第13卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 2
1989年2月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1989

谱参数保形变换对称性*

郝三如 李 卫
（西北大学现代物理研究所，西安）

摘 要

本文讨论了 $O(3)$ 非线性 σ 模型在对偶变换下的对称性，探讨了生成函数变换的根源；证实该模型中具有无穷保形对称性；得到了基本场的无穷维李代数结构及两种代数间的半直积关系；最后给出了相应的 Bianchi-Bäcklund 变换.

一、引 言

众所周知，非线性模型中的隐藏的圈对称讨论已有了很大的发展[1-16]. 最近，由侯伯宇教授等人对某些非线性物理模型作了进一步的研究，发现这些非线性的物理模型中还存在着更大的保形对称性[17-19]. 本文运用一种新的方法对 $O(3)$ 非线性 σ 模型作了进一步的讨论，发现该模型中不仅对于线性方程组(2.5)引进的生成函数 $U(\gamma)$ 在(3.1)的对偶变换下具有保形对称结构，而且基本场的变换也具有这种对称结构.

二、$O(3)$-σ 模 型

为后面讨论问题的需要，在本节中我们简单描述一下 $O(3)$-σ 模型场的基本性质. 对于两维非线性 $O(3)$-σ 模型，其拉氏密度 $\mathscr{L}$ 为：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8}\operatorname{tr}\left(\partial_\mu N(x)\partial^\mu N(x)\right),\quad \mu=0,1, \tag{2.1}$$

其中基本场的约束方程为：

$$N^2_{(x)}=1,\quad N(x)=\sum_{a=1}^{3}N_a(x)\sigma^a, \tag{2.2}$$

式中 $\sigma_a(a=1,2,3)$ 是 Pauli 矩阵. 引入光锥坐标 $\xi=\frac{1}{2}(t+x)$，$\eta=\frac{1}{2}(t-x)$，对(2.1)式的作用量变换，并考虑约束方程(2.2)式，则有下面的运动方程：

$$\partial_\xi A_\eta+\partial_\eta A_\xi=0, \tag{2.3}$$

上式中 $A_\mu(x)=N(x)\partial_\mu N(x)$，显然它是一个纯规范：

$$\partial_\xi A_\eta-\partial_\eta A_\xi+[A_\xi,A_\eta]=0. \tag{2.4}$$

---

* 本文是中国科学院科学基金资助课题.
本文1987年10月22日收到.

引入生成函数 $U(\gamma, \xi, \eta) = U(\gamma)$，体系的线性方程组可以写为如下形式：

$$\partial_\xi U(\gamma) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) A_\xi U(\gamma), \tag{2.5a}$$

$$\partial_\eta U(\gamma) = -\frac{1}{2}(1 - \gamma) A_\eta U(\gamma), \tag{2.5b}$$

$U(\gamma)$ 是一个矩阵函数，具有下述性质.

$$U(\gamma = 1) = 1, \quad \det U(\gamma) = 1, \tag{2.6}$$

$$A_\xi = -2\partial_\xi \dot{U}(\gamma = 1), \quad A_\eta = 2\partial_\eta \dot{U}(\gamma = 1). \tag{2.7}$$

显然，(2.3)和(2.4)两式保证线性方程(2.5)是可积的.

三、对偶变换及其守恒律

利用生成函数 $U(\gamma)$，将基本场 $N(x)$ 作如下的对偶变换：

$$\delta N(x) = [N(x), (\gamma - 1)\dot{U}(\gamma) U^{-1}_{(\gamma)}]. \tag{3.1}$$

从下面的证明将会看到，(3.1)式是体系的一个对称变换. 利用线性方程组(2.5)，得到下述两个辅助方程：

$$[A_\xi, (\gamma - 1)\dot{U}(\gamma) U^{-1}_{(\gamma)}] = \frac{2}{\gamma - 1}\partial_\xi U U^{-1} - 2\gamma \partial_\xi(\dot{U} U^{-1}), \tag{3.2a}$$

$$[A_\eta, (\gamma - 1)\dot{U}(\gamma) U^{-1}_{(\gamma)}] = -\frac{2}{\gamma - 1}\partial_\eta U U^{-1} + 2\gamma \partial_\eta(\dot{U} U^{-1}). \tag{3.2b}$$

