第13卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 4
1989年4月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Apr., 1989

超主手征场模型中的无穷保形对称性和 Riemann-Hilbert 变换*

郝三如　李　卫
（西北大学现代物理研究所，西安）

摘　　要

我们在超主手征场模型中找到了一种新的对称变换——C 变换，发现在这种变换下体系具有一个与没有中心项的 Virasoro 代数相关的无穷维李代数. 利用 Riemann-Hilbert 变换，我们探讨了 C 变换的物理根源.

一、引　　言

近几年来，人们在研究无穷维隐藏对称性方面已取得很大的进展，并且对非线性可积系统的讨论积累了丰富的经验. 众所周知，许多非线性完全可积系有隐藏的圈对称 (Loop Symmetry)[1-16]. 值得注意的是，最近人们对某些非线性物理系统[17,18,21-24]作了进一步的讨论，发现这些物理系统还具有 Virasoro 群对称. 本文通过对超主手征场模型的讨论，发现该模型具有比圈对称[9]更大的保形对称性.

文章按如下顺序组织安排：第二节中，我们简单的回忆超手征场的性质、运动方程及线性方程组；在第三节中，我们引入了一个新的超主手征场的无穷小变换，讨论在此变换下体系的对称性及相应的守恒流方程；第四节，我们利用 Riemann-Hilbert 变换讨论了无穷小对称变换的物理根源；无穷小算子间的对易关系及无穷维李代数的表示在第五节中已明显得到，并从群的观点上作了进一步的讨论；最后我们给出了一个综合性的说明.

二、二维超主手征场模型

在通常的主手征场模型中引入反对易的 Grassmann 变量坐标 θ_1, θ_2 后，则此时的模型就是所谓的超主手征场模型，其场称为超主手征场. 引入光锥坐标 $\xi = t + x$，$\eta = t - x$，则超主手征场 g 就是 ξ, η 和 θ_1、θ_2 的矩阵函数. θ_1、θ_2 具有如下的反对易性质，

$$\{\theta_1, \theta_2\} = \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = 0. \tag{2.1}$$

定义超势 $\hat{A}_i$:

* 本文是中国科学院科学基金和国家教委优秀青年教师基金资助课题.
本文1987年12月14日收到.

$$\hat{A}_i = \hat{g}^+\hat{d}_i\hat{g}, \quad (i = 1, 2), \tag{2.2}$$

其中 $\hat{g}$ 是 U 的且与 θ_1, θ_2 对易，

$$\hat{g}^+ = \hat{g}^{-1}, \quad [\theta_i, \hat{g}] = 0, \ (i = 1, 2), \tag{2.3}$$

(2.2)式中 $\hat{d}_1$、$\hat{d}_2$ 算子是如下定义的：

$$\hat{d}_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_2} - i\theta_2\frac{\partial}{\partial\xi}, \tag{2.4a}$$

$$\hat{d}_2 = -\frac{\partial}{\partial\theta_1} + i\theta_1\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{2.4b}$$

由(2.2)—(2.4)各式，显然有下两式成立，

$$\hat{d}_1\hat{d}_2 + \hat{d}_2\hat{d}_1 = \{\hat{d}_1, \hat{d}_2\} = 0, \tag{2.5}$$

$$\hat{d}_1\hat{A}_2 + \hat{d}_2\hat{A}_1 + \{\hat{A}_1, \hat{A}_2\} = 0. \tag{2.6}$$

由(2.4)及(2.5)式明显可以看出：算子 $\hat{d}_i$ 既不是数学中的全微分也不是几何中的外微分，但它们有反交换的性质，因此在计算中交换 $\hat{d}_i$ 或带 $\hat{d}_i$ 的物理量时必须特别注意符号问题．

利用上述各量，超手征场模型的作用量可以表述为：

$$\hat{S} = \int d\theta_2 d\theta_1 d\xi d\eta \hat{\mathscr{L}}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2), \tag{2.7}$$

