

推转壳模型的 CHFB 方法可靠性的探讨

彭剑平 吴崇试 曾谨言
(北京大学)

摘要

在通常感兴趣的角频率范围内 ($\omega \leq 0.5$ MeV) 分别计算了单 j -CSM 哈密顿量 H_{CSM} 的相当精确的低激发态和能谱, 及其在 HFB 近似下的哈密顿量 H'_{CSM} 的低激发态和能谱, 尽管有一部分结果相似(晕带与次晕带发生第一次交叉, 交叉频率值), 但两者存在重大差别, 特别是晕带与次晕带在带交叉附近的性质及带相互作用强度. 因此, CHFB 方法的理论基础需要重新探讨, 这里可能涉及 Coriolis 减弱问题.

一、引言

推转壳模型 (CSM) 首先为 Inglis (1954)^[1] 提出, 在过去十年中被广泛用来分析变形原子核的高自旋态^[2,3], 取得了丰富的成果^[4-6]. CSM 是在同一个框架中对原子核的集体运动和单粒子运动两方面同时加以研究的一种模型^[7]. 在此模型中, 原子核被看成若干核子在具有稳定变形的势场中运动, 而势场本身又以匀角频率 ω 转动. 对于大变形核的基态及低激发态, 有可靠实验证明, 形变是轴对称的. 取对称轴为 z 轴, 则原子核作为一个量子力学体系, 可以绕垂直于对称轴的任何一个轴(例如 x 轴)转动. 对于这样的转动核, 在随原子核转动的参照系中进行理论分析是方便的(在此参照系中单粒子势不显含 i). 在此非惯性参照系中将出现离心力与 Coriolis 力(通常简称 Coriolis 作用), 它对核子的运动(因而对原子核性质)有重要影响, 在高自旋态下尤其如此.

在转动参照系中, CSM 哈密顿量通常表为^[5,6]

$$H_{\text{CSM}} = H_{\text{int},r} - \omega J_r, \quad (1)$$

其中

$$H_{\text{int},r} = H_{sp} + H_P,$$

$-\omega J_r$ 为 Coriolis 作用, H_{sp} 描述单粒子运动, H_P 表示对力. 如采用 H_{sp} 对角化的表象, 则

$$H_{\text{CSM}} = \sum_{\nu>0} \epsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}) - GP^+P - \omega \sum_{\mu\nu} \langle \mu | j_r | \nu \rangle a_\mu^+ a_\nu, \quad (2)$$

其中

$$P^+ = \sum_{\nu>0} a_\nu^+ a_\nu^+$$

μ, ν 标记单粒子态, $\bar{\mu}, \bar{\nu}$ 是相应的时间反演态, ε_ν 是轴对称变形单粒子势中的能级(二重简并), G 为对力强度. CSM 哈密顿量本征值问题通常借助于推广的 Bogoliubov 粒子-准粒子变换来近似求解, 习惯称为 CHFB 方法^[4,7]. 它能说明相当多高自旋态的实验现象(能谱, 带交叉频率, 顺排角动量). 但与此同时, 也有不少人对此理论的严重缺陷提出了批评^[8-10]. 我们认为 CSM 碰到的困难, 有一些是模型本身固有的(例如角动量不守恒), 而有一些则是其处理哈密顿量本征值问题的近似方法带来的. HFB 方法是 BCS 方法的推广, 都引用了粒子-准粒子变换, 并假定准粒子间相互作用可以略去(独立准粒子模型). 这相当于用对场 (pairing potential) $-\frac{\Delta}{2}(P^+ + P) = -\frac{G}{2}\langle P \rangle(P^+ + P)$ 代替 $H_P = -GP^+P$ ^[3]. 此时粒子数不再守恒, 为弥补此缺陷, 在哈密顿量中加进一项 $-\lambda N = -\lambda \sum_{\nu>0} (a_\nu^\dagger a_\nu + a_\bar{\nu}^\dagger a_{\bar{\nu}})$, λ 称为费密能量, 由 $\langle N \rangle = N_0$ (体系粒子数) 确定. 即原来 H_{CSM} 换为

$$H'_{\text{CSM}} = \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda)(a_\nu^\dagger a_\nu + a_\bar{\nu}^\dagger a_{\bar{\nu}}) - \frac{\Delta}{2}(P^+ + P) - \omega \sum_{\mu\nu} \langle \mu | j_z | \nu \rangle a_\mu^\dagger a_\nu, \quad (3)$$

