

2 卷

(44)

与图 1

= 0.

(45)

的自治
自治方

Singa-

osition
ter at
estab-
are

格点规范理论中的 $\Delta I=1/2$ 规则*

罗向前 何宝鹏** 陈启洲 李志兵 郭硕鸿
(中山大学, 广州)

摘 要

本文用格点规范理论中的强耦合展开方法, 计算 K 介子 $|\Delta S|=1$ 非轻子衰变的弱相互作用矩阵元, 并与实验进行了比较. 我们的结果显示了 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 增强.

一、引 言

K 介子是自然界最迷人的粒子, 人们对其非轻子衰变, 如 $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ 进行了大量的实验测量. 1954 年, 发现 $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ 受到很大的抑制, 即^[1]

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)}{\Gamma(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) + \Gamma(K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)} \approx \frac{1}{655}$$

说明 $K \rightarrow 2\pi$ 服从 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则. 然而, 这规则一直没有很好的理论解释.

弱电统一模型、Kobayashi-Maskawa 三代夸克混合机制和 QCD 的建立, 为探索 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 这一重要的经验规则及其动力学原因提供了理论基础.

K 介子是由强作用束缚起来的, 其弱作用过程必然包含强作用的影响. 用流代数、夸克模型、袋模型和格点规范理论中的 Monte Carlo 模拟等方法^[2-4] 对 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的弱作用矩阵元进行计算, 人们对 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 增强有了初步的认识, 但这些计算或是没有给出能与实验比较的结果, 或是没有给出解析表示式.

用 Wilson 方案作强耦合展开, 不但能解决格点 QCD 中费米子加倍等问题, 而且能得到较好的强子质量谱^[5] 和与实验相符的 K_L - K_S 质量差^[6]. 本文用这一方案计算 $K \rightarrow 2\pi$ 中 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 矩阵元, 得到与其它方法相容的结果.

* 国家教委科学基金和中山大学高等学术研究中心资助项目.

** 华南师范大学访问学者.

本文 1987 年 5 月 11 日收到.

二、理论框架

要处理非轻子衰变这一强、弱作用相混合的过程,首先要区分长短距离效应。短距离效应是指经过微扰 QCD 修正,用算符乘积展开和重整化群方法得到 $|\Delta S| = 1$ 的弱作用等效哈氏量^[7]

$$H_{\Delta S=1} = \frac{G_F \sin \theta_c \cos \theta_c}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^6 c_i O_i \quad (2.1)$$

其中 $c_i = c_i(M_w^2, m^2, g, \mu^2)$ 是 Wilsno 算符乘积展开系数, O_i 是四夸克算符:

$$\begin{aligned} O_1 &= (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^L u) - (\bar{s}\gamma_\mu^L u)(\bar{u}\gamma_\mu^L d), & \Delta I &= \frac{1}{2} \\ O_2 &= (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^L u) + (\bar{s}\gamma_\mu^L u)(\bar{u}\gamma_\mu^L d) \\ &\quad + 2(\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{d}\gamma_\mu^L d) + 2(\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{s}\gamma_\mu^L s), & \Delta I &= \frac{1}{2} \\ O_3 &= (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^L u) + (\bar{s}\gamma_\mu^L u)(\bar{u}\gamma_\mu^L d) \\ &\quad + 2(\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{d}\gamma_\mu^L d) - 3(\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{s}\gamma_\mu^L s), & \Delta I &= \frac{1}{2} \\ O_4 &= (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^L u) + (\bar{s}\gamma_\mu^L u)(\bar{u}\gamma_\mu^L d) \\ &\quad - (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{d}\gamma_\mu^L d), & \Delta I &= \frac{3}{2} \\ O_5 &= (\bar{s}t^A \gamma_\mu^L d)[(\bar{u}t^A \gamma_\mu^R u) + (\bar{d}t^A \gamma_\mu^R d) + (\bar{s}t^A \gamma_\mu^R s)], & \Delta I &= \frac{1}{2} \\ O_6 &= (\bar{s}\gamma_\mu^L d)[(\bar{u}\gamma_\mu^R u) + (\bar{d}\gamma_\mu^R d) + (\bar{s}\gamma_\mu^R s)], & \Delta I &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中