利用上两式，可以直接得到规范势 $A_\mu(x)$ 在对偶变换(3.1)作用下的变换关系：

$$\delta A_\xi = \frac{2}{\gamma - 1}\partial_\xi U U^{-1} - (\gamma + 1)\partial_\xi(\dot{U} U^{-1}) - (\gamma - 1) N \partial_\xi(\dot{U} U^{-1}) N, \tag{3.3a}$$

$$\delta A_\eta = -\frac{2}{\gamma - 1}\partial_\eta U U^{-1} + (\gamma + 1)\partial_\eta(\dot{U} U^{-1}) - (\gamma - 1) N \partial_\eta(\dot{U} U^{-1}) N. \tag{3.3b}$$

由(3.3)式及恒等式 $N[A_\xi, A_\eta]N = [A_\xi, A_\eta]$，显然有下式成立：

$$\partial_\xi \delta A_\eta + \partial_\eta \delta A_\xi = 0. \tag{3.4}$$

上式表明：运动方程在(3.1)的对偶变换下是不变的. 利用(3.3)式，不难进一步证明：

$$\partial_\xi \delta A_\eta - \partial_\eta \delta A_\xi + [\delta A_\xi, A_\eta] + [A_\xi, \delta A_\eta] = 0. \tag{3.5}$$

上面(3.4)和(3.5)两式表明(3.1)式的对偶变换是体系的对称变换. 根据 Nöther 定理，体系的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在 (3.1) 的作用下最多改变一个全散度，并且在此变换下有守恒律存在.

我们利用拉氏密度$\mathscr{L}$在(3.1)式的作用下得到的结果来求守恒律方程. 将 (2.1) 式用 A_ξ, A_η 表述：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{8}\operatorname{tr}(A_\xi A_\eta), \tag{3.6}$$

将其作对偶变换，运用(3.3)式，显然有方程：

$$\delta \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\operatorname{tr}\{\partial_\xi(\dot{U}\partial_\eta U^{-1}) - \partial_\eta(\dot{U}\partial_\xi U^{-1})\}. \tag{3.7}$$

上式明显给出了 $\delta\mathscr{L}$ 是一个全散度．另一方面，对(2.1)直接作对偶变换，运用(3.1)式，考虑到基本场 $N(x)$ 在运动方程的壳层上，则 $\delta\mathscr{L}$ 可以写成如下形式：

$$\delta\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\operatorname{tr}\{\partial_\xi[(\gamma-1)A_\eta\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)}]+\partial_\eta[(\gamma-1)A_\xi\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)}]\}. \tag{3.8}$$

比较(3.7)和(3.8)两式，得到体系在对偶变换(3.1)下的守恒律方程：

$$\partial_\xi J_\eta(\gamma,\xi,\eta)+\partial_\eta J_\xi(\gamma,\xi,\eta)=0, \tag{3.9}$$

上式中：

$$J_\xi(\gamma,\xi,\eta)=\operatorname{tr}\left\{\frac{1}{4}(\gamma-1)A_\xi\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)}-\frac{1}{2}(\gamma+1)\dot{U}(\gamma)\partial_\xi U^{-1}_{(\gamma)}\right\}, \tag{3.10a}$$

$$J_\eta(\gamma,\xi,\eta)=\operatorname{tr}\left\{\frac{1}{4}(\gamma-1)A_\eta\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)}-\frac{1}{2}(\gamma+1)\dot{U}(\gamma)\partial_\eta U^{-1}_{(\gamma)}\right\}. \tag{3.10b}$$

