第 13 卷 第 1 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 13, No. 1
1989 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1989

## 快报

# 玻色弦 BRST 形式的辛结构和量子化

虞　　跃
（中国科学院高能物理研究所，北京）

**摘　　要**

本文用限制 $\tilde{J}^1Y$ 到它的拉格朗日子流形的方法给出玻色弦的辛结构并讨论 BRST 形式的几何量子化．我们可以看到，共形反常在 $G_0' = G_0/H$ 上的 BRST 真空丛的曲率为零时相消．

弦的共形反常可以看作 Diff $s^1/s^1$ 上全纯 Fock 丛的曲率已经有许多文章作了讨论[1,2]．为了消除反常，通常需要引入另外的结构，比如引入一个全纯鬼真空丛[2]或正则线丛[1]．反常在 Diff $s^1/s^1$ 上的全纯 Fock 丛和全纯鬼真空丛(或正则线丛)的直积丛的曲率为零时相消．在这篇文章中，我们希望通过几何量子化方法对玻色弦的 BRST 形式作量子化来引入一个 $G_0' = G_0/H$ 上的全纯 BRST 真空丛，并证明反常相消条件是这个丛的曲率为零．这里 $G_0$ 是弦的重参数化变换群，$H$ 是 $L_0$ 生成的一个单参子群．

为了方便，我们只讨论玻色开弦． 设 $q_\mu(\xi^\alpha)$ 是弦坐标，$\xi^\alpha$，$\alpha = 1, 2$，是二维世界面坐标，$g_{\alpha\beta}$ 是世界面的度规．这时，位形丛 $Q$ 可用局域坐标 $(\xi^\alpha;\ q^\mu,\ g_{\alpha\beta})$ 来描述．正如我们在 [3] 中所做的，相丛 $Y = (Y_\xi, Q_\xi, \pi_\xi)$ 的局域坐标是 $(\xi^\alpha;\ q^\mu,\ g^{\alpha\beta}, H^{\mu\alpha}, H^\alpha_{\beta\gamma})$． 这时，$Y$ 上的一个个形式可通过沿世界面上的一条初始曲线 $\Sigma$ 的积分定义

$$\omega = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha(\delta H^{\mu\alpha}\Lambda\delta q_\mu + \delta H^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda\delta g^{\beta\gamma}) \tag{1}$$

运动方程，约束条件和拉氏量都可以通过定义一个 $\tilde{J}^1Y$ 的由拉氏量 $\mathscr{L}$ 生成的拉格朗日子流形 $N$ 来得到[3]．这里 $\tilde{J}^1Y$ 是 $J^1Y$ 的一个商丛[3]．子流形 $N$ 定义为

$$d\omega|_N = 0,\ \dim N = \frac{1}{2}\dim \tilde{J}^1Y \tag{2}$$

这时，我们就有(2)的满足定义协变性的解

$$\begin{aligned} H^{\mu\alpha} &= \sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\beta q^\mu \\ H^\alpha_{\beta\gamma} &= \sqrt{g}\,(\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} - \Gamma^\lambda_{\beta\lambda}\delta^\alpha_\lambda) - \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g_{\beta\gamma}(\Gamma^\alpha_{\rho\lambda}g^{\rho\lambda} - \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}g^{\alpha\rho}) \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 是二维世界面上的 Levi-Civita 连络。$q^\mu$ 和 $g^{\alpha\beta}$ 满足运动方程和约束条件

---

本文 1988 年 6 月 14 日收到.

$$\partial_\alpha(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\beta q) = 0$$

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha q\partial^\beta q - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\gamma q)^2 = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}R = 0 \tag{4}$$

拉氏量

$$\mathscr{L} = \sqrt{g}\,(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha q\partial_\beta q + R) \tag{5}$$

由

$$d\theta|_N = \delta\mathscr{L} \tag{6a}$$

$$\theta = \delta\omega \tag{6b}$$

给出. $R^{\alpha\beta}$ 和 $R$ 分别表示 Ricci 张量和曲率标量.

