

带费米子 2+1 维 $SU(2)$ 群格点规范理论 中的真空和手征对称性自发破缺*

罗向前 陈启洲 郭硕鸿
(中山大学, 广州)

摘 要

本文把纯规范场的严格基态和费米场的变分真空态结合起来, 研究格点 QCD 中 2+1 维 $SU(2)$ 群带费米子的真空结构, 计算费米子真空凝聚 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, 其结果有较好的标度行为.

一、引 言

手征对称性自发破缺是 QCD 的一个重要特性, 已有不少文献用格点规范理论中的 Monte Carlo 模拟和解析方法对表征这种破缺的 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 进行计算^[1]. 但解析计算遇到了较大困难, 多数讨论只限于大 N 极限或强耦合区. 文献 [2] 用么正变换和变分法把计算延拓到中间耦合区, 但由于仅考虑了规范场树图, 还不能得到标度性行为.

纯规范场的解析研究有了很大进展. 文献 [3] 找到了纯规范场的基态, 文献 [4, 5] 用具有严格基态解的纯规范场哈密顿量和变分法, 计算 2+1 维 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 、 $SU(3)$ 群的胶球质量, 在弱耦合区很大的范围内有很好的标度行为.

本文把么正变换所得到的费米子真空和纯规范场真空结合起来, 探讨规范场圈图的贡献, 用变分法计算 2+1 维 $SU(2)$ 群的 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, 其结果表明在较弱耦合区, 圈图起重要作用, 在很大程度上改进了标度性行为.

二、带费米子的真空和哈密顿量

在 Naïve 费米子方案中, 2+1 维格点哈密顿量为

$$H = H_f + H_g \quad (1)$$

$$H_f = \frac{1}{2a} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma_k U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}) + m \sum_{\mathbf{x}} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$H_g = \frac{g^2}{2a} \sum_{\mathbf{x}, i} E_i^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{ag^2} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) + \Delta H \quad (3)$$

* 中山大学高等学术中心和 国家教委自然科学基金资助项目.
本文 1987 年 12 月 29 日收到.

其中 ΔH 是方块变量 U_p 和 U_p^\dagger 的函数, 在连续极限 $a \rightarrow 0$ 下, $\Delta H \rightarrow 0$. 无量纲耦合常数 $g^2 = e^2 a$, e 为规范耦合常数. 文献 [5] 证明, H_g 可改写成如下形式

$$H_g = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,j} e^{-s_g} E_j^a(\mathbf{x}) e^{2s_g} E_j^a(\mathbf{x}) e^{-s_g} \quad (4)$$

$$s_g = \frac{1}{2g^4 C_N} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) \quad (5)$$

文献 [3] 证明了 $e^{s_g}|0\rangle$ 是 H_g 的准确基态. C_N 是 $SU(N)$ 的 Casimir 不变量, 对于 $SU(2)$ 群, $C_N = 3/4$. 我们选用的费米子表示为

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ \eta^+(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

并定义“裸”真空 $|0\rangle$ 满足以下条件

$$\xi(\mathbf{x})|0\rangle = \eta(\mathbf{x})|0\rangle = E_j^z(\mathbf{x})|0\rangle = 0 \quad (7)$$

类似文献 [2] 的方法, 我们证明了在么正变换 $e^{-i\theta s_f} H e^{i\theta s_f}$ 下, 2+1 维哈密顿量变成

$$\begin{aligned} e^{-i\theta s_f} H_m e^{i\theta s_f} &= e^{-i\theta s_f} m \sum_{\mathbf{x}} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) e^{i\theta s_f} \\ &= m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\theta)^n}{n! 4^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}, \pm \mathbf{k}_i} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_n} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \\ &\quad \cdots, \mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \\ e^{-i\theta s_f} H_k e^{i\theta s_f} &= e^{-i\theta s_f} \frac{1}{2a} \sum_{\mathbf{x}, \pm \mathbf{k}_1} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma_k U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}) e^{i\theta s_f} \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\theta)^n}{n! 4^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}, \pm \mathbf{k}_i} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_{n+1}} U(\mathbf{x}, \\ &\quad \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_{n+1}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_{n+1}) \\ e^{-i\theta s_f} \sum_{\mathbf{y}, j} \frac{g^2}{2a} E_j^z(\mathbf{y}) e^{i\theta s_f} &= \frac{g^2}{2a} \sum_{\mathbf{y}, j} E_j^a(\mathbf{y}) \cdot E_j^a(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (8)$$