式中 $\hat{\mathscr{L}}$ 为

$$\hat{\mathscr{L}}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2) = \mathrm{Tr}\,(\hat{d}_1\hat{g}^+\hat{d}_2\hat{g}) = -\mathrm{Tr}\,(\hat{A}_1\hat{A}_2). \tag{2.8}$$

对(2.7)式应用变分原理，$\delta\hat{S} = 0$，得到体系的运动方程：

$$\hat{d}_1\hat{A}_2 - \hat{d}_2\hat{A}_1 = 0. \tag{2.9}$$

很容易验证，(2.6)和(2.9)是下面线性方程组的可积条件：

$$\hat{d}_1\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{1}{2}(1-\gamma)\hat{A}_1\hat{\phi}(\gamma), \tag{2.10a}$$

$$\hat{d}_2\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\hat{A}_2\hat{\phi}(\gamma), \tag{2.10b}$$

其中 $\hat{\phi}(\gamma)$ 是矩阵函数 $\hat{\phi}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2, \gamma)$ 的简写，且具有

$$\hat{\phi}^+(\gamma) = \hat{\phi}^{-1}(\gamma), \quad [\hat{\phi}(\gamma), \theta_i] = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{2.11}$$

γ 是线性方程组所引入的复参数，$\hat{\phi}^+(\gamma) = \hat{\phi}(\bar{\gamma})^+$．

取生成函数的初条件为

$$\hat{\phi}(\gamma = 1) = I, \tag{2.12}$$

因此由(2.10)式显然有

$$\hat{A}_1 = 2\hat{d}_1\hat{\phi}(\gamma = 1), \quad \hat{A}_2 = -2\hat{d}_2\hat{\phi}(\gamma = 1). \tag{2.13}$$

三、一种新的无穷小对称变换

利用线性方程(2.10)式的解 $\hat{\phi}(\gamma)$，乔玲丽等人[9]构造了一个超主手征场的 H 变换，

$$\hat{g}^{-1}\delta_\alpha\hat{g} = -\hat{\phi}(\gamma)T_2\hat{\phi}^{-1}(\gamma), \tag{3.1}$$

并找到了与此变换相对应的超主手征场的圈对称．区别于此变换，现在我们引进另一个

新的无穷小变换——C 变换:

$$\hat{g}^{-1}\delta\hat{g} = -\frac{2}{\gamma+1}[\dot{\hat{\phi}}(-1)\hat{\phi}^{-1}(-1) + \gamma\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]. \tag{3.2}$$

显然(3.2)式右边省略了一个无穷小乘积. 可以证明C变换是体系的对称变换. 首先我们讨论 $\hat{A}_i$ 在C变换下的变换形式. 由超势 $\hat{A}_i$ 的定义,

$$\delta\hat{A}_1 = \delta\hat{g}^{+}\hat{\partial}_1\hat{g} + \hat{g}^{+}\hat{\partial}_1\delta\hat{g}, \tag{3.3a}$$

$$\delta\hat{A}_2 = \delta\hat{g}^{+}\hat{\partial}_2\hat{g} + \hat{g}^{+}\hat{\partial}_2\delta\hat{g}, \tag{3.3b}$$

利用线性方程(2.10)及C变换,通过直接计算不难得到 $\hat{A}_i$ 在C下的具体变换形式:

$$\delta\hat{A}_1 = \frac{1}{\gamma-1}\{\hat{A}_1 - 2\gamma\hat{\partial}_1[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\}, \tag{3.4a}$$

$$\delta\hat{A}_2 = \frac{1}{\gamma-1}\{\hat{A}_2 + 2\gamma\hat{\partial}_1[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\}. \tag{3.4b}$$

有了上式,利用运动方程(2.9)立即可得

$$\hat{\partial}_1\delta\hat{A}_2 - \hat{\partial}_2\delta\hat{A}_1 = 0. \tag{3.5}$$

(3.5) 式说明C变换下运动方程不变. 我们进一步还可证明在C变换下所得到的超势 $\hat{A}_i + \delta\hat{A}_i$ 仍是一个纯规范.

