第12卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 4
1988年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1988

快报

三维随机三角点阵伊辛模型的蒙特卡罗重正化群研究*

陈天崙 黄五群 沈琴婉
（南开大学，天津）

摘 要

本文使用一种适用于高维随机三角点阵的块化方法，对三维伊辛模型进行了蒙特卡罗重正化群研究，得到的临界指标与近似方法、及实验测量推测的分数值符合很好.

一、引 言

蒙特卡罗重正化群方法(简称 MCRG 方法)近年来广泛地用于讨论统计模型的临界行为及格点规范理论中各种规范场的相变，β 函数及标度行为. 由于用随机三角点阵可保持体系的洛仑兹不变性，因而我们有兴趣在随机三角点阵上进行蒙特卡罗重正化群研究，但随机三角点阵的不规则性使在块化时用通常的“多数原则”遇到困难，为此，选用在重正化群分析中沿用过的 decimation 方法[1]. 在二维随机三角点阵上对依辛模型研究[2]取得成功的基础上，又推广至三维，在三维随机三角点阵上对伊辛模型进行 MCRG 研究.

为能计算更多的临界指标，采用含三个偶相互作用和一个奇相互作用的哈密顿量

$$H = K_1 \sum_{i\neq j} \sigma_i\sigma_j + K_2 \sum_{i\neq j} \sigma_i\sigma_j + K_3 \sum_{i,l,m,n} \sigma_i\sigma_l\sigma_m\sigma_n + K_4 \sum_i \sigma_i \tag{1}$$

（最近邻） （次近邻） （四自旋） （外磁场项）

用改进的 Swendsen 方法[3]进行研究，得到的各项临界指标都与由各近似方法及实验推测而得的分数值符合很好.

二、改进的 MCRG 方法

这个方法的基本思想是：构造从一个蒙特卡罗模拟中计算重正化关联函数的两个不同表达式，其中一个明显地依赖于重正化耦合常数，由它可构造一个含尝试耦合常数的关

* 国家自然科学基金资助课题

本文1987年11月4日收到.

联函数表示式，这两个表示式中关联函数计算值的差表示了假定的和真正的重正化耦合常数之间的差别，极小化这个差别就可以求出真正的重正化耦合常数。

对三维伊辛模型，Site 和 Block Site 的自旋变量 $\{\sigma\}$ 和 $\{\sigma'\}$ 都取为 ± 1。从(1)式出发可构造关联函数的第一个表达式，即标准的表示式

$$\langle S_\alpha\rangle = Z^{-1}\,\mathrm{Tr}_\sigma\,[S_\alpha \exp(H)]. \tag{2}$$

其中 Z 是配分函数

$$Z = \mathrm{Tr}_\sigma \exp(H). \tag{3}$$

关联函数的第二个表示式为

$$\langle S_\alpha\rangle = m_\alpha^{-1}\sum_l \langle S_{\alpha,l}\rangle. \tag{4}$$

$$\langle S_{\alpha,l}\rangle = Z^{-1}\underset{\{\sigma_i\neq\sigma_l\}}{\mathrm{Tr}}[\exp(H-H_l)Z_l\langle S_{\alpha,l}\rangle_l]. \tag{5}$$

其中

$$\langle S_{\alpha,l}\rangle_l = Z_l^{-1}\,\mathrm{Tr}_{\sigma_l}\,[S_{\alpha,l}\exp(H_l)]. \tag{6}$$

$$Z_l = \mathrm{Tr}_{\sigma_l}\exp(H_l). \tag{7}$$

$S_{\alpha,l}$ 为 S_α 中含 σ_l 的所有项的求和，例如：$S_1 = \sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j$，则 $S_{1,l} = \sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j(\delta_{i,l}+\delta_{j,l})$。对 $\alpha = 1, 2$，$m_\alpha = 2$；$m_3 = 4$；$m_4 = 1$；(5)式中的