但是由于 2 形式(1)在重参数化群 $G$ 方向是简并的,所以我们必须做规范固定. 一个常用的办法是固定部分对称性,使得新的 2 形式中的简并可以由约束给出. 比如,取共形规范,这时, $\tilde{Q}_\xi = \{q(\xi),\ g_0^{\alpha\beta}(\xi),\ h(\xi)\}$, 其中 $h(\xi) = \exp\varepsilon^\alpha L_\alpha$ 是共形变换群 $G_0$ 的元; $g_0^{\alpha\beta}(\xi)$ 是世界面上所有只相差一个共形变换的度规的等价类中的一个代表元. 若令 $\varepsilon^\alpha(\xi) = vc^\alpha(\xi)$, 其中 $v$ 是一个 Grassmannian 值的常数, $C^\alpha(\xi)$ 是一个 Grassmannian 场. 这时, $h(\xi)$ 可用 $C^\alpha(\xi)$ 来代替,同时为了构造一个有物理意义的拉氏量,我们必须引入另一个 Grassmannian 值的坐标 $\bar{C}_{\alpha\beta}$. 这是一个二阶反对称无迹张量. 这时 $\tilde{Q}_\xi = \{(q(\xi), g_0^{\alpha\beta}(\xi), C^\alpha(\xi), \bar{C}_{\alpha\beta}(\xi))\}$, 相应的 $\tilde{Y}$ 上可以定义一个 2 形式

$$\begin{aligned}\omega_0 = \omega'|_{g^{\alpha\beta}\to g_0^{\alpha\beta}} = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha(&\delta H^{\mu\alpha}\Lambda\delta q_\mu + \delta H^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda\delta g^{\beta\gamma} + \delta\bar{H}^\alpha_\beta\Lambda\delta C^\alpha \\ &+ \delta\bar{H}^{\alpha\beta\gamma}\Lambda\delta\bar{C}_{\beta\gamma})|_{g^{\alpha\beta}\to g_0^{\alpha\beta}}\end{aligned} \tag{7}$$

若取 $g_0^{\alpha\beta} = e^{\rho(\xi)}\eta^{\alpha\beta}$, 可以发现(7)的一个 BRST 不变和共形不变的解是

$$\partial^\alpha\partial_\alpha q = 0,\quad \mathscr{D}^\alpha_\beta C^\beta = 0,\quad \mathscr{D}^\alpha_\beta\bar{C}_\alpha = 0 \tag{8a}$$

$$T_0^{\alpha\beta} = \partial^\alpha q\partial^\beta q - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\gamma q)^2 - 2i\bar{C}_{\beta\gamma}\partial_\alpha C^\gamma - iC_\gamma\partial^\gamma\bar{C}_{\alpha\beta} = 0 \tag{8b}$$

其中 $\bar{C}^0 \equiv \bar{C}^{01} = \bar{C}^{10}$, $\bar{C}^1 \equiv \bar{C}_{00} = \bar{C}_{11}$, $\mathscr{D}^\alpha_\beta = \begin{pmatrix}\partial_1 & -\partial_0 \\ -\partial_0 & \partial_1\end{pmatrix}$.

$$\omega_0 = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha(\delta(\partial^\alpha q)\Lambda\delta q + i\delta\bar{C}^{\alpha\beta}\Lambda\delta C_\beta) \tag{9}$$

由于 $d\omega_0 = 0$, 所以,我们可以取 $\Sigma$ 是一条等时曲线,例如, $\tau = 0$. 这时,傅立叶展开是

$$\begin{aligned}&q(\sigma) = q_0 + i\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\alpha_m\cos m\sigma,\quad \dot{q}(\sigma) = p_0 + \sum_{m\neq 0}\alpha_m\cos m\sigma \\ &C^0(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\cos m\sigma,\quad C'(\sigma) = -i\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\sin m\sigma \\ &\bar{C}_{00}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\bar{C}_m\cos m\sigma,\quad \bar{C}_{01}(\sigma) = -i\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\bar{C}_m\sin m\sigma\end{aligned} \tag{10}$$

$\omega_0$ 可表为

$$\omega_0 = \delta p_0\Lambda\delta q_0 + i\sum_{m=1}\frac{1}{m}\delta\alpha_m\Lambda\delta\alpha_m^+ + i\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\bar{C}_m\Lambda\delta C_{-m} \tag{11}$$

设 $f$ 是 $\tilde{Y}$ 上的 $C^\infty$ 函数,则其相应的哈密顿矢量场由下式定义

$$\omega_0(X_f) = -\delta f \tag{12}$$

注意,由于 Grassman 数的存在,收缩的次序必须固定

$$\alpha(X) = X^i \alpha_i \tag{13}$$

其中 $\alpha_i$, $X^i$ 分别是 $\tilde{Y}$ 上的 1 形式 $\alpha$ 和矢量场 $X$ 的分量. 对任意 $f,g \in C^\infty(\tilde{Y})$, 它们的泊松括号定义为

$$\omega_0(X_f, X_g) = -\{f, g\}_{P.B.} \tag{14}$$

约束 (8b) 在傅立叶展开下等价于

$$T_0^{00} + T_0^{11} + 2T_0^{01} = -2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{L}_n e^{-in\sigma} = 0 \tag{15}$$

其中

$$\tilde{L}_n = L_n + L_n^{gh} \tag{16a}$$

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \alpha_m \tag{16b}$$

$$L_n^{gh} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m-n) \bar{C}_{n+m} C_{-m} \tag{16c}$$

$\tilde{L}_n$ 满足共形代数

$$\{\tilde{L}_n, \tilde{L}_n\} = -i(n-m) \tilde{L}_{n+m} \tag{17}$$

$L_n$, $L_n^{gh}$ 分别相应于弦和鬼的共形代数的生成元,它们各自都满足(17).