然后通过推广的粒子-准粒子变换把 H'_{CSM} 对角化. 鉴于 CHFB 方法被广泛应用, 成千上万篇文章都建立在其基础上, 因此对它的可靠性应予以认真的对待. 这至少可以使人们在应用它时能清楚地了解到在哪些问题上要特别小心, 以免作出错误的判断.

这种近似方法的可靠性很难从纯理论的角度给出令人信服的论据. 本文将采用不少文章中采用过的单 j -CSM^[8,11,12] 进行具体计算, 以判断 CHFB 方法的可靠性. 我们在保证粒子数守恒的一个足够大的组态空间中把 H_{CSM} 对角化, 以下简称 PNC 方法^[13-18]. 它是求解体系低激发态的足够精确的一个实际可行的方法*关于 CHFB 方法及 H'_{CSM} 的矩阵形式参见文 [5]. 下面第二节给出计算结果及讨论.

二、计算方案及比较的原则

1. 单粒子能级

单 j -CSM 中, 单粒子能级取为^[8,11,12]

$$\varepsilon_{|\Omega|} = \kappa \frac{3\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)} + \varepsilon_0, \quad |\Omega| = 1/2, 3/2, \dots, j. \quad (4)$$

对于稀土变形区, $\kappa \approx 2.5$ MeV. 取 $j = 13/2$, 所以粒子数 $N \leq 14$. 我们对各种粒子数的体系都进行了计算. 下面以其中计算上最复杂的 $N = 6$ 粒子体系作为代表进行讨论.

2. 比较的原则

* 关于 PNC 方法的精确度问题, 要特别注意 PNC 方法中采用了“组态能量截断”方案, 而通常壳模型计算(包括 BCS, HFB 方法)则采用“单粒子能级截断”方案. 对于多粒子系,(特别是对于变形核),无论从理论上,还是从实用上来讲,“组态截断”方案均优于“单粒子能级截断”方案^[14]. 在“组态能量截断”方案下, PNC 方法是完全严格的. 在与“单粒子能级截断”方案下的计算(包括 Richardson 的严格计算结果)进行比较时, 要特别小心, 特别是平均对力强度参数值的取定.

单 j -CSM 中 CHFB 哈密顿量矩阵中有两个参数, 即费密能 λ 和能隙参数 Δ . 为便于比较, 先进行 PNC 计算, 求出低激发谱及其各种性质, 包括晕带的能隙参数 $\tilde{\Delta}(\omega)$ (在 PNC 处理中, 能隙参数应定义为^[19] $\tilde{\Delta} = G\sqrt{\langle P^+P \rangle}$, 在 BCS 或 HFB 近似下, 它与 $\Delta = G\langle P \rangle$ 等价). 根据求出的各单粒子能级的填布几率, 可以求出费米面的位置 $\tilde{\lambda}(\omega)$. 然后以两种方式代入 CHFB 哈密顿矩阵^[3],

(a) λ, Δ 取为常数, $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega = 0)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega = 0)$,

(b) λ, Δ 取为随 ω 变化的参数, $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega)$, 把 CHFB 哈密顿量对角化, 即可求出准粒子态和能级. 由此计算出 6 粒子体系的准粒子激发谱, (详细结果见第三节), 并与 PNC 计算结果比较.