根号

其中

其中

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^L &= \gamma_\mu(1 + \gamma_5) & \gamma_\mu^R &= \gamma_\mu(1 - \gamma_5) \\ \gamma_K &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_K \\ i\sigma_K & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

全部长距离效应归结为强作用对初末态波函数的影响。因此,弱作用过程 $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的跃迁矩阵元为:

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = \langle \pi^+\pi^- | H_{\Delta S=1} | K^0 \rangle \quad (2.4)$$

上式

利用流代数和软 π 定理,可把 $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ 与 $K^+ \rightarrow \pi^+$ 的几率幅联系起来。

在格点 QCD 中,我们取 K^+ 和 π^+ 的强耦合展开零级波函数为

即可

$$\begin{aligned} |K^+, 0\rangle &= \sum_n \xi_n^+(n) \eta_n^+(n) |0\rangle \\ |\pi^+, 0\rangle &= \sum_n \xi_n^+(n) \eta_n^+(n) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

格点强作用哈氏量为 H_s ^[9]:

是无

$$W = \frac{2a}{g^2} H_t = W_0 + \chi(V_1 + V_2) + x^2 V_3 \quad (2.6)$$

$$W_0 = \sum_{n,k=1,2,3} E^2(n, k) + (m + 6rx) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n)$$

$$V_1 = \sum_{n,k=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \bar{\psi}(n) \gamma_k U(n, k) \psi(n+k) \\ = -i \sum_{n,k=\pm 1, \pm 2, \pm 3} [\eta(n) \sigma_k U(n, k) \xi(n+k) + \xi^+(n) \sigma_k U(n, k) \eta^+(n+k)]$$

$$V_2 = -r \sum_{n,k=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \bar{\psi}(n) U(n, k) \psi(n+k) \\ = -r \sum_{n,k=\pm 1, \pm 2, \pm 3} [\xi^+(n) U(n, k) \xi(n+k) - \eta(n) U(n, k) \eta^+(n+k)]$$

$$V_3 = -2 \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)$$

其中 $x = \frac{1}{g^2}$, $\gamma_{-k} = -\gamma_k$, r 是 Wilson 参数, 并采用如下规定:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta^+ \end{pmatrix}, \quad \xi|0\rangle = \eta|0\rangle = 0, \quad E^2(n, k)|0\rangle = 0 \quad (2.7)$$

根据 Rayleigh-Schrödinger 微扰论^[8], 第 q 级能量和波函数修正分别为

$$E_q = \langle \psi_0 | V | \psi_{q-1} \rangle \quad (2.8)$$

$$|\psi_q\rangle = \frac{Q}{b} [(V - E_1)|\psi_{q-1}\rangle - E_2|\psi_{q-2}\rangle \cdots - E_{q-1}|\psi_1\rangle] \quad (2.9)$$

$$\text{其中 } \frac{Q}{b} = \frac{1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|}{E_0 - W_0} \quad (2.2)$$

弱作用矩阵元为(准确至 x^4)

$$\mathcal{M}(H_w) = \frac{\langle \pi^+ | H_w | K^+ \rangle}{[\langle \pi^+ | \pi^+ \rangle \langle K^+ | K^+ \rangle]^{1/2}} = \frac{\langle \pi^+ | H_w | K^+ \rangle}{\langle K^+ | K^+ \rangle} \\ = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}{1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4} \\ = \alpha_0 + (\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2) x^2 + (\alpha_3 - \alpha_0 \beta_3) x^3 \\ + (\alpha_4 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \beta_4 + \alpha_0 \beta_2^2) x^4 \quad (2.10)$$

上式用了 $\langle \pi^+ | \pi^+ \rangle = \langle K^+ | K^+ \rangle$, 作 Padé(2, 2) 近似

$$\mathcal{M}(H_w) = \frac{u_0 + u_1 x + u_2 x^2}{1 + t_1 x + t_2 x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{u_2}{t_2} \quad (2.11)$$