若将 J_ξ, J_η 以 $(\gamma-1)$ 的幂次在 $\gamma=1$ 处展开成幂级数，则(3.9)式就确定了无穷多的非局域守恒律方程．

四、对称变换下的生成函数变换形式

将规范势 $A_\mu(x)$ 作对称变换(3.1)，则有

$$\delta A_\xi=\frac{1}{\gamma-1}[A_\xi+2\gamma\partial_\xi(\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)})], \tag{4.1a}$$

$$\delta A_\eta=\frac{1}{\gamma-1}[A_\eta-2\gamma\partial_\eta(\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)})] \tag{4.1b}$$

由上式及(2.7)式，反复运用线性方程组(2.5)，不难得到与生成函数 $U(\gamma)$ 的变换 $\delta U(\gamma)$ 有关的线性方程：

$$\partial_\xi\delta\dot{U}(\gamma=1)=\frac{1}{\gamma-1}\{\partial_\xi[\dot{U}(\gamma=1)U^{-1}_{(\gamma=1)}-\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}_{(\gamma)}]\}, \tag{4.2a}$$

$$\partial_\eta\delta\dot{U}(\gamma=1)=\frac{1}{\gamma-1}\{\partial_\eta[\dot{U}(\gamma=1)U^{-1}(\gamma=1)-\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)]\}. \tag{4.2b}$$

从上两式中，考虑到 $U(\gamma=1)=1$，我们可以猜测 $U(\gamma)$ 在对称变换下的变换形式：

$$\delta' U(\gamma)=-\frac{\gamma-1}{\gamma'-\gamma}\{\gamma'\dot{U}(\gamma')U^{-1}(\gamma')-\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)\}U(\gamma). \tag{4.3}$$

利用(4.3)式可以直接证明：

$$\partial_\xi\delta U(\gamma)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\{\delta A_\xi U(\gamma)+A_\xi\delta U(\gamma)\}, \tag{4.4a}$$

$$\partial_\eta\delta U(\gamma)=-\frac{1}{2}(1-\gamma)\{\delta A_\eta U(\gamma)+A_\eta\delta U(\gamma)\}. \tag{4.4b}$$

由此说明(4.3)是线性方程组的对称变换．

事实上，我们可以利用 Riemann-Hilbert 变换，通过适当的选择参变量函数，把(4.3)式严格地推导出来．

首先，在复参数 γ 平面上选择一个光滑的闭曲线 C，它包含 $\gamma=1$ 的点但不包含原

点 $(\gamma=0)$. 对于给定的 $U(\gamma,\xi,\eta)$，除在 $\gamma=0$ 及∞处奇异外，在 $C+C_\pm$ 上解析. $C_\pm$ 是C 的内外两部分.

其次，在γ复平面上定义一个标函数 $v(\gamma)$，它仅是γ的函数，在 $C+C_-$ 上全纯，在 C_+ 上有奇点，并且 $\gamma\to 0$ 时 $v(\gamma)\to\gamma$，$\gamma\to\infty$ 时 $v(\gamma)\to\gamma$.

现在定义一个矩阵核函数：

$$G(\gamma)=U(\gamma)U^{-1}(v(\gamma)), \tag{4.5}$$

这样 Riemann-Hilbert 问题就可以完全确定下式：

$$\chi_-(\gamma)=\chi_+(\gamma)G(\gamma), \quad \text{on } C \tag{4.6}$$

上式中 $\chi_\pm(\gamma)$ 在 $C_\pm$ 上解析，且 $\chi_+(\gamma=1)=1$.

利用(4.5)和(4.6)式，我们定义：

$$U'(\gamma)=\chi_+(\gamma)U(\gamma), \quad \text{in } C_+ \tag{4.7}$$

$$=\chi_-(\gamma)U(v(\gamma)), \quad \text{in } C_- \tag{4.8}$$

显然在C上两式是相容的. 利用 $\chi_-(\gamma)$ 在 C_- 上的解析性，由(4.8)及 Cauchy 定理显然可以构造：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{U'(\gamma')U^{-1}(v(\gamma'))}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma'=0. \tag{4.9}$$