3. PNC 计算

在 PNC 计算中, 为保证结果足够精确, 组态截断能量 E_c 要足够大. 文中给出的主要结果是 $E_c/\kappa = 3.5$ (组态空间维数 $D = 273$), $G/\kappa = 0.15$ 下得出的. 计算表明, 在大家感兴趣的 ω 范围中 ($\omega/\kappa \lesssim 0.20$), 对于晕带和低激发带, 重要(成份 $\geq 1\%$) 的组态数目不到 10%, 并且组态能量都不太高. 为数超过 90% 的其余组态所占权重很小. 我们采用过不同 E_c 进行过计算. 例如取 $E_c/\kappa = 4.5$ (维数 $D = 508$), $G/\kappa = 0.15$ 不变, 结果与此相差的确很小(见图 1-2). 如果再考虑 G 的重整化 (E_c 增大时, G 适当减小), 则计算结果几乎完全相同. (当 $E_c = \infty$ 时, $D = 1225$, 由于计算机限制, 未进行计算). 我们还取不同 G ($G/\kappa = 0.20, 0.15, 0.10, 0$) 进行过计算, 所得结果也很相似(因篇幅限制, 这些结果未予列出). 因此 PNC 得出的结果, 定性上是完全可靠的, 定量上是相当精确的, 可以用来判断 CHFB 计算结果的可靠性.

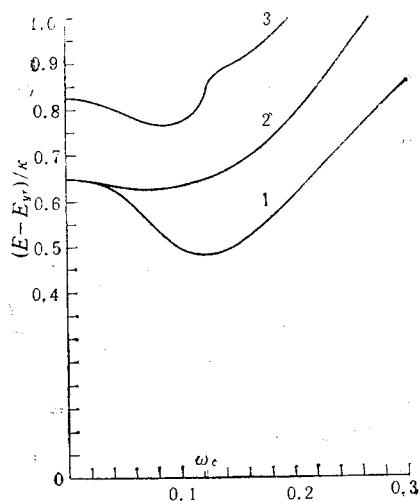


图 1 6 粒子体系的低激发谱,(相对于晕带, signature = +1)
 $E_c/\kappa = 3.5$, $G/\kappa = 0.15$,

于计算机限制, 未进行计算). 我们还取不同 G ($G/\kappa = 0.20, 0.15, 0.10, 0$) 进行过计算, 所得结果也很相似(因篇幅限制, 这些结果未予列出). 因此 PNC 得出的结果, 定性上是完全可靠的, 定量上是相当精确的, 可以用来判断 CHFB 计算结果的可靠性.

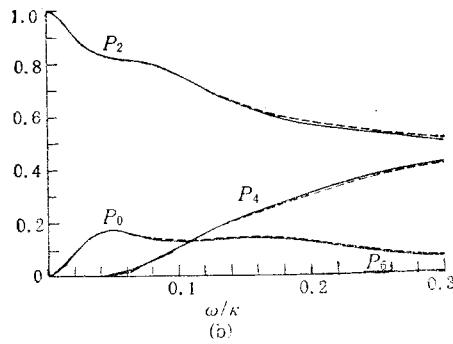
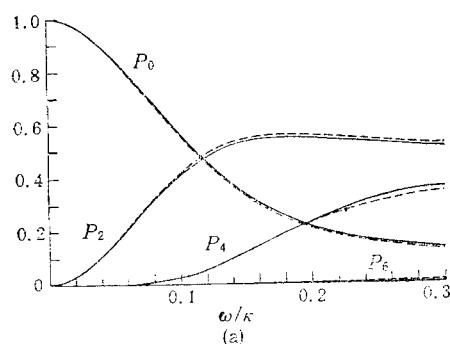


图 2 Seniority 结构. $P_0, P_2, P_4, P_6, \dots$ 分别表示 seniority $v = 0, 2, 4, 6, \dots$ 组态所占比例. (a) 晕带 (b) 次晕带 实线和虚线分别是 $E_c/\kappa = 3.5, G/\kappa = 0.15$ 和 $E_c/\kappa = 4.5, G/\kappa = 0.15$ 的计算结果.