利用由(2.10)式所得到的辅助方程:

$$[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma), \hat{A}_1] = -\frac{2}{\gamma-1}\hat{\partial}_1[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)] + \frac{1}{\gamma-1}\hat{A}_1, \tag{3.6a}$$

$$[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma), \hat{A}_2] = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\hat{\partial}_2[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)] + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\hat{A}_2 \tag{3.6b}$$

及(3.4)和运动方程(2.9)则有下式成立

$$\hat{\partial}_1\delta\hat{A}_2 + \hat{\partial}_2\delta\hat{A}_1 + \{\delta\hat{A}_1, \hat{A}_2\} + \{\hat{A}_1, \delta\hat{A}_2\} = 0. \tag{3.7}$$

由此说明在C变换下得到的新的 $\hat{A}'_i$ 仍是纯规范, $\hat{A}'_i = \hat{A}_i + \delta\hat{A}_i$,

$$\hat{\partial}_1\hat{A}'_2 + \hat{\partial}_2\hat{A}'_1 + \{\hat{A}'_1, \hat{A}'_2\} = 0 \tag{3.8}$$

到此我们得到这样的结论: C变换也是体系的一个对称变换. 由于体系的这种性质,必然决定了体系在这种变换下有守恒律存在. 为了找到这种守恒律,我们先讨论拉氏密度在C变换下的变换形式. 根据(2.8)式及(3.4)式,拉氏密度 $\hat{\mathscr{L}}$ 的改变量 $\delta\hat{\mathscr{L}}$ 为:

$$\delta\hat{\mathscr{L}} = -\frac{2}{\gamma-1}\mathrm{Tr}\{\hat{A}_1\hat{A}_2 - \gamma\hat{\partial}_1[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\hat{A}_2 - \gamma\hat{\partial}_2[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\hat{A}_1\}. \tag{3.9}$$

利用

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{\hat{\partial}_1[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\hat{A}_2\}\\ &= \mathrm{Tr}\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}[\hat{\partial}_1(\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\partial}_2\hat{\phi}^{-1}(\gamma)) + \hat{\partial}_2(\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\partial}_1\hat{\phi}^{-1}(\gamma))] + \frac{1}{2\gamma}\hat{A}_1\hat{A}_2\right\},\end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{\hat{\partial}_2[\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\hat{A}_1\}\\ &= \mathrm{Tr}\left\{-\frac{2}{\gamma-1}[\hat{\partial}_1(\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\partial}_2\hat{\phi}^{-1}(\gamma)) + \hat{\partial}_2(\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\partial}_1\hat{\phi}^{-1}(\gamma))] + \frac{1}{2\gamma}\hat{A}_1\hat{A}_2\right\},\end{aligned} \tag{3.10b}$$

(3.9)式可以简化为

$$\delta\hat{\mathscr{L}} = -\operatorname{Tr}\{\partial_1[2\gamma\hat{\phi}(\gamma)\partial_2\hat{\phi}^{-1}(\gamma)] + \partial_2[2\gamma\hat{\phi}(\gamma)\partial_1\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\}. \tag{3.11}$$

显然，在 C 变换下，$\delta\hat{\mathscr{L}}$ 是一个全散度．另一方面，(2.8)式在 C 变换下的改变量还可以表述为

$$\delta\hat{\mathscr{L}} = -\operatorname{Tr}[\partial_1\hat{A}(\gamma)\hat{A}_2 - \partial_2\hat{A}(\gamma)\hat{A}_1], \tag{3.12}$$