考虑无穷小变换时，我们取标函数 $v(\gamma)$ 的一个小变换：

$$\delta v(\gamma)=v(\gamma)-\gamma, \tag{4.10}$$

并定义生成函数 $U(\gamma)$ 的变换为：

$$\delta U(\gamma)=U'(\gamma)-U(\gamma). \tag{4.11}$$

运用(4.10)及(4.11)两式，考虑到

$$U'(\gamma)U^{-1}(v(\gamma))=1+\delta U(\gamma)U^{-1}(\gamma)+U(\gamma)\dot{U}(\gamma)\delta v(\gamma), \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma'=0, \tag{4.13}$$

并规定 $\delta U(\gamma=1)=0$，则 $U(\gamma)$ 的变换形式可以表达为：

$$\delta U(\gamma)=\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_c \frac{\delta v(\gamma)\dot{U}(\gamma')U^{-1}(\gamma')}{(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)}d\gamma' U(\gamma). \tag{4.14}$$

由标函数 $v(\gamma)$ 的性质，可以不失一般性地选择

$$\delta^{(n)}v(\gamma)=-\gamma(\gamma-1)^{-n}, \quad n\geqslant 0 \tag{4.15}$$

由此得到：

$$\delta^{(n)}U(\gamma)=-\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_c \frac{\gamma'(\gamma'-1)^{-n-1}}{\gamma'-\gamma}\dot{U}(\gamma')U^{-1}(\gamma')d\gamma' U(\gamma), \tag{4.16}$$

在(4.15)和(4.16)两式右边省略了一个无穷小常数积. 引入新的参数 γ'，并定义

$$\delta' U(\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{(n)}U(\gamma)(\gamma'-1)^n,$$

则(4.16)式就可写成：

$$\delta' U(\gamma)=-\frac{\gamma-1}{\gamma'-\gamma}\{\gamma'\dot{U}(\gamma')U^{-1}(\gamma')-\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)\}U(\gamma). \tag{4.3}$$

这正是前面猜到的 $U(\gamma)$ 的变换形式.

五、保形对称结构

利用生成函数及基本场的具体变换形式讨论作用算子间的代数结构是很方便的. 考虑到 $U(\gamma)$ 及 $\dot{U}(\gamma)$ 在 C 上的解析性质,故定义:

$$\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma-1)^{n}V_{(x)}^{(n)}, \tag{5.1}$$

$$V_{(x)}^{(n)} = 0, \quad \text{if} \quad n < 0, \tag{5.2}$$

上式中的 $V_{(x)}^{(n)}$ 是矩阵函数,只依赖于 ξ, η 而与参数 γ 无关. 将(5.1)式代入(4.16)式完成积分后得到:

$$\delta^{(n)}U(\gamma) = -\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma-1)^{s+1}[V_{(x)}^{(n+s)} + V_{(x)}^{(n+s+1)}]U(\gamma). \tag{5.3}$$

注意到恒等式:

$$[\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma), \dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)] = 0, \tag{5.4}$$

应用(5.1)式将其展开成 $(\gamma-1)^{n}$ 的幂级数后得到其各次幂的系数为零,从而有:

$$[V_{(x)}^{(n)}, V_{(x)}^{(m)}] = 0. \quad (m, n \in Z) \tag{5.5}$$

对(5.1)式作变换,反复运用(5.3)式,故

$$\delta^{(n)}V_{(x)}^{(m)} = -(n+1)[V_{(x)}^{(n+m)} + V_{(x)}^{(n+m+1)}]. \tag{5.6}$$

有了(5.3)、(5.5)和(5.6)三式后,立刻得到:

$$[\delta^{(n)}, \delta^{(m)}]U(\gamma) = (n-m)\{\delta^{(n+m)} + \delta^{(n+m+1)}\}U(\gamma). \tag{5.7}$$

若定义

$$L_{m}U(\gamma) = -\frac{\gamma-1}{2\pi i}\int_{C}\frac{(\gamma'-1)^{-m}}{\gamma'-\gamma}\dot{U}(\gamma')U^{-1}(\gamma')d\gamma' U(\gamma), \tag{5.8}$$