三、计算结果与讨论

$N=6$ 粒子体系 $\text{signature} = +1$ 的几个低激发带的 PNC 计算结果，画于图 1-4 中。

图 1 是最低的三个激发带（相对于晕带）的能谱， $(E - E_{y_r})/\kappa$, $E_c/\kappa = 4.5$ 的结果非常相近。例如晕带与次晕带 (no. 1) 的交叉频率都是 $\omega_c/\kappa \approx 0.12$ ，带相互作用强度 V [定义为 $\frac{1}{2}(E - E_{y_r})_{\min}$] 分别为 0.235κ 和 0.245κ 。这说明 $E/\kappa > 3.5$ 的组态虽然为数众多，但对低激发态影响很小。

图 2 (a) 与 (b) 分别给出晕带与次晕带的 seniority 结构（实线代表 $E_c/\kappa = 3.5$ ，虚线代表 $E_c/\kappa = 4.5$ ）。可看出，只当 $\omega \geq \omega_c$ 后，实线与虚线才有微小差别。对于晕带，当 $\omega = 0$ 时是完全配对态 ($P_0 = 1$)，在 $\omega > \omega_c$ 后，有一对粒子拆散 ($\nu = 2$) 的组态成份增大 ($P_2 > P_0$)。 $\omega/\kappa > 0.2$ 之后，4 粒子拆散的组态成份 (P_4) 已较显著，但直到 $\omega/\kappa \sim 0.3$, P_6, P_8 等都微不足道。对于次晕带，当 $\omega = 0$ 时是一对粒子拆散态 ($P_2 = 1$)， $\omega > \omega_c$ 后， P_2 明显减小 (<70%)， P_0 与 P_4 逐渐增大 (>30%)。

关于晕带的能隙参数 $\tilde{\Delta}$ ，它随 ω 增大而极缓慢地减小^[19]。即使在 seniority 结构发生明显变化时， $\tilde{\Delta}$ 仍变化甚微。有关的讨论见文献 [19]。

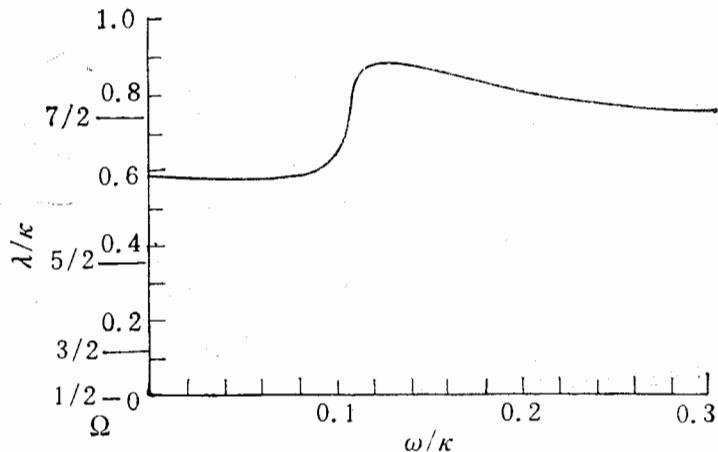


图 3 费密能 $\tilde{\lambda}$ ，实线 ($E_c/\kappa = 3.5$, $G/\kappa = 0.15$) 虚线 ($E_c/\kappa = 4.5$, $G/\kappa = 0.15$)

图 3 是 $\tilde{\lambda}$ 随 ω 的变化。在 $\omega < \omega_c$ 时，6 粒子体系的费密面处于单粒子能级 $|\Omega| = 5/2$ 与 $|\Omega| = 7/2$ 之间。在 $\omega > \omega_c$ 后，由于 Coriolis 作用增强， $|\Omega| = 7/2$ 能级被填布的几率 > 0.5 ，费米面急剧上升到 $|\Omega| = 7/2$ 能级之上。

图 4 是晕带与次晕带的顺排角动量 $\langle J_z \rangle$ 。它们在 $\omega = \omega_c$ 处相等，此时它们的 $\langle J_z \rangle \sim 12\hbar$ 。但应注意，晕带与次晕带的 $\langle J_z \rangle$ 都是稳步上升，并无突然交换性质的跳跃现象，这说明两带之间有强相互作用。到 $\omega/\kappa \sim 0.30$ ，晕带 $\langle J_z \rangle \sim 20\hbar$ ，与 $\langle J_z \rangle_{\max} = 24\hbar$ 已相去不远。还可以看出，取 $E_c/\kappa = 3.5$ 与 4.5 所计算出的 $\langle J_z \rangle$ ，只在 $\omega > \omega_c$ 之