式中 $\delta g = g\hat{A}(\gamma)$，$\hat{A}(\gamma) = -\dfrac{2}{\gamma+1}[\hat{\phi}(-1)\hat{\phi}^{-1}(-1) + \gamma\hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]$．考虑到 g 在运动方程的壳层上时，$\delta\hat{\mathscr{L}}$ 可以表成如下形式：

$$\delta\hat{\mathscr{L}} = \operatorname{Tr}\{\partial_2[\hat{A}(\gamma)\hat{A}_1] - \partial_1[\hat{A}(\gamma)\hat{A}_2]\}. \tag{3.13}$$

比较 $\delta\hat{\mathscr{L}}$ 的两种表达形式(3.11)及(3.13)，得到体系的守恒流方程：

$$\partial_1 J_2 - \partial_2 J_1 = 0, \tag{3.14}$$

式中，

$$J_1(\gamma) = \operatorname{Tr}\left\{\frac{2}{\gamma+1}\hat{\phi}(-1)\partial_1\hat{\phi}^{-1}(-1) - \frac{2\gamma(\gamma^2+1)}{\gamma^2-1}\hat{\phi}(\gamma)\partial_1\hat{\phi}^{-1}(\gamma)\right\}, \tag{3.15a}$$

$$J_2(\gamma) = \operatorname{Tr}\left\{\frac{2}{\gamma+1}\hat{\phi}(-1)\partial_2\hat{\phi}^{-1}(-1) + \frac{2\gamma(\gamma^2+1)}{\gamma^2-1}\hat{\phi}(\gamma)\partial_2\hat{\phi}^{-1}(\gamma)\right\}. \tag{3.15b}$$

若将上两式中的守恒流作幂级数展开，则可以得到体系的无穷多个非局域守恒流．

由超手征场 g 的变换，必将导致 $\hat{\phi}(\gamma)$ 的变换．由(2.13)、(3.4)及线性方程(2.10)式，不难得到下面两式：

$$2\partial_1\delta(\gamma)\hat{\phi}(\gamma'=1) = \frac{2}{\gamma-1}\{\partial_1[\hat{\phi}(\gamma'=1)\hat{\phi}^{-1}(\gamma'=1)] - \partial_1[\gamma\hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\}, \tag{3.16a}$$

$$2\partial_2\delta(\gamma)\hat{\phi}(\gamma'=1) = \frac{-2}{\gamma-1}\{\partial_2[\hat{\phi}(\gamma'=1)\hat{\phi}^{-1}(\gamma'=1)] + \partial_2[\gamma\hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)]\}. \tag{3.16b}$$

注意到 $\hat{\phi}(\gamma=1)=1$，则在 C 变换下，可以猜测 $\hat{\phi}(\gamma)$ 的变换形式为：

$$\delta(\gamma')\hat{\phi}(\gamma) = \delta'\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{\gamma-1}{\gamma'-\gamma}\{\gamma'\hat{\phi}(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(\gamma') - \gamma\hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)\}\hat{\phi}(\gamma). \tag{3.17}$$

很易证明，在(3.17)的变换下，线性方程(2.10)式是不变的．上面我们猜到了 $\hat{\phi}(\gamma)$ 在 C 下的变换下的变换形式，实际上变换 (3.17) 式有较深刻的物理根源，我们将在下节中讨论．

四、C 变换的根源

讨论 C 变换的根源的最行之有效的方法是 Riemann-Hilbert (R-H) 变换，对于目前的情况，还必须对应用于圈对称 R-H 变换公式作某些改动．

首先，在复参数平面上选择一个光滑的闭曲线 C，它包含 $\gamma=1$ 的点但不包含原点．假设对于给定的解 $\hat{\phi}(\gamma)$，除在 $\gamma=0$ 和 $\gamma=\infty$ 处奇异外，在 $C+C_\pm$. 上解析，$C_\pm$ 代表 C 内和 C 外两部分．

其次，定义标函数 $v(\gamma)$，它只是 γ 的函数，并在 $C+C_-$ 上全纯，但在 C_+ 上有奇

点,并且 $\gamma\to\infty$ 线性发散,$\gamma\to 0$ 时, $v(\gamma)\to\gamma$.

