar{z}_{Hn} \tag{7.4a}$$

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial q_0}\frac{\partial}{\partial p_0} + i \sum_{\substack{H=L,R\\ n>0}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{Hn}}\frac{\partial}{\partial z_{Hn}} - \frac{\partial f}{\partial z_{Hn}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{Hn}}\right) \tag{7.4b}$$

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g) = -X_f g = X_g f \tag{7.4c}$$

这时,经典的约束满足共形代数

$$L^H_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{Hn}\alpha_{Hn-m} = 0, H = L, R \tag{7.5}$$

和

$$\{L^H_n, L^{H'}_n\} = (n - m)L^H_{n+m}\delta_{HH'} \tag{7.6}$$

相空间 $\Gamma$ 可用局域坐标 $(q_0, p_0, z_{Hn}, \bar{z}_{Hn})$, $n > 0$, $H = R, L$. 预量子化 Hilbert 空间是

$$\begin{aligned} H_p &= \{\psi(q_0, p_0, z_{Hn}, \bar{z}_{Hn})\} \\ &= H^R_p \otimes H^L_p \\ &= \{\psi^R(q_0, p_0, z_{Rn}, \bar{z}_{Rn}) \otimes \psi^L(q_0, p_0, z_{Ln}, \bar{z}_{Ln})\} \end{aligned} \tag{7.7}$$

取

$$\theta = p_0 dq_0 + \frac{i}{2}\sum_{\substack{H=L,R\\ n>0}} (z_{Hn}d\bar{z}_{Hn} - \bar{z}_{Hn}dz_{Hn})$$

$$\omega = d\theta \tag{7.8}$$

则

$$\hat{O}_f = -iX_f - \theta(X_f) + f \tag{7.9}$$

从(7.4)到(7.9)可以看出,对于一个力学量 $f$, 若 $f$ 是左、右退耦合的,则 $\hat{O}_f$ 也是左右退耦合的. 例如 $L^H_n$ 是左、右退耦合的, 则 $\hat{O}_{L^H_n}$ 也完全可以用类似于(3.10)的形式给出. 作与开弦完全类似的讨论,结果发现开弦的 Hilbert 空间与正则量子化给出的结果是一致的

$$\mathscr{H} = \{|\text{phys.}\rangle\} = \{f \in \{f^1(q_0, z_{nR}, z_{nL})\} | \hat{L}_n^H(1)f = 0, n > 0, H = L、R;$$
$$(\hat{L}_0^R(1) - \hat{L}_0^L(1))f = 0; (\hat{L}_0^R(1) + \hat{L}_0^L(1) - (\beta^R + \beta^L))f = 0\} \tag{7.10}$$

其中 $\hat{L}_n^H(1)$, $n = 0, \pm 1, \cdots$, 的形式与(6.2)完全类似. Virasoro 代数是有反常的.

## 八、讨　论

在前几节,我们研究了玻色弦的几何量子化, 得到了与通常正则量子化一致的结果. 并且从几何量子化的观点解释了反常出现的原因. 如果在我们对开弦的讨论中去掉零模 $(p_0, q_0)$, 则与参考文献[4]所得的结果只差一个微分同胚. 事实上,在我们下一篇文章中将可以看到,文献[4]中圈空间的辛结构和复结构可以看作相空间的辛结构和复结构诱导的结构. 不过,圈空间所描述的经典力学与相空间去掉零模后的 $[\Gamma]$ 经典力学不完全等价. 一般地说 $[\Gamma]$ 中的解曲线可以给出圈空间的解曲线,反之则不然.

另一个可以考虑的问题是弦的几何量子化结果与弦的共形场论的关系. 粗略地说, 在预量子化 Hilbert 空间 $H_p$, 约束是

$$\hat{O}^F_{L_n}\psi = 0, \ n \geqslant 0, \psi \in H_p \tag{8.1}$$

这表明 $H_p$ 可以表示为一系列最高权为零的 Verma 模空间的集合

$$H_p = \{\psi, \hat{O}^F_{L-n_1} \cdots \hat{O}^F_{L-n_k}\psi, \ n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_k > 0 | \hat{O}^F_{L_n}\psi = 0, \ n \geqslant 0\} \tag{8.2}$$

而 $H_{F(1)}$ 则是最高权为 $\beta$ 的 Verma 模空间的集合

$$H_{F(1)} = \{f(q_0, z_n), \hat{L}^{(1)}_{-n_1} \cdots \hat{L}^{(1)}_{-n_k} f(q_0, z_n), n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_n > 0 |$$
$$(\hat{L}_n(1) - \beta\delta_{n,0}) f(q_0, z_n) = 0\} \tag{8.3}$$

其他的一些联系也可以类似地讨论.

显然,我们在本文中用的方法也可以推广到对 RNS 弦的讨论.

最后,作者感谢陈伟博士和熊传胜同志与我们的有益的讨论.

## 参　考　文　献

[1] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.*, **17**(1975), 123;
P. Goddard and C. B. Thorn, *Phys. Lett.*, **40B**(1972), 235.
[2] J. Sniatycki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics (Springer-Verlag, New York (1980)).
[3] N. J. Woodhouse, Geometric Quantization (Clarendon Press, Oxford, UK (1980)).
[4] M. Bowick and S. G. Rajeev, *Nucl. Phys.*, **B293**(1987), 348; *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 353; MIT preprints CTP **1494**(1987).
D. Harri, D. K. Hong, P. Ramond and V. G. Rodgers, Florida preprints, UFTP-87-10.
[5] M. J. Gotay, J. M. Nester and G. Hinds, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 2388.
M. J. Gotay, *J. Math. Phys.*, **27**(1986), 2051.
A. Ashtekar and M. Stillerman, *J. Math. Phys.*, 27(1986), 1393.

# ON GEOMETRIC QUANTIZATION FOR THE BOSONIC STRINGS (I)

YU YUE

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing*)

GUO HANYING

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing*)

ABSTRACT

The geometric quantization for bosonic strings is discussed in this paper. Relations among different polarizations and representations of operators in different polarizations are given. It is pointed out that the prequantization Hilbert space is the unitary representation of the conformal group where the centre term of Virasoro algebra does not exist but this representation is reducible. By polarization it is reduced into two projective representations with the phase factors with opposite signs. Then the conformal anomaly is obtained. In the viewpoint of geometric quantization, the emergence of the conformal anomaly stems from the fact that polarization is introduced because the quantum states of string must satisfy the uncertainty relation but all generators of conformal transformation don't preserve the same polarization.