即可得 \mathcal{M} 的连续极限. 其中

$$u_2 = (\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2) + \frac{\alpha_0 (\alpha_3 - \alpha_0 \beta_3)^2}{(\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2)^2} - \frac{\alpha_0 (\alpha_4 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \beta_4 + \alpha_0 \beta_2^2)}{\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2}$$

$$t_2 = \left(\frac{\alpha_3 - \alpha_0 \beta_3}{\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2} \right)^2 - \frac{\alpha_4 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \beta_4 + \alpha_0 \beta_2^2}{\alpha_2 - \alpha_0 \beta_2} \quad (2.12)$$

是无量纲质量 m 和 Wilson 参数 r 的函数.

短距离
的弱作

(2.1)

(2.2)

(2.3)

$\tau^+ \pi^-$ 的

(2.4)

(2.5)

三、计算结果

由上节的公式可得出对 $K^+ \rightarrow \pi^+$ 有贡献的矩阵元与(2.10)式各系数的关系:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{E_{3,2}} \left(\frac{1}{E_{3,2}} + \frac{1}{E_{1,4}} \right), & \alpha_3 = \frac{\lambda_3 r}{E_{3,2}} \left(\frac{1}{E_{3,2}^2} + \frac{1}{2E_{3,2}E_{1,4}} + \frac{1}{E_{1,4}^2} \right) \\ \alpha_4 = G^{(4)}(H_w) + \frac{\lambda_4 r^2}{E_{3,2}} \left(\frac{1}{E_{3,2}^3} + \frac{1}{3E_{3,2}^2 E_{1,4}} + \frac{2}{3E_{3,2}E_{1,4}^2} + \frac{4}{3E_{1,4}^3} \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \beta_2 = -12 \left(\frac{1}{E_{3,2}^2} - \frac{2r}{E_{3,0}^2} \right), & \beta_3 = 288r/E_{3,2}^3 \\ \beta_4 = G_N^{(4)} - 5184r^2/E_{3,2}^4 \end{cases} \quad (3.2)$$

其中, $E_{3,0} = 4/3$, $E_{3,2} = 4/3 + 2m$, 第一个下标表示规范场 $SU(3)$ 表示的维数, 第二个下标表示费米子个数.

$$\begin{aligned} G^{(4)}(H_w) = & \langle \pi^+, 2 | H_w | K^+, 2 \rangle + 2 \langle \pi^+, 1 | H_w | K^+, 3 \rangle \\ & + 2 \langle \pi^+, 0 | H_w | K^+, 4 \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$G_N^{(4)} = \langle K^+, 2 | K^+, 2 \rangle + 2 \langle K^+, 1 | K^+, 3 \rangle + 2 \langle K^+, 0 | K^+, 4 \rangle \quad (3.4)$$

其中 $|K^+, q\rangle$, $|\pi^+, q\rangle$ 分别代表 K^+ , π^+ 介子的 q 级波函数修正. $\alpha_0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 的数值见表 1.

表 1

H_w	α_0	λ_2	λ_3	λ_4
$H_A = (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^L u)$	2	-48	1152	-20736
$H_B = (\bar{s}\gamma_\mu^L u)(\bar{u}\gamma_\mu^L d)$	6	-144	3456	-62208
$H_C = (\bar{s}\gamma_\mu^A d)(\bar{u}\gamma_\mu^R u)$	$-\frac{4}{3}\omega$	$\frac{96}{3}\omega$	$-\frac{2304}{3}\omega$	$\frac{41472}{3}\omega$
$H_D = (\bar{s}\gamma_\mu^L d)(\bar{u}\gamma_\mu^R u)$	-4	96	-2304	41472

表中 $\omega = \text{Tr} t^A t^A$.