后才略有差别，而 $\langle J_z \rangle - \langle J_z \rangle_{yr}$ 则对 E_c 取值很不敏感。我们也分析过 G 的取值对 $\langle J_z \rangle$ 的影响，发现结果也不敏感（特别是 ω 不太小的情况），例如 $\omega/\kappa = 0.30$ 时，

$$\langle J_z \rangle = \begin{cases} 19.7 & (G=0), \\ 19.4 & (G/\kappa=0.15). \end{cases}$$

以下讨论 CHFB 的计算结果，见图 5-7。这里包括常参数 $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega=0)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega=0)$ 的计算结果和变参数 $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega)$ 的结果。

图 5 (a) 给出准粒子谱。它与文 [5] 中图 2.10 很相似。根据准粒子谱可得出 6 粒子体系的低激发谱（相对于晕带）， $(E' - E'_{yr})/\kappa$ [图 6 (a)] 和顺排角动量 $\langle J_z \rangle$ [图 7 (a)]。晕带与次晕带的准粒子组态变化如下：

	$\omega < \omega_1$	$\omega_1 < \omega < \omega'_2$	$\omega'_2 < \omega < \omega''_2$	$\omega''_2 < \omega < \omega_3$	$\omega > \omega_3$
晕带	$(-a-b-c-d\dots)$	$(ab-c-d\dots)$	$(ab-c-d\dots)$	$(ab-c-d\dots)$	$(abcd\dots)$
基带		s 带	s 带	s 带	4 准粒子带
次晕带	$(ab-c-d\dots)$	$(-a-b-c-d\dots)$	$(-abc-d\dots)$	$(abcd\dots)$	$(ab-c-d\dots)$
	s 带	基带	第二激发带	4 准粒子带	s 带

在 $\omega \simeq \omega_1$ 和 ω_3 处，晕带和次晕带发生两次交叉。在 $\omega \sim \omega'_2$, ω''_2 处次晕带与更高激发带有交叉。在 $\omega \sim \omega_1$ 处（第一次“回弯”），晕带 $\langle J_z \rangle$ 从 $\sim 2\hbar$ 跃变到 $\sim 12\hbar$ ，而次晕带 $\langle J_z \rangle$ 从 $10.5\hbar$ 锐减为 $3.5\hbar$ 。在 $\omega \sim \omega_3$ 处晕带 $\langle J_z \rangle$ 从 $13\hbar$ 跃增为 $\sim 20\hbar$ 。

变参数 λ 和 Δ 的计算与常参数计算结果相比，在 $\omega < \omega_c$ 区域中，两者差别较小（因 $\tilde{\lambda}, \tilde{\Delta}$ 变化不大），但 $\omega > \omega_c$ 之后，呈现明显差异。其主要原因是 $\tilde{\lambda}(\omega)$ 发生了急剧变化，因而各激发带的准粒子组态结构相应发生变化。看来，考虑了 λ 与 Δ 随 ω 变化的计算结果，与 PNC 结果更接近一些。

概括起来，在单 i -CSM 中，CHFB 近似计算与 PNC 精确解之间的异同如下：

相似点：

1) 随 ω 增大，次晕带（相对于晕带）逐渐下降，在 $\omega/\kappa \simeq \omega_c/\kappa \sim 0.1$ 附近，发生第一次交叉。

2) 随 ω 增加，晕带与次晕带的顺排角动量

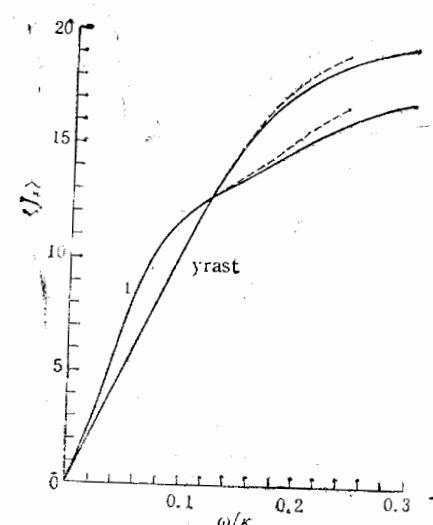


图 4 晕带和次晕带的顺排角动量 $\langle J_z \rangle$

实线 ($E_c/\kappa = 3.5$, $G/\kappa = 0.15$)