现在定义一个取值在矩阵上的超核函数,

$$\hat{G}(\gamma)=\hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(v(\gamma)), \tag{4.1}$$

其中 $\hat{G}(\gamma)$ 是 $\hat{G}(\xi,\eta,\theta_1,\theta_2,\gamma)$ 的简写. 利用(4.1)式, R-H 问题就可唯一确定下式:

$$\hat{X}_-(\gamma)=\hat{X}_+(\gamma)\hat{G}(\gamma),\quad on C, \tag{4.2}$$

上式中 $\hat{X}_\pm(\gamma)$ 分别在 $C+C_\pm$ 上解析,且 $\hat{X}_+(\gamma=1)=1$.

为了从(2.10)的解 $\hat{\phi}(\gamma)$ 找到它的新解 $\hat{\phi}'(\gamma)$, 定义

$$\hat{\phi}'(\gamma)=\hat{X}_+(\gamma)\hat{\phi}(\gamma),\qquad \text{in } C_+ \tag{4.3}$$

$$=\hat{X}_-(\gamma)\hat{\phi}(v(\gamma)),\qquad \text{in } C_- \tag{4.4}$$

显然上面的定义在 C 上是相容的. 可以证明上面所定义 $\hat{\phi}'(\gamma)$ 是(2.10)式的新解.

利用 $\hat{d}_1$ 对(4.3)和(4.4)两边作用,则

$$\hat{d}_1\hat{\phi}'(\gamma)\hat{\phi}^{-1\prime}(\gamma)=\hat{d}_1\hat{X}_+(\gamma)\hat{X}_+^{-1}(\gamma)-\frac{1}{2}(1-\gamma)\hat{X}_+(\gamma)\hat{A}_1\hat{X}_+^{-1}(\gamma),\quad \text{in } C_+, \tag{4.5}$$

$$=\hat{d}_1\hat{X}_-(\gamma)\hat{X}_-(\gamma)-\frac{1}{2}(1-v(\gamma))\hat{X}_-(\gamma)\hat{A}_1\hat{X}_-(\gamma),\ \text{in } C_-, \tag{4.6}$$

由于 $\hat{X}_\pm$ 分别在 $C_\pm$ 上解析,且 $v(\gamma)$ 在 C_- 上全纯,因此(4.5)、(4.6)两式左边在整个 γ 复平面上都是 γ 的线性矩阵函数,即.

$$\hat{d}_1\hat{\phi}'(\gamma)\hat{\phi}'^{-1}(\gamma)=\hat{M}+\gamma\hat{N}, \tag{4.7}$$

式中 $\hat{M}$、$\hat{N}$ 与 γ 无关的待定矩阵. 利用 $\hat{X}_+(1)=1$, 及(4.5)式,显然有

$$\hat{M}=-\hat{N}=-\frac{1}{2}(\hat{A}_1+2\hat{d}_1\hat{X}_+(\gamma=1)). \tag{4.8}$$

若令 $\hat{M}=\frac{1}{2}\hat{A}'$, 则

$$\hat{d}_1\hat{\phi}'(\gamma)=-\frac{1}{2}(1-\gamma)\hat{A}_1'\hat{\phi}'(\gamma). \tag{4.9}$$

类似的方法,利用 $\hat{d}_2$ 作用在(4.3)和(4.4)式两边,并在两边同乘参数 γ, 出于同样的理由可以得到:

$$\hat{d}_2\hat{\phi}'(\gamma)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)\hat{A}_2'\hat{\phi}'(\gamma), \tag{4.10}$$

式中 $\hat{A}_2'=\hat{A}_2-2\hat{d}_2\hat{X}_+(\gamma=1)$. 由(4.9)、(4.10)两式可知,由(4.3)(4.4)定义的新的 $\hat{\Phi}'(\gamma)$ 是线性方程(2.10)的新解,新的超势 $\hat{A}_i'$ 由下式给出:

$$\hat{A}_1'=\hat{A}_1+2\hat{d}_1\hat{X}_+(\gamma=1),\quad \hat{A}_2'=\hat{A}_2-2\hat{d}_2\hat{X}_+(\gamma=1). \tag{4.11}$$