现在,我们可以看到约束(15)正好给出 $\omega_0$ 中在共形变换群上的简并方向. 因此, 对经典体系 $(\tilde{Y}, \omega_0)$ 可以用几何量子化[4] 程序进行量子化. 在极化 $F = \left\{\frac{\delta}{\delta z_m^+}, \frac{\delta}{\delta \bar{C}_n}; m \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}\right\}$ 下, Fock 空间 $\mathscr{H}_F$ 是

$$\mathscr{H}_F = \{f(z_m, c_m),\ m \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z} \mid (\hat{Q}^F_{\tilde{L}_n} - \beta\delta_{n,0}) f = 0\} \tag{18}$$

其中[6]

$$\begin{aligned}
\hat{O}^F_{\tilde{L}_n} &= \hat{O}^F_{L_n} + \hat{O}^F_{L_n^{gh}} \\
\hat{O}^F_{L_n} &= -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} :\hat{O}^F_{\alpha_{n-m}} \hat{O}^F_{\alpha_m}: - \beta\delta_{n,0} \\
\hat{O}^F_{L_n^{gh}} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (n-m) :\hat{O}^F_{C_{-m}} \hat{O}^F_{\bar{C}_{n+m}}:
\end{aligned} \tag{19}$$

这里

$$\begin{aligned}
&\hat{O}^F_{\alpha_0} = \delta/\delta z_0 + z_0,\ \hat{O}^F_{\alpha_{-m}} = \sqrt{m}\, z_m,\ \hat{O}^F_{\alpha_m} = \sqrt{m}\, \delta/\delta z_m,\ m > 0 \\
&\hat{O}^F_{C_n} = C_n,\ \hat{O}^F_{\bar{C}_n} = \delta/\delta_{c_{-n}}\ n \in \mathbb{Z} \\
&z_0 = \frac{1}{2}(p_0 + iq_0),\ z_0^* = \frac{1}{2}(p_0 - iq_0)
\end{aligned} \tag{20}$$

$$z_m = \alpha_m^*/\sqrt{m}, \quad z_m^* = \alpha_m/\sqrt{m} \quad m > 0$$

在(18)中，关于弦部分的真空态 $|s\rangle$ 是

$$\hat{O}^F_{\alpha_m}|s\rangle = 0, \quad m > 0 \tag{21}$$

但关于鬼部分，真空是任意取的

$$\begin{aligned} \hat{O}^F_{C_m}|g\rangle_N &= 0 \quad m \geqslant -N \\ \hat{O}^F_{\bar{C}_m}|g\rangle_N &= 0 \quad m > N+1 \end{aligned} \tag{22}$$

这里 $-\infty \leqslant N \leqslant +\infty$ 称为真空的级（$|eve|$）．整个真空是

$$|0\rangle_N = |s\rangle \otimes |g\rangle_N \tag{23}$$

这时，

$$\begin{aligned} &[\hat{O}^F_{L_n}, \hat{O}^F_{L_m}] - (n-m)\hat{O}^F_{L_{n+m}} \\ &= \left\{\frac{d}{12}(n^3 - \beta n) - \frac{1}{6}[13n^3 - (6N^2 + 6N + 1)n]\right\}\delta_{n+m_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

要消去(24)中的反常，$N$ 必须是有限整数． 若要求真空 $|s\rangle$ 和 $|g\rangle_N$ 分别是 $SL(2,\mathbb{C})$ 不变的[5]，则要求 $\beta = 1$，$N = 1$．于是(24)中的反常在 $\alpha = 26$，$\beta = 1$，$N = 1$ 时相消。