则 $\delta^{(n)}U(\gamma)$ 可以表示成 $L_{n}U(\gamma)$ 的线性组合:

$$\delta^{(n)}U(\gamma) = (L_{n+1} + L_{n})U(\gamma), \tag{5.9}$$

并且有关系式:

$$[L_{n}, L_{m}]U(\gamma) = (n-m)L_{n+m}U(\gamma). \tag{5.10}$$

因此 L_{n} 这种算子对 $U(\gamma)$ 的作用能构造出 Virasoro 代数. 由此可见,由(4.16)式定义的算子 $\delta^{(n)}$ 对生成函数 $U(\gamma)$ 作用所构造出的代数是一个与 Virasoro 代数相关的无穷维李代数.

对于基本场 $N(x)$, 利用(5.1)式, 将对偶变换(3.1)式两边展开成 $(\gamma-1)^{n}$ 的幂级数,从而得到相应的系数之间关系:

$$\delta^{(n)}N_{(x)} = [N_{(x)}, V_{(x)}^{(n-1)}], \tag{5.11}$$

再考虑到(5.5)和(5.6)两式,则可得到作用在基本场 $N_{(x)}$ 上的算子间的代数关系:

$$[\delta^{(n)}, \delta^{(m)}]N_{(x)} = (n-m)\{\delta^{(n+m)} + \delta^{(n+m+1)}\}N_{(x)}. \tag{5.12}$$

因此在 $O(3)$ 非线性 σ 模型中,不仅算子 $\delta^{(n)}$ 对生成函数 $U(\gamma)$ 作用能给出一个无穷维李代数结构, 而且对于有物理意义的基本场 $N_{(x)}$, 算子 $\delta^{(n)}$ 对它的作用也能构造出这种

代数结构，这将有助于我们从已知的基本场 $N_{(x)}$，构造出满足运动方程的新的基本场 $N'_{(x)}$，这正是一个理论物理工作者所希望的.

另外,我们可以证明体系还具有下面的对称变换[20]:

$$\delta_\alpha N_{(x)} = [N_{(x)},\ U_{(\gamma)}\tau_2 U^{-1}{}_{(\gamma)}]. \tag{5.13}$$

类似第四节中的讨论,我们能够找到生成函数在(5.13)变换下的变换形式:

$$\delta'_\alpha U(\gamma) = \frac{\gamma-1}{\gamma-\gamma'}\{U(\gamma')\tau_\alpha U^{-1}(\gamma') - U(\gamma)\tau_\alpha U^{-1}(\gamma)\}U(\gamma), \tag{5.14}$$

上式中 $\tau_\alpha = \sigma_a\alpha^a$. 类似前面定义 $\delta'_\alpha U(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma'-1)^n\delta_\alpha^{(n)}U(\gamma)$，则可以得到 Kac-Moody 的代数结构:

$$[\delta_\alpha^{(n)},\ \delta_\beta^{(m)}]U(\gamma) = f^\gamma_{\alpha\beta}\delta_\gamma^{(n+m)}U(\gamma), \tag{5.15}$$

式中 $f^\gamma_{\alpha\beta}$ 是结构常数. 由 $U(\gamma)$ 和 $U^{-1}(\gamma)$ 的解析性质定义:

$$U(\gamma)\tau_\alpha U^{-1}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma-1)^n\tau_\alpha^{(n)}(x), \tag{5.16}$$

$$\tau_\alpha^{(n)}(x) = \tau_\alpha\delta_{n0}, \quad \text{if } n \leqslant 0, \tag{5.17}$$

则由(5.13)和(5.14)可得:

$$\delta_\alpha^{(n)}N_{(x)} = [N_{(x)},\ \tau^{(n)}_{\alpha(x)}], \tag{5.18}$$

$$\delta_\alpha^{(n)}\tau_\beta^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty}[\tau_\alpha^{(n+m+1)},\ \tau_\beta^{(m-n-1)}], \tag{5.19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[\tau_\alpha^{(n-m)},\ \tau_\beta^{(m)}] = f^\gamma_{\alpha\beta}\tau_\gamma^{(n)}. \tag{5.20}$$