利用 R-H 变换及(4.9)和(4.10),可以看出, $\hat{\phi}'(\gamma)$ 仍满足下述条件:

$$\hat{\phi}'(\gamma=1)=I, \tag{4.12}$$

$$\hat{A}_1'=2\hat{d}_1\dot{\hat{\phi}}'(\gamma=1),\quad \hat{A}_2'=-2\hat{d}_2\dot{\hat{\phi}}'(\gamma=1). \tag{4.13}$$

为了找到(3.17)式的真正来源,我们则要考虑 R-H 的无穷小变换形式. 利用 $\hat{X}_-(\gamma)$ 在 $C+C_-$ 上的解析性以及(4.4)式,显然

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\hat{\phi}'(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(v(\gamma'))}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma' = 0, \tag{4.14}$$

上式中 $\gamma'=1$, $\gamma'=\gamma$ 的点在 C_+ 上.对于(4.14)式,我们既可认为 C 包围 C_+, 也可以认为 C 反向包围 C_-, 因此为了问题的需要我们则认为以下的讨论中 C 都是包围 C_+ 区域. 对(4.14)式利用 Cauchy 定理则可以得到 $\hat{\phi}'(\gamma)$ 的积分方程.

利用 $v(\gamma)$ 的性质,考虑 $v(\gamma)$ 在 γ 处的小变换:

$$\delta v(\gamma) = v(\gamma) - \gamma, \tag{4.15}$$

并定义 $\hat{\phi}(\gamma)$ 的变换

$$\delta\hat{\phi}(\gamma) = \hat{\phi}'(\gamma) - \hat{\phi}(\gamma), \tag{4.16}$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\gamma'}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)} = 0, \tag{4.17}$$

因此(4.14)在无穷小变换下可以写成如下形式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\delta\hat{\phi}(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(\gamma')}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma' + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\delta v(\gamma)\hat{\phi}(\gamma')\dot{\hat{\phi}}^{-1}(\gamma')}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma' = 0. \tag{4.18}$$

若规定 $\delta\hat{\phi}(\gamma=1)=0$, 则可得到 $\hat{\phi}(\gamma)$ 的无穷小变换

$$\delta\hat{\phi}(\gamma) = \frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_C \frac{\delta v(\gamma)\dot{\hat{\phi}}(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(\gamma')}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma'\hat{\phi}(\gamma). \tag{4.19}$$

根据 $v(\gamma)$ 的性质,不失一般性的选择

$$\delta^{(n)}v(\gamma) = -\gamma(\gamma-1)^{-n}, \quad n \geqslant 0 \tag{4.20}$$

对于每一个 $n \geqslant 0$, 引进新参数并定义 $\delta'\hat{\phi}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma'-1)^n \cdot \delta^{(n)}\hat{\phi}(\gamma)$, 因此得到 $\delta'\hat{\phi}(\gamma)$ 的变换形式为:

$$\delta'\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{\gamma-1}{\gamma'-\gamma}\{\gamma'\dot{\hat{\phi}}(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(\gamma') - \gamma\dot{\hat{\phi}}(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(\gamma)\}\hat{\phi}(\gamma). \tag{4.21}$$

上式正好是(3.17)式,由此说明 C 变换根源于 R-H 变换.

五、参数化无穷小变换间的对易关系

对于任意的正整数 n, 由(4.19)及(4.20)可知作用在 $\hat{\phi}(\gamma)$ 上的无穷小变换的具体形式:

$$\delta^{(n)}\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_C \frac{\gamma'(\gamma'-1)^{-n-1}}{\gamma'-\gamma}\dot{\hat{\phi}}(\gamma')\hat{\phi}^{-1}(\gamma')d\gamma'\hat{\phi}(\gamma). \tag{5.1}$$

利用此式可以直接计算 $\delta^{(n)}$ 和 $\delta^{(m)}$ 之间的对易关系,并得到他们的李代数表示.