虚线 ($E_c/\kappa = 4.5$, $G/\kappa = 0.15$)

$\langle J_z \rangle$ 都逐渐增大。开始时 ($\omega \gtrsim 0$)，激发带 $\langle J_z \rangle$ 增加较快（次晕带 $\langle J_z \rangle$ 大于晕带），后来逐渐减慢，在 $\omega \sim \omega_c$ 处，晕带与次晕带发生交叉（次晕带 $\langle J_z \rangle$ 小于晕带）。

不同点：

1) 在 $\omega \sim \omega_c$ 附近，CHFB 计算所得的晕带与次晕带的 $\langle J_z \rangle$ 急剧变化，彼此交换性质。在 PNC 精确解中无此现象， $\langle J_z \rangle$ 都稳步上升。

2) 与此相应，在 $\omega \sim \omega_c$ 附近，CHFB 给出的晕带与次晕带相互作用很小， $V/\kappa \sim$

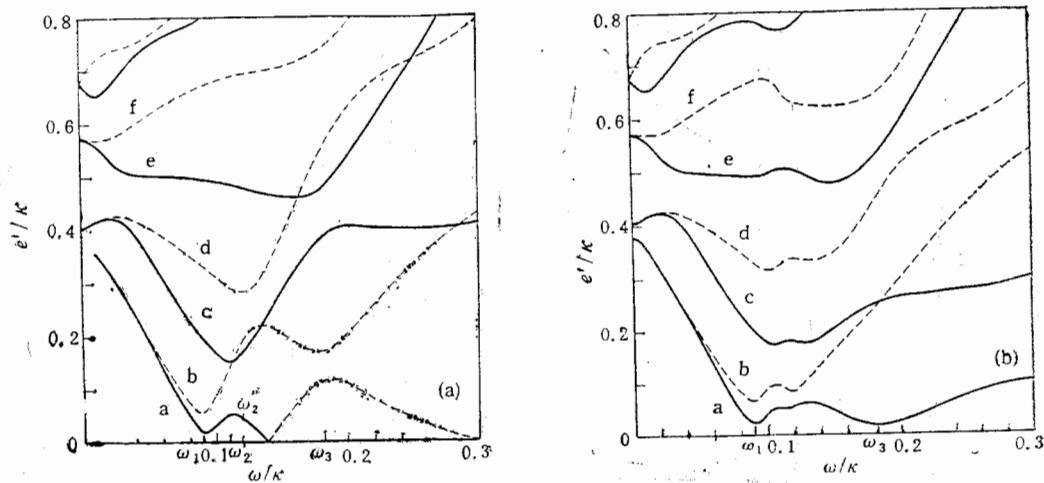
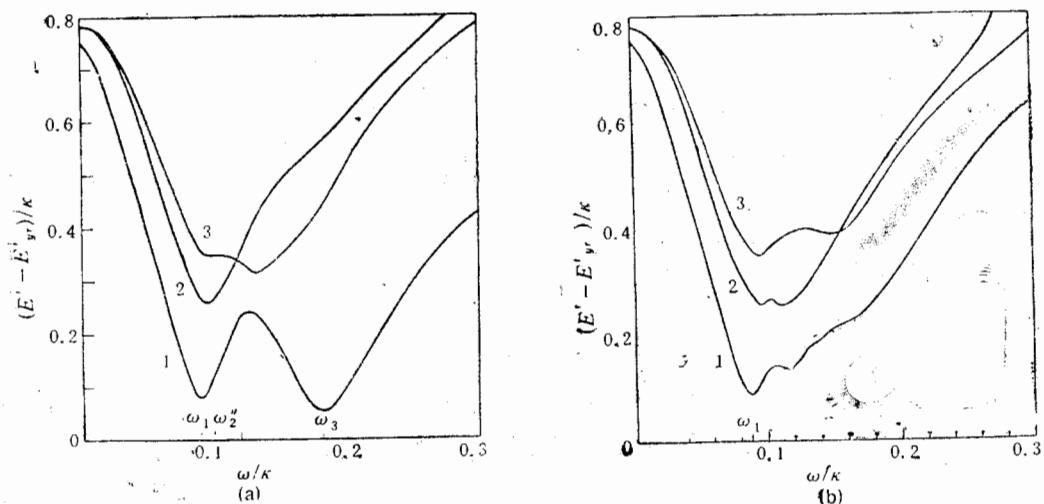


