

快报

2+1 维 $SU(2)$ 格点胶球质量的 变分计算

郑维宏 郭硕鸿

(中山大学, 广州)

摘 要

本文对具有严格基态解和正确经典连续极限的格点规范哈密顿量, 采用变分法, 计算了 2+1 维 $SU(2)$ 规范群的胶球质量, 得到在 $1.3 \leq 1/g^2 \leq 7$ 范围内, 标度行为是 $am = 2.28g^2$, 这与弱耦合展开及另一没有正确连续极限的哈密顿量的结果一致。

格点规范理论提供了一种计算非微扰效应的重整化方案。最近, 我们提出了一种具有准确基态的格点哈密顿量 H_1 ^[1]:

$$H_1 = \frac{g^2}{2a} \exp(-R_1) E_i^a \exp(2R_1) E_i^a \exp(-R_1) \quad (1)$$

其中 $R_1 = \frac{1}{2g^2 c_N} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)$, c_N 为 $SU(N)$ 群基础表示的 Casimir 不变量。

应用 H_1 , 我们已经计算了 2+1 维 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 规范场的胶球质量^[2-4], 说明了应用具有严格准确基态解的格点规范哈密顿量研究胶球质量是有效的。

已有一些文章^[6-11]对 2+1 维 $SU(2)$ 规范场的胶球质量作了讨论。弱耦合展开^[6]得到 $a \sim g^2$ 的标度行为, Monte Carlo 方法的最新结果是在 $4.5 \leq 4/g^2 \leq 5.5$ 范围内获得 $am = (2.15 \pm 0.2)g^2$ 的标度行为^[10]。而我们应用 H_1 计算 2+1 维 $SU(2)$ 规范场的胶球质量^[3], 得到能深入到深度弱耦合区 $1/g^2 \sim 7$ 的标度行为: $am = 2.28g^2$ 。

然而, 由于 2+1 维 $SU(N)$ 规范场的标度行为是 $a \sim g^2$, ($g^2 = e^2 a$, e 为荷), 对 2+1 维非阿贝尔 $SU(N)$ 群, 我们不能证明 $a \rightarrow 0$ 时, H_1 的连续极限与 Wilson 作用量相同(但最多相差一个有限量)。

最近, 我们又提出了一种具有准确基态的格点哈密顿量的新形式, 并找到了在 2+1、3+1 维都具有正确连续极限的哈密顿量^[5]。对于 $SU(2)$ 群, 它是:

$$H_2 = \frac{g^2}{2a} e^{-R} E_i^a e^{2R} E_i^a e^{-R} \quad (2)$$

* 此项研究得到国家教委科学基金和中山大学高等学术中心基金会资助。
本文 1988 年 5 月 16 日收到。

其中 $R = \frac{x}{2} \text{Tr} U_\rho + \frac{y}{2} (\text{Tr} U_\rho)^2$, $x = -8/5g^4$, $y = 2/5g^4$.

它的准确基态是:

$$|\Psi_0\rangle = e^R |0\rangle \quad (3)$$

其中 $|0\rangle$ 由 $E_l |0\rangle = 0$ 定义, 基态能量 $E_0 = 0$.

$SU(2)$ 群规范场的最低激发态为 $J^{pc} = 0^{++}$ 态, 对于此态, 我们选取变分态:

$$\Phi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{r}} \text{Tr} U_{n\rho}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

其中 $U_{n\rho}(\mathbf{x})$ 表示一个端点在 \mathbf{x} 处的 $n \times n$ 矩形 Wilson 圈, $n = 1, 2, \dots, N$, N 为变分态个数.

胶球质量归结为计算本征值方程^[3]:

$$\det \|W_{mn} - \lambda D_{mn}\| = 0 \quad (5)$$

式中

$$W_{mn} = - \left\langle \sum_{l \neq \mathbf{x}} [E_l^a, \Phi_m(0)] [E_l^a, \Phi_n(\mathbf{x})] \right\rangle_0 \quad (6)$$

$$D_{mn} = \left\langle \sum_{\mathbf{x}} \Phi_m(0) \Phi_n(\mathbf{x}) \right\rangle_0 - \langle \Phi_m(0) \rangle_0 \left\langle \sum_{\mathbf{x}} \Phi_n(\mathbf{x}) \right\rangle_0 \quad (7)$$

$$\lambda = 2am\beta = 2am/g^2 \quad (8)$$

对于 $SU(2)$ 群的基础表示, U_ρ 可以被参数化:

$$U_\rho = \cos \phi_\rho + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \phi_\rho \quad (9)$$

其中 $\mathbf{n} = (\sin \theta_\rho \cos \phi_\rho, \sin \theta_\rho \sin \phi_\rho, \cos \theta_\rho)$, $0 \leq \theta_\rho, \phi_\rho \leq \pi$, $0 \leq \phi_\rho \leq 2\pi$, 且积分测度 $dQ = \sin^2 \phi_\rho d\phi_\rho \sin \theta_\rho d\theta_\rho d\phi_\rho / 2\pi$.