定义作用算子 $\hat{L}_n$:

$$\hat{L}_n\hat{\phi}(\gamma) = -\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_C \frac{(t-1)^{-n}}{(t-\gamma)}\dot{\hat{\phi}}(t)\hat{\phi}^{-1}(t)dt\,\hat{\phi}(\gamma), \tag{5.2}$$

类似于[18]中(40)式的推导,可以得到 $\hat{L}_n$ 算子间关系:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m]\hat{\phi}(\gamma) = (n-m)\hat{L}_{n+m}\hat{\phi}(\gamma), \quad n, m \geqslant 0. \tag{5.3}$$

显然(5.2)式定义的算子能给出一个没有中心项 Virasoro 代数表示.

不难看出,(5.1)式可以写成如下形式:

$$\delta^{(n)}\hat{\phi}(\gamma)=\hat{L}_n\hat{\phi}(\gamma)+\hat{L}_{n+1}\hat{\phi}(\gamma),\quad n\geqslant 0 \tag{5.4}$$

因此对于 $n, m\geqslant 0$, 利用(5.3)式,显然有关系式:

$$\begin{aligned}[\delta^{(n)},\delta^{(m)}]\hat{\phi}(\gamma)&=[\hat{L}_n+\hat{L}_{n+1},\hat{L}_m+\hat{L}_{m+1}]\hat{\phi}(\gamma)\\&=(n-m)\{\delta^{(n+m+1)}+\delta^{(n+m)}\}\hat{\phi}(\gamma).\end{aligned} \tag{5.5}$$

上式明显看出,算子 $\{\delta^{(n)}\}$ 间的对易关系给出了一个与 Virasoro 代数相关的无穷维李代数. 由此可见,超主手征场模型具有无穷保形对称性.

从群的观点上讨论,我们会更清楚看到这一点. 利用 v_0、v_1 分别完成变换 $\hat{\phi}_0\to\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_1\to\hat{\phi}_2$, 而 v_2 直接把 $\hat{\phi}_0\to\hat{\phi}_2$, 则由 R-H 变换把 v_2 与 v_0 和 v_1 联系起来的表达式为:

$$v_2(\gamma)=v_0*v_1(\gamma)=v_0(v_1(\gamma)), \tag{5.6}$$

式中$*$代表群乘积关系. (5.6)式正好是 Virasoro 群的乘积关系[19]. 可见(4.14)式给出保形群的表示,其结合律由(5.6)式确定.

若将 Kac-Moody 的对称性包含在 R-H 变换内,则将超核函数选为:

$$\hat{G}(\gamma)=\hat{\phi}(\gamma)u(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(v(\gamma)), \tag{5.7}$$

式中 $u(\gamma)$ 是 γ 的矩阵函数,仅在 C 上解析. 这样 R-H 变换的积分形式 (4.14) 改写为:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\hat{\phi}'(\gamma')u(\gamma)\hat{\phi}^{-1}(v(\gamma'))}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma'=0. \tag{5.8}$$

显然,(5.8)式给出了 Kac-Moody 和 Virasoro 群的半直积.

在特殊情况下, $v(\gamma)=\gamma$, $\delta^{(n)}u(\gamma)=(\gamma-1)^{-n}T_a$, 我们从 (5.8) 式得到圈对称无穷小 R-H 变换:

$$\delta_a^{(n)}\hat{\phi}(\gamma)=-\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_C\frac{(\gamma'-1)^{-n-1}\hat{\phi}(\gamma')}{(\gamma'-\gamma)}T_a\hat{\phi}^{-1}(\gamma')d\gamma'\hat{\phi}(\gamma). \tag{5.9}$$

利用它就可以得到超主手征场的 Kac-Moody 代数表示[9].