图 5 准粒子谱。

全部准粒子谱对 $e' = 0$ 具有反射对称性, 下半部分未画出。

$a, b, c, d \dots$ 等符号与文献 [5] 图 2.10 相同。

(a) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega = 0)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega = 0)$ (b) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega)$

图 6 6 粒子体系的准粒子激发谱,(相对于晕带), $(E' - E'_y)/\kappa$,

(a) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega = 0)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega = 0)$ (b) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega)$

0.04 (弱耦合); 而 PNC 精确解给出 $V/\kappa \sim 0.24$ (强耦合)。

3) 按 Bengtsson-Hamamoto-Mottelson 的单 j -CSM 的 CHFB 计算^[11], 随费米面 λ (或粒子数 N) 的变化, V 有周期起伏现象。对于不同粒子数 N 的 PNC 计算表明, V 都比较大, 并且没有周期变化现象^[19]。

4) H_{CSM} 与 H'_{CSM} 的能谱, 并不能一一对应(反映 CHFB 中出现了大量伪态)。例如对于 6 粒子体系, $\omega = 0$ 时, 精确解给出的第一激发态(对拆散态)为二重简并, 第二激发能级(对激发态)不简并。与此相反, CHFB 给出, 第一激发态不简并, 而第二、三激发态

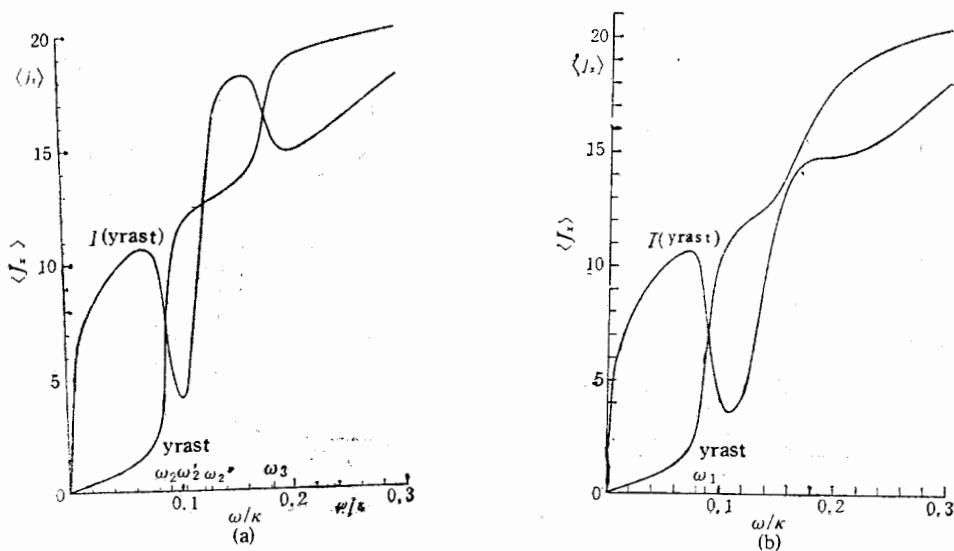


图 7 6 粒子体系晕带与次晕带的顺排角动量
(a) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega = 0)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega = 0)$ (b) $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega)$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\omega)$