由此可得:

$$Z = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \prod_p Z \quad (10)$$

$$Z = \int e^{2x \cos \phi_\rho + 4y \cos^2 \phi_\rho} dQ$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \int e^{2x \cos \phi_\rho} dQ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} z(k, n)$$

$$U \equiv \langle \cos \phi_\rho \rangle_0 = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z(k, n) (k - n) / 4y \quad (11)$$

$$A \equiv \langle \cos^2 \phi_\rho \rangle_0 = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} z(k, n) n / 4y \quad (12)$$

$$\langle n_i \rangle_0 = 0 \quad (13)$$

$$\langle n_i n_j \rangle_0 = \delta_{ij} / 3 \quad (14)$$

其中 $z(k, n) = (2k)! 4^{2k-2n} y^{2k-n} / [n! k! (k+1)! (2k-2n)!]$

让

$$B_n = \langle \text{Tr}(U_{1\rho} U_{2\rho} \cdots U_{n\rho}) \text{Tr}(U_{1\rho} U_{2\rho} \cdots U_{n\rho}) \rangle_0 \quad (15)$$

利用 $\sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a = 2\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}$ 和 $\text{Tr}U_\rho = \text{Tr}U_\rho^+$, 可得递推关系:

$$B_n = B_{n-1}(4A - 1)/3 + 4(1 - A)/3 \quad (16)$$

且 $B_1 = \langle \text{Tr}U_\rho \text{Tr}U_\rho \rangle_0 = 4A$

(3)

由此可得变分矩阵元: ($n \geq m$)

$$W_{mn} = m(n - m - 1)U^{n^2-m^2}(4 - B_{m^2})$$

(4)

$$+ 2 \sum_{i=1}^m i U^{n^2+m^2-2im}(4 - B_{im}) \quad (17)$$

变分

$$D_{mn} = 4 \sum_{ij=1}^m (U^{n^2+m^2-2ij} B_{ij} - 4U^{n^2+m^2})$$

(5)

$$+ (n - m - 1)^2 (U^{n^2-m^2} B_{m^2} - 4U^{n^2+m^2})$$

$$+ 4(n - m - 1) \sum_{i=1}^m (U^{n^2+m^2-2im} B_{im} - 4U^{n^2+m^2}) \quad (18)$$

(6)

分别对 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15, 30$, 求出本征值方程(5)的本征值, 可作 $\beta am \sim \beta$ 关系曲线, 如图 1 所示. 从图中可以看出, 当 $1.3 < 1/g^2 < 7$ 时, 显示标度行为: $am = 2.28g^2$, 这与用 H_1 计算的结果^[3]完全一致, 但比用 H_1 所得的 βam 更迟进入标度区, (对于 H_1 , 当 $1/g^2 > 1$ 时, βam 开始进入标度区), 且两个 Hamiltonian 的计算结果的差别只出现在中间耦合区. 但是, 最近我们的另一项计算表明, H_1 与 H_2 的弦张力是不一样的, 也许 H_1 与 H_2 有相同的 Q^{++} 胶球质量是一巧合.

(7)

(8)

(9)

积分

(10)

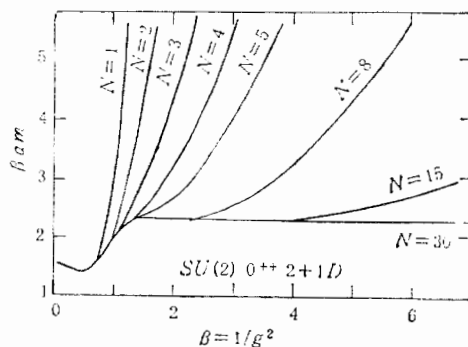


图 1

(11)

参 考 文 献

(12)

[1] GUO S. H., LIU J. M. and CHEN Q. Z., *Chin. Phys. Lett.*, 2(1985), 409.

[2] GUO S. H., ZHENG W. H. and LIU J. M., *Chin. Phys. Lett.*, 3(1986), 445.

(13)

[3] 郑维宏, 刘金明, 郭硕鸿, 高能物理与核物理, 12(1988), 134.

(14)

[4] 刘金明, 郑维宏, 郭硕鸿, 高能物理与核物理, 12(1988), 420

[5] Guo S. H. and ZHENG W. H., "A NEW FORM OF LATTICE HAMILTONIAN WITH EXACT GROUND STATE", to be published.

[6] V. F. MULLER and W. RUHL, *Nucl. Phys.*, B230(1984), 49.

[7] E. d'HOKER, *Nucl. Phys.*, B180(1981), 341.

(15)

[8] J. AMBJORN, A. J. G. HEY and S. OTTO, *Nucl. Phys.* B210 (1982), 347.

- [9] A. IRBACK and C. PETERSON, *Phys. Lett.*, **B174**(1986), 99.
 [10] K. FARAKOS, G. KOUTSOUMBAS, and S. SARANTAKOS, *Phys. Lett.* **B189**(1987), 173.
 [11] C. J. HAMER, *Z. Phys.*, **C27**(1985), 307.

THE VARIATIONAL CALCULATION OF MASS GAP IN 2+1 DIMENSIONAL $SU(2)$ LGT

ZHENG WEIHONG GUO SHUOHONG
 (Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

A variational calculation of the mass gap in 2+1 dimensional $SU(2)$ lattice gauge theory by using a Hamiltonian which possesses exact ground state and correct continuum limit is made. In the range $1.3 < 1/g^2 \leq 7$, a good scaling behaviour $am = 2.28 g^2$ is obtained, which is in agreement with weak-coupling perturbation theory and the results obtained by another Hamiltonian which does not possess correct continuum limit.

发现
2.23
用程
 θ/f_2

般的
好落
目前
据也

其中
样 η