六、综合说明

许多非线性物理模型[2-8,10-14,15,16,21],都具有隐藏的 Kac-Moody 代数结构. 尽管它们各不相同,但却有一个共同点: 体系的线性方程组都能变换成(2.10)形式,正因为这个特点,使得他们具有隐藏的圈对称. 最近人们找到了这些模型的 Virasoro 对称性或保形对称性[22-24],并且本文也找到这种对称性,因此我们推测: 凡线性方程组可约化为(2.10)式形式的非线性模型都可能具有保形对称,当然这种推测是否正确有待于进一步验证.

鸣谢: 作者非常感谢侯伯宇教授和王佩教授的热情鼓励和支持.

参 考 文 献

[1] L. Dolan and A. Roos, *Physical Rev.*, **D22**(1980), 2018.
[2] B. Y. Hou Yale preprint 80—29(1980) (unpublished). B. Y. Hou, M. L. Ge and S. Y. Wu, *Phys. Rev.*, **D24**

(1981), 2238.
[3] L. Dolan, *Phys. Rev. Lett.,* **47**(1981), 1371.
[4] M. L. Ge and Y. S. Wu Phys., *Lett.,* **B108** (1982), 411.
[5] C. Devchand and D. B. Fairlie, *Nucl. Phys.,* **B194** (1982), 232.
[6] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys.,* **B117**(1982), 208.
[7] Y. S. Wu, *Nucl. Phys.,* **B211** (1983), 160; *Commun. Math. Phys.,* **90**(1983), 461.
[8] P. Forgacs, Z. Haruath and P. Palla, *Phys. Rev.,* **D23**(1981), 1876.
[9] L. L. Chau, M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Rev.,* **D25**(1982), 1086; 1080.
[10] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys. lett.,* **B109**(1982), 273.
[11] L. L. Chau and Y. S. Wu, *Phys. Rev.,* **D26**(1982), 3581.
[12] L. L. Chau, M. L. Ge, A. Sinha and Y. S. Wu, *Phys, Lett.,* **B121**(1983), 391.
[13] R. Geroch, *J. Math. Phys.,* **12**(1971), 918; **13**(1972), 394.
[14] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *J. Math. Phys.,* **18**(1977), 1926; **19**(1978), 1926.
[15] I. Hauser and F. J. Frnst, *J. Math. Phys.,* **21**(1980), 1126.
[16] Y. S. Wu and M. L. Ge, *J. Math. Phys.,* **24**(1983), 1187.
[17] B. Y. Hou and W. Li, to appear in proceding of integrable problm in Naikei University (published in Singapore).
[18] B. Y. Hou and W. Li, *to appear in J. Phys. A. Math. Gen.,* **20**(1987).
[19] P. Goddard and D. Olive, *Intern. J. Mod. Phys.,* **A1** (1986), 303.
[20] Z. Popowicz and L. L. Chau Wang, *Phys. Lett.,* **B98**(1981), 253.
[21] B. Y. Hou, B. Y. Hou and P. Wang, *Intern. J. Mod.,* A1. No. 1 (1986), 193.
[22] B. Y. Hou and W. Li, *Lett. Math Phys.,* **13**(1987), 1.
[23] B. Y. Hou and W. Li, NWU-IMP-86-7, (1986).
[24] 侯伯宇、李卫，高能物理与核物理，Vol. **11**(1987)，137.

INFINITE CONFORMAL SYMMETRIES AND RIEMANN-HILBERT TRANSFORMATION IN SUPER PRINCIPAL CHIRAL MODEL

HAO SANRU　LI WEI

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

ABSTRACT

This paper shows a new symmetric transformation——*C* transformation in super principal chiral model and discover an infinite dimensional Lie algebra related to the Virasoro algebra without central extension. By using the Riemann-Hilbert transformation. The physical origination of *C* transformation is discussed.