利用上面三式,很容易得到:

$$[\delta_\alpha^{(n)},\ \delta_\beta^{(m)}]N(x) = f^\gamma_{\alpha\beta}\delta_\gamma^{(n+m)}N(x). \tag{5.21}$$

上式说明由(5.13)式定义的作用算子 $\delta_\alpha^{(n)}$ 对基本场的作用也构造出了 Kac-Moody 的代数关系.

对于上述两种对称结构,我们通过直接计算得到它们的半直积关系:

对于生成函数 $U(\gamma)$:

$$[\delta_\alpha^{(n)},\ \delta_\beta^{(m)}]U(\gamma) = f^\gamma_{\alpha\beta}\delta_\gamma^{(n+m)}U(\gamma), \tag{5.22a}$$

$$[\delta_\alpha^{(m)},\ \delta^{(n)}]U(\gamma) = \{n\delta_\alpha^{(n+m)} + (n+1)\delta_\alpha^{(n+1+m)}\}U(\gamma), \tag{5.22b}$$

$$[\delta^{(n)},\ \delta^{(m)}]U(\gamma) = (n-m)\{\delta^{(n+m)} + \delta^{(n+m+1)}\}U(\gamma). \tag{5.22c}$$

对于基本场 $N(x)$:

$$[\delta_\alpha^{(n)},\ \delta_\beta^{(m)}]N(x) = f^\gamma_{\alpha\beta}\delta_\gamma^{(n+m)}N(x), \tag{5.23a}$$

$$[\delta_\alpha^{(m)},\ \delta^{(n)}]N(x) = \{n\delta_\alpha^{(n+m)} + (n+1)\delta_\alpha^{(n+1+m)}\}N(x), \tag{5.23b}$$

$$[\delta^{(n)},\ \delta^{(m)}]N(x) = (n-m)\{\delta^{(n+m)} + \delta^{(n+m+1)}\}N(x). \tag{5.23c}$$

上面(5.22)及(5.23)两式的结果显然说明了，在 $O(3)$ 非线性 σ 模型中具有隐藏的保形对称性.

六、Bianchi-Bäcklund 变换

Bianchi-Bäcklund 变换有人将其分为两种情况：一种是由一个方程的解变换成另外一个方程的解；另一种是由同一组方程的解变换成本组方程的另外一个解。本节讨论的属于后一种情况。

对于 $N'(x)=N(x)+\delta N(x)$，显然有下式：

$$N'(x)\partial_\xi N'(x)-N(x)\partial_\xi N(x)=\delta A_\xi. \tag{6.1}$$

同样对 η 分量有：

$$N'(x)\partial_\eta N'(x)-N(x)\partial_\eta N(x)=\delta A_\eta. \tag{6.2}$$

在对偶变换(3.1)下，利用(4.1)及线性方程组(2.5)，则可以得到此变换下的 Bianchi-Bäcklund 变换：

$$N'(x)\partial_\xi N'(x)-N(x)\partial_\xi N(x)=\frac{2}{\gamma-1}\partial_\xi\{\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)-\dot{U}(\gamma=1)\}, \tag{6.3a}$$

$$N'(x)\partial_\eta N'(x)-N(x)\partial_\eta N(x)=-\frac{2}{\gamma-1}\partial_\eta\{\gamma\dot{U}(\gamma)U^{-1}(\gamma)-\dot{U}(\gamma=1)\}. \tag{6.3b}$$