$$H_l = \sum_{\alpha=1}^{4} K_\alpha S_{\alpha,l}. \tag{8}$$

定义

$$\hat{S}_{\alpha,l} = S_{\alpha,l}/\sigma_l, \tag{9}$$

则

$$H_l = \sigma_l\sum_{\alpha=1}^{4} K_\alpha \hat{S}_{\alpha,l}. \tag{10}$$

引入尝试耦合常数序列 $\{\widetilde{K}_\alpha\}$，由(4)可得关联函数的近似表达式

$$\langle\hat{S}_\alpha\rangle = m_\alpha^{-1}\sum_l\left\langle \tilde{S}_{\alpha,l}\tanh\left(\sum_\beta \widetilde{K}_\beta\hat{S}_{\beta,l}\right)\right\rangle. \tag{11}$$

可以证明，当且仅当对所有的 α，$\widetilde{K}_\alpha = K_\alpha$ 时，$\langle\tilde{S}_\alpha\rangle = \langle S_\alpha\rangle$。倘若 $\{\widetilde{K}_\alpha\}$ 不等于 $\{K_\alpha\}$，则 $\langle\tilde{S}_\alpha\rangle \neq \langle S_\alpha\rangle$。展开至第一级

$$\langle\hat{S}_\alpha\rangle - \langle S_\alpha\rangle = \sum_\beta\frac{\partial\langle\tilde{S}_\alpha\rangle}{\partial\widetilde{K}_\beta}(\widetilde{K}_\beta - K_\beta). \tag{12}$$

其中

$$\frac{\partial\langle\tilde{S}_\alpha\rangle}{\partial\widetilde{K}_\beta} = m_\alpha^{-1}m_\beta^{-1}\sum_l\left\langle\hat{S}_{\alpha,l}\hat{S}_{\beta,l}\,\mathrm{Sech}^2\left(\sum_\gamma\widetilde{K}_\gamma\hat{S}_{\gamma,l}\right)\right\rangle. \tag{13}$$

这样，通过选择序列 $\{\widetilde{K}_\alpha\}$ 使 $\langle\tilde{S}_\alpha - S_\alpha\rangle = 0$ 的方法可以得到重正化耦合常数 $\{K_\alpha\}$，从而确定固定点 $\{K_\alpha^*\}$。

为计算临界指标，在固定点 $\{K_\alpha^*\}$ 附近展开至线性项

$$(K_\alpha^{(n)} - K_\alpha^*) = \sum_\beta T_{\alpha\beta}^*(K_\beta^{(n-1)} - K_\beta^*). \tag{14}$$

其中

$$T^{*}_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial K^{(n)}_{\alpha}}{\partial K^{(n-1)}_{\beta}}\right|_{F.\ P.}. \tag{15}$$

$\{K^{(n)}_{\alpha}\}$ 为第 n 次重正化变换后的耦合常数，对任意关联函数 $\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle$ 的 Chain-rule 方程为

$$\frac{\partial\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle}{\partial K^{(n-1)}_{\beta}}=\sum_{\alpha}\frac{\partial K^{(n)}_{\alpha}}{\partial K^{(n-1)}_{\beta}}\frac{\partial\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle}{\partial K^{(n)}_{\alpha}}. \tag{16}$$

而且

$$\frac{\partial\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle}{\partial K^{(n-1)}_{\beta}}=\langle S^{(n)}_{\gamma}S^{(n-1)}_{\beta}\rangle-\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle\langle S^{(n-1)}_{\beta}\rangle. \tag{17}$$

$$\frac{\partial\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle}{\partial K^{(n)}_{\alpha}}=\langle S^{(n)}_{\gamma}S^{(n)}_{\alpha}\rangle-\langle S^{(n)}_{\gamma}\rangle\langle S^{(n)}_{\alpha}\rangle. \tag{18}$$

在蒙特卡罗模拟中可计算(17)，(18)中的关联函数，代入(16)式就可得一系列的矩阵元 $T^{*}_{\alpha\beta}$.