以上结果告诉我们，一个共形不变的 BRST Fock 空间 $\mathscr{H}^B_F$ 是一个 $N = 1$ 的 $\tilde{Y}$ 上的全纯线丛上的截面空间． 通过 $\hat{O}^F_{q(\sigma)}$，$\hat{O}^F_{C(\sigma)}$，$\hat{O}^F_{\bar{C}(\sigma)}$ 到 $\hat{O}^F_{q(\sigma')}$，$\hat{O}^F_{C(\sigma')}$，$\hat{O}^F_{\bar{C}(\sigma')}$ 的共形变换，我们可以定义 $G_0' = G_0/H$ 上的一个全纯线丛．这时[2]

$$\left.\begin{aligned} z_n' &= \sum_{m=1}^{\infty} a^*_{nm} z_m + b^*_{nm}\delta/\delta z_m \\ \delta/\delta z_n' &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\delta/\delta z_m + b_{nm} z_m \end{aligned}\right\} \quad n > 0 \tag{25a}$$

$$c_k' = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{km} c_m, \quad \delta/\delta c'_{-k} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{km}\delta/\delta c_{-m} \tag{25b}$$

类似于 Pilch 和 Warner[2] 的讨论，我们可以定义 $G_0' = G_0/H$ 上的一个全纯 BRST 真空丛上的(1,0)连络 $\Gamma$，其连络矩阵是

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{nm} & \\ & \Gamma^{(n)}_{kl} \end{pmatrix} \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= a^{-1}_{nl} b_{lm} \\ \Gamma^{(N)}_{kl} &= \sum_{m=-N}^{\infty} C^{-1}_{-lm} C_{mk} = -\sum_{m=N+1}^{\infty} B^{-1}_{-km} B_{ml}; \quad \begin{aligned} k &\leqslant -(N+1) \\ l &\leqslant N \end{aligned} \end{aligned} \tag{27}$$

由于 $G_0'$ 的切空间等于 $\mathrm{Diff}s^1/s^1$ 的切空间，所以在 $\Gamma = \Gamma^* = 0$，(27) 对应的曲率与 Pilch 和 Warner 的结果相同[2]

$$\begin{aligned} F(\hat{O}^F_{L_n}, \hat{O}^F_{L_m}) = &-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^*(\hat{O}^F_{L_n})\gamma(\hat{O}^F_{L_m}) - \gamma^*(\hat{O}^F_{L_m})\gamma(\hat{O}^F_{L_n})] \\ &- \mathrm{Tr}[\Gamma^{(N)}(\hat{O}^F_{L_n})\Gamma^{(-N-1)*}(\hat{O}^F_{L_m})] \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{d}{12}(n^3 - \beta n) - \frac{1}{6}(13n^3 - (6N^2 + 6N + 1)n) \right\} \delta_{m+n,0} \qquad (28)$$

比较(28)和(24),我们可以看到, BRST Fock 空间 $\mathscr{H}_F^B$ 中的共形反常可以看作 $G_0'$ 上的全纯 BRST 真空丛 $(N = 1)$ 上的曲率. 反常在 $d = 26$, $\beta = 1$ 时,即曲率为零时相消.

以上的讨论可以直接推广到玻色闭弦和 RNS 弦.

## 参 考 文 献


[1] M. Bowick and S. G. Rajeev, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 353; *Nucl. Phys.*, **B293**(1987), 348; D. Harari, D. K. Hong, P. Ramond and V. G. Rodgers, *Nucl. Phys.*, **B294**(1987), 556.

[2] J. Mickelsson, *Commun. Math. Phys.*, **112**(1987), 6653; Z. Y. Zhao, K. Wu and T. Saito, *Phys. Lett.*, **B199**(1987), 37; K. Pilch and N. P. Warner, *Class. Quant. Grav.*, **4**(1987), 1183.

[3] W. Chen and Y. Yu, BIHEP preprint, BIHEP-TH-88-21.

[4] N. J. Woodhouse, Geometric Quantization (Clarendon Press, Oxford, UK. 1980); J. Sniatycki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics (Springer-Verlag, New York 1980).

[5] P. Friedan, E. Martinic and S. Schenker, *Nucl. Phys.*, **B271**(1986), 93.

[6] Y. Yu and H. Y. Guo, BIHEP preprint, BIHEP-TH-88-14. 虞跃,郭汉英,关于玻色弦的几何量子化(一)(二),高能物理与核物理,待发表.


# SYMPLECTIC STRUCTURES AND QUANTIZATION FOR BOSONIC STRINGS IN BRST FORMALISM


YU YUE

*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)*



ABSTRACT

The sympletic structures for bosonic strings are given by the method restricting $\tilde{J}^1 Y$ to its Lagrangian submanifold and geometric quantization in BRST formulation for strings is discussed. It is found that conformal anomaly is cancelled when curvature of BRST vacuum bundle on $G_0' = G_0/H$ vanishes.