另外，对于(5.13)的对称变换，运用(2.5)式则有：

$$\partial_\xi \Lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)[\Lambda, A_\xi], \tag{6.4a}$$

$$\partial_\eta \Lambda=\frac{1}{2}(1-\gamma)[\Lambda, A_\eta], \tag{6.4b}$$

上式中 $\Lambda=U(\gamma)\tau_a U^{-1}(\gamma)$，$\tau_a^+=-\tau_a$. 利用(6.4)，注意到

$$N\partial_\xi \Lambda N(x)=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\partial_\xi[N'(x)N(x)+\Lambda(\gamma)], \tag{6.5a}$$

$$N(x)\partial_\eta \Lambda N(x)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\partial_\eta[N'(x)N(x)+\Lambda(\gamma)], \tag{6.5b}$$

则可以得到(5.13)的变换下的 Bianchi-Bäcklund 变换：

$$\begin{aligned}&N'(x)\partial_\xi N'(x)-N(x)\partial_\xi N(x)\\&=\partial_\xi\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}N'(x)N(x)-\frac{4\gamma}{\gamma^2-1}U(\gamma)\tau_a U^{-1}(\gamma)\right\},\\&N'(x)\partial_\eta N'(x)-N(x)\partial_\eta N(x)=\\&-\partial_\eta\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}N'(x)N(x)-\frac{4\gamma}{\gamma^2-1}U(\gamma)\tau_a U^{-1}(\gamma)\right\}.\end{aligned} \tag{6.6a,b}$$

从上面可以看出，对于不同的对称变换，我们可以找到相应的 Bianchi-Bäcklund 变换[9].

结束语：本文较详细地讨论了该模型的对称性问题，具体得到了生成函数及基本场无穷小作用算子间的代数结构，并得到了两种代数间的半直积，讨论了相应的 Bianchi-Bäc-

klund 变换．作者感谢侯伯宇教授和王佩教授的鼓励和支持，特别是王佩教授阅读了手稿并提出建设性意见．

参　考　文　献

[1] L. Dolan, A. Roos, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 2018.
[2] B. Y. Hou, Yalepreprint 80—29(1980), (unpublished); B. Y. Hou, M. L. ge and Y. S. Wu, *Phys. Rev.*, **D24** (1981), 2238.
[3] L. Dolan, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1371.
[4] M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Lett.*, **B108**(1982), 411.
[5] C. Devchand and D. B. Fairlie, *Nucl. Phys.*, **B194**(1982), 232.
[6] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys. Lett.*, **B117**(1982), 208.
[7] Y. S. Wu, Nucl. Phys. B211, (1983), 160; *Commun. Math. Phys.*, **90**(1983), 461.
[8] P. Forgacs, Z. Haruath and L. Palla, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 1876.
[9] L. L. Chau, M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 1080; 1086.
[10] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys. Lett.*, **B109**(1982), 273.
[11] L. L. Chau, Y. S. Wu, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 3581.
[12] L. L. Chau, M. L. Ge, A. Sinha and Y. S. Wu, *Phys. Lett.*, **B121**(1983), 391.
[13] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **12**(1971), 918; **13**(1972), 394.
[14] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 1926; **19**(1978), 1926.
[15] I. Hauser and F. J. Erenst, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1126.
[16] Y. S. Wu and M. L. Ge, *J. Math. Phys.*, **24**(1983), 1187.
[17] B. Y. Hou and W. Li, NWU-IMP-86-7, (1986); *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 1.
[18] B. Y. Hou and W. Li, *to appear in J. Phys.* **A20**(1987).
[19] B. Y. Hou and W. Li, NWU-IMP-87-20, (1987).
[20] B. Y. Hou, *J. Math. Phys.*, **25**(1984), 2325.
[21] W. Li, NWU-IMP-87-21, (1987).

SYMMETRIES OF CONFORMAL TRANSFORMATION FOR SPECTRAL PARAMETER

Hao Sanru　Li Wei

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an)

Abstract

The symmetry of $O(3)$ non-linear sigma model under a dual transformation is discussed and the origin of the transformation of generating functions is explored; Existence of the infinite dimensional conformal symmetries is confirmed. We obtain the infinite dimensional Lie algebraic structure of the basic fields and the semi-product algebraic relation of the two kinds of algebra. The corresponding Bianchi-Backlund transformations are given.