上面式子中

$$\begin{aligned} s_f &= \frac{i}{\sqrt{4}} \sum_{\mathbf{x}, \pm \mathbf{k}} \psi^+(\mathbf{x}) \sigma_k U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}) \\ E_j^a(\mathbf{y}) &= E_j^a(\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n! 4^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}, \pm \mathbf{k}_i} \psi^+(\mathbf{x}) \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_n} [U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n), \\ &\quad E_j^a(\mathbf{y})] \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \eta_n(\mathbf{y}) \\ \eta_n(\mathbf{y}) &= (-1)^{n+i+1} \binom{n-1}{i} \delta_{\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_i} \delta_{j, k_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \end{aligned} \quad (9)$$

现在, 我们设物理真空为

$$|\mathcal{Q}\rangle = e^{i\theta s_f} e^{s_g} |0\rangle \quad (10)$$

则真空能量平均值

$$E_{\mathcal{Q}} = \langle \mathcal{Q} | H | \mathcal{Q} \rangle / \langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle \quad (11)$$

θ 是由 $\partial E_{\mathcal{Q}} / \partial \theta = 0$ 确定的变分参数.

三、费米子真空凝聚

把文献 [2—6] 的方法结合起来, 得出真空能量平均值

$$\begin{aligned}
 E_0 = & m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^{2n}}{(2n)! 4^n} \sum_{x, \pm k_i} W_{2n}(x, k_i) \\
 & - \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{n+1/2}} \sum_{x, \pm k_i} W_{2n+2}(x, k_i) \\
 & + \frac{g^2}{2a} C_N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^{2n+2}}{(2n+2)! 4^{n+1}} \sum_{y, j, x, \pm k_i} V_{2n+2}(y, j, x, k_i) \quad (12)
 \end{aligned}$$

其中 $\sum_{x, \pm k_i} W_{2n}(x, k_i)$ 是所有由 $2n$ 条链围成的闭合图的总和

$$\begin{aligned}
 \sum_{x, \pm k_i} W_{2n}(x, k_i) = & \sum_{x, \pm k_i} \\
 & \times \frac{\langle 0 | e^{\int g \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_{2n}} U(\mathbf{x}, k_1, \cdots, k_{2n}) \psi(\mathbf{x} + k_1 + \cdots + k_{2n}) e^{\int g} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{2 \int g} | 0 \rangle}
 \end{aligned}$$

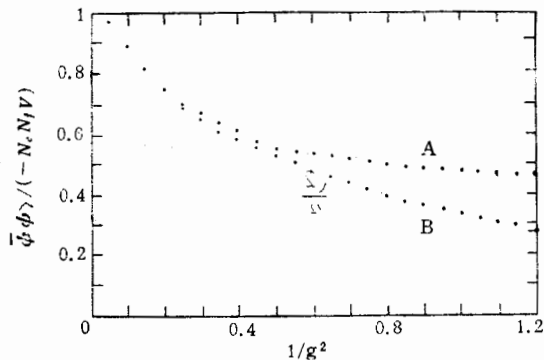


图1 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 与 $1/g^2$ 的关系 (A 代表只考虑树图时的情形, B 为本文结果)

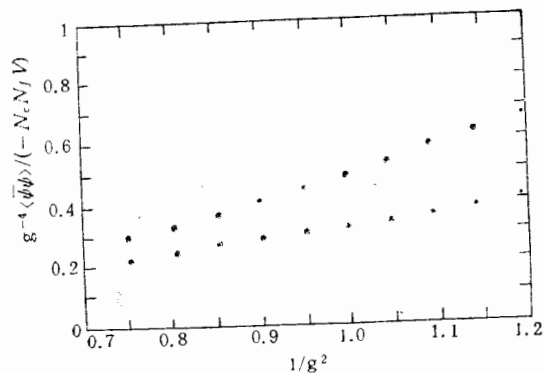

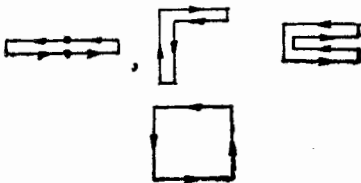



图2 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle / g^4$ 与 $1/g^2$ 的关系 (A、B 的注释同图1)

表 1

n	有贡献的图	图数	$\sum_{x, \pm k_i} W_{\pm}(x, k_i) / (-N_c N_f V)$
1		4	-4
2		28 8	28 - 8R
	树图 (如 )	232 144 24	-232 + 144R - 24R^2
⋮	⋮	⋮	⋮

$$= \left(-\frac{1}{2} N_f V\right) \sum_{\pm k_i} \text{Tr} \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_{2n}} \frac{\int [dU] e^{2i g \text{Tr} U_1 \cdots U_{2n}}}{\int [dU] e^{2i g}} \quad (13)$$

我们用计算机算出满足 $k_1 + \cdots + k_{2n} = 0$ 的图数, 把结果列成表 1.