都是简并的。

以上讨论说明 H_{CSM} 和 H'_{CSM} 给出的低激发带的性质, 虽有某些相似之处, 但存在重大差异。看来, 对于原子核这样一个价核子数并不多 (~ 10) 的体系的低激发态, CHFB 方法给出的准粒子图象的可靠性还值得认真探讨。当然, 本文结论只是从单 i 模型计算得出的。对于实际原子核, 费密面附近存在不同宇称的、来自不同 i 的单粒子能级, 它们对于 Coriolis 力的响应是很不同的。这会影响到低激发谱的性质。

另外, 我们也曾试探地在 PNC 计算中, 把 $\Delta V = 2$ 的组态之间的 Coriolis 作用矩阵元减小, 计算结果较接近于弱耦合的情况, 因而与 CHFB 计算结果更接近。但这样做法的理论基础还不清楚, 看来与 Coriolis 减弱现象^[20]有密切关系。

本文为作者之一(彭剑平)的硕士毕业论文。他对张锡珍老师和程檀生老师在答辩中提出的宝贵建议表示感谢。对王维义同志在计算工作中的帮助也表示感谢。

参 考 文 献

- [1] D. R. Inglis, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 1059; **97**(1955), 701.
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Japan J. Phys. Suppl.*, **44**(1978), 152.
- [3] R. Bengtsson and S. Frauendorf, *Nucl. Phys.*, **A327** (1979), 139.
- [4] M. A. J. de Voigt, J. Dudek and Z. Szymanski, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 949.
- [5] R. Bengtsson and J. D. Garrett, The Cranking Model—Theoretical and Experimental Basis, in Collective Phenomena in Atomic Nuclei, Int. Review of Nuclear Physics, Vol. 2, (World Scientific Singapore, 1984).
- [6] I. Hamamoto, High Angular Momentum Phenomena, in Treaties on Heavy-ion Science, Vol. 3, ed. by D. A. Bromley, (Plenum Publishing Corporation, 1985).
- [7] A. L. Goodman, Advances in Nuclear Physics, Vol. 11, ed. by J. Negele and D. Vogt (Plenum, N. Y., 1979).
- [8] I. Hamamoto, *Nucl. Phys.*, **A271**(1976), 15.
- [9] I. Hamamoto, Critical Analysis of the Cranking, in Nuclear Structure 1985, ed. by R. Broglia, G. B. Hagemann and B. Herskind, Elsevier Science Publishers B. V..
- [10] L. F. Canto, P. Ring and J. O. Rasmussen, LBL-19519.

- [11] R. Bengtsson, I. Hamamoto and B. Mottelson, *Phys. Lett.*, **73B**(1978), 259.
- [12] R. Bengtsson and Hakasson, *Nucl. Phys.*, **A357**(1981), 61.
- [13] J. Y. Zeng and T. S. Cheng, *Nucl. Phys.*, **A405**(1983), 1.
- [14] J. Y. Zeng, T. S. Cheng, L. Cheng and C. S. Wu, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 125C.
- [15] C. S. Wu and J. Y. Zeng, Proceedings of the International Symposium on Particle and Nuclear Physics (Beijing, 1985), p. 412.
- [16] T. S. Cheng, C. S. Wu and J. Y. Zeng, *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1986), 125.
- [17] C. S. Wu and J. Y. Zeng, *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1986), 149.
- [18] 吴崇试、曾谨言,晕带与次晕的相互作用强度,科学通报,即将发表.
- [19] 吴崇试、曾谨言,高能物理与核物理,**12**(1988)95.
- [20] J. Y. Zeng and T. S. Cheng, *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985), 517.

ON THE VALIDITY OF THE CHFB METHOD FOR TREATING THE CSM HAMILTONIAN

PENG JIANPING, WU CHONGSHI, ZENG JINYAN
(Peking University)

ABSTRACT

The accurate solutions for the low-lying eigenvalues and eigenstates of the single-j CSM hamiltonian have been obtained and are compared with the HFB approximation. There exist a world of difference between the two, especially the behaviour of the yrast and the yrare bands near the bandcrossing and the band interaction strength. The theoretical foundation of the CHFB method for treating the rotating nuclei needs reexamination.