解本征方程

$$\sum_{\beta}T^{*}_{\alpha\beta}\phi^{\gamma}_{\beta}=\lambda\phi^{\gamma}_{\alpha}. \tag{19}$$

可求出其最大本征值．由于我们现在所采取的块化方法是： 每次块化丢弃一半的格点，为此可将格点编号，每次丢弃编号为奇数的点．对此块化方法自然 $b=\sqrt[3]{2}$（因为在三维点阵上，每经一次块化格点数减少一半）.

由重正化群变换矩阵 T^{*} 的最大偶本征值 λ^{e} 可得 ν 和 α

$$\nu^{-1}=y^{e}=\ln\lambda^{e}/\ln b,\quad \alpha=2-\nu d. \tag{20}$$

其中 d 为维数．由最大奇本征值 λ^{0} 可得 δ 和 η

$$\delta=y^{0}/(d-y^{0}),\quad \eta=d+2-2y^{0}. \tag{21}$$

由临界指标之间的关系可推出另外两个临界指标 γ 和 β

$$\gamma=\nu(2-\eta),\quad \beta=\gamma/(\delta-1). \tag{22}$$

对三维伊辛模型至今没有严格的解析解，从各种近似及实验测量推测得的分数：

$$\nu=5/8,\quad \alpha=1/8,\quad \delta=5,\quad \eta=0,\quad \gamma=5/4,\quad \beta=5/16.$$

三、结 果 分 析

在三维空间一区域中放 160 个点构造随机三角点阵，采用如上所述的块化方法，通过 10000 次 MC 迭代(不计入前 2000 次迭代)得到 T^{*} 的最大偶本征值 $\lambda^{e}=1.456$，最大奇本征值 $\lambda^{0}=1.781$，相应的临界指标 ν，α，δ，η，β，γ 及用 ε 展开，级数方法，推测的数值[4]及 Swendsen 在 32^3 方块点阵上用“改进的多数原则”得到的结果[5]都示于表 1.

采用三维随机三角点阵及上述的块化方法 $b=\sqrt[3]{2}$，使我们可用较小的点阵（160 个点)，10000 次 MC 迭代获得比 Swendsen 在 32^3 方块点阵上更好的结果，又大大节省了计算时间，这显示了随机三角点阵在讨论临界行为，连续极限时的优越性.

表 1

方法	λ^e	λ^0	ν	α	δ	η	β	γ
ϵ展开			0.627	0.119	4.88	0.021	0.320	1.24
级数			0.628	0.122	5.00	0.041	0.312	1.25
MCRG (□点阵)	2.994	5.543	0.632	0.104	4.67	0.059	0.318	1.26
MCRG (△点阵)	1.456	1.781	0.628	0.117	4.98	0.004	0.315	1.25
实验推测的分数			0.625	0.125	5	0	0.3125	1.25

此工作是在 M340-S 计算机上完成的。

参考文献

[1] M. N. Barber, *Phys. Rep.*, **29**(1977), 1.
[2] 黄五群，陈天崙、沈琴婉、钟朝武，高能物理与核物理，**11**(1987)，563.
[3] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1165.
[4] Phase Transition and Critical Phenomena, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic New York, 1976), Vol. 3.
[5] H. W. J. Blote and R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B20**(1979), 2077.

A MONTE CARLO RENORMALIZATION GROUP STUDY OF ISING MODEL ON THREE-DIMENSIONAL RANDOM TRIANGLE LATTICE

CHEN TIANLUN HUANG WUQUN SHEN QINWAN

(*Nankai University, Tianjing*)

ABSTRACT

A convenient block method used for high dimensional random triangle lattice has been applied to the monte carlo renormalization group study of Ising model on three-dimensional random triangle lattice. The critical exponents obtained are found to be consistent with all evact fractions conjectured from several approximate methods and experiments.