表中 $R = I_2\left(\frac{16}{3g^4}\right) / I_1\left(\frac{16}{3g^4}\right)$, I_i 为第 i 阶虚宗量贝塞耳函数. $\sum_{y, j, \pm k_i} V_{2n+2}(y, j, x, k_i)$


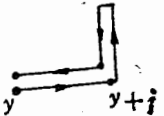
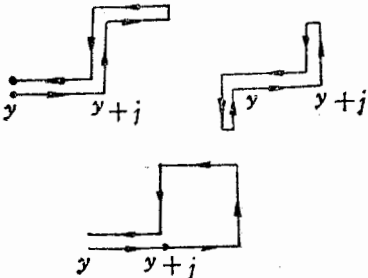
可用类似方法求出, 其结果如表 2

我们用数值计算找出使 E_Q 最小的 θ 值, 这样的 θ 是耦合常数 g 的函数, 代入下式就可求得费米子真空凝聚 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 与 g 的关系

$$\begin{aligned} \langle Q | \bar{\psi} \psi | Q \rangle / (-N_c N_f V \langle Q | Q \rangle) &= 1 - \frac{(2\theta)^2}{2!} + \frac{(2\theta)^4 \times (28 - 8R)}{4! \times 4^2} \\ &+ \frac{(2\theta)^6 \times (-232 + 144R - 24R^2)}{6! \times 4^3} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

在 g 的很大范围内, 这是一个很快收敛的级数, 因此可忽略 θ 的高次项贡献.

表 2

n	有贡献的图	图数	$\sum_{y, j, x, \pm k_j} V_{2n+2}(y, j, x, k_j)/(N_c N_f V)$
0		2	2
1		2×8	-16
2		2×152 2×16	$304 - 32R$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

2 + 1 维规范场为超可重正化, 规范耦合常数 e 不随 cutoff 而变, 若用无量纲耦合常数 $g^2 = e^2 a$, 则 $g^2 \propto a$. 格点上定义的量都是无量纲的, 令 ϕ_L 和 ϕ_c 分别为格点和连续理论的费米子场, 则 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_L = a^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle_c$, 由于 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_c$ 是不变量, 因此有标度行为 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_L \propto a^2 \propto g^4$.

我们把 $m=0$ 时 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$ 与 $1/g^2$ 的关系作成图 1, 把 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle/g^4$ 与 $1/g^2$ 的关系作成图 2. 从图 2 可以看到, 本文的方法更能延拓到弱耦合区, 更好地满足标度性要求. 当然, 由于我们在真空态的 s_f 上只取了单链项, 结果不可能完全进入标度区, 但从本文结果可见规范场圈图对于改善 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$ 的标度行为起了重要作用.

我们对李高峰、李志兵和郑维宏的有益讨论表示感谢.

参 考 文 献

- [1] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775. 及所引的一系列文献.
- [2] S. H. Guo, Q. Z. Chen, J. M. Liu and L. Hu, *Commun. in Theor. Phys.*, (Beijing) **3**(1984), 481.
- [3] S. H. Guo, J. M. Liu and Q. Z. Chen, *Chin. Phys. Lett.*, **2**(1985), 409.
- [4] S. H. Guo, W. H. Zheng and J. M. Liu, *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1986), 445.
- [5] W. H. Zheng, J. M. Liu and S. H. Guo, to be published.
- [6] D. Cohen, *Basic Techniques of Combinatorial Theory* (Wiley, New York, 1978).

VACUUM OF 2+1 DIMENSIONAL $SU(2)$ LGT WITH FER- MIONS AND SPONTANEOUS CHIRAL SYMMETRY BREAKING

LUO XIANGQIAN CHEN QIZHOU GUO SHUO HONG

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

ABSTRACT

By incorporating the exact ground state of pure gauge theory and the variational fermion vacuum state, the vacuum structure of 2+1 dimensional $SU(2)$ LGT with fermions is studied. We calculate the fermion condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, and obtain a good scaling behavior.