表 2

真空饱和近似 ^[3]	Monte Carlo ^[3] 模 拟	本 文 结 果	
		$m = 1$	$m = 2$
$\frac{\mathcal{M}(H_A)}{\mathcal{M}(H_B)} = 0.3333$	0.4205	0.3333	0.3333 ($r=0.4$) 0.3334 ($r=1$)
$\frac{\mathcal{M}(H_C)}{\mathcal{M}(H_D)} = 1.019 \frac{\omega}{3}$	$1.214 \frac{\omega}{3}$	$1.000 \frac{\omega}{3}$ $0.9996 \frac{\omega}{3}$	$1.000 \frac{\omega}{3}$ ($r=0.4$) $0.9996 \frac{\omega}{3}$ ($r=1$)

要和文献[3] Cabibbo *et al.* 的结果作比较, 可取 $\omega = 4$; 但如果要利用文献 [7] Shifman *et al.*, 的 Wilson 系数 c_i 来计算 $A_{1/2}/A_{3/2}$, 须取 $\omega = 16$, 本文采用了后者.

图

个大趋

部

即

数作数

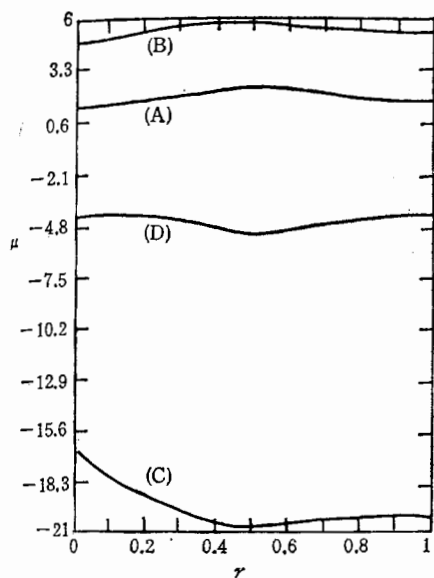


图1 $m=1$ 时各矩阵元 $\mu(H_w)$ 对 r 的依赖关系曲线(A)表示 $\mu(H_A)$, 其余类推

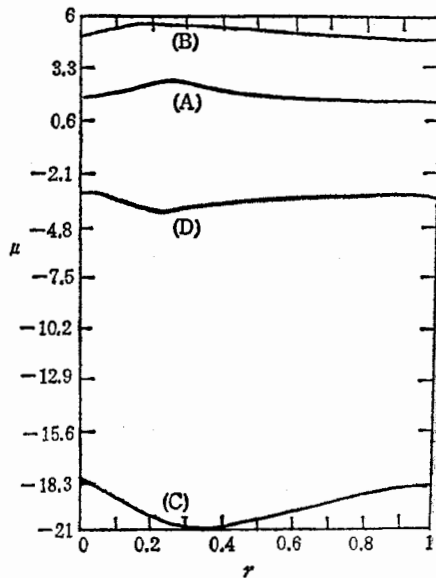


图2 $m=2$ 时各矩阵元 $\mu(H_w)$ 对 r 的依赖关系

我们把计算结果列成表 2 和图 1, 图 2, 从这些图表可以看到: (1) 对于一定的 m , 每个矩阵元都有一定的临界参数 r_c , 而且都在 0.2—0.5 之间, 当 $r < r_c$ 时, 矩阵元变化较大, 当 $r > r_c$ 时, 矩阵元趋于平稳; (2) r_c 随着 m 增大而减小, 同时 Padé 近似的结果趋于稳定; (3) 在 r_c 附近, $\mathcal{M}(H_A)$ 和 $\mathcal{M}(H_B)$ 的值对应着曲线的峰, $\mathcal{M}(H_C)$ 和 $\mathcal{M}(H_D)$ 的值对应着曲线的谷。

各种方法所得结果比较如表 2。

四、与实验比较

按照文献[1], $|\Delta S|=1$ 的非轻子衰变几率幅可分为 $\Delta I=1/2$ 和 $\Delta I=3/2$ 两部分, 实验给出^[9]

$$\begin{aligned} A_{1/2} &= (0.4687 \pm 0.0006) \text{keV} \\ A_{3/2} &= (0.0210 \pm 0.0001) \text{keV} \end{aligned} \quad (4.1)$$

即

$$\frac{A_{1/2}}{A_{3/2}} = 22.32 \quad (4.2)$$

为了得到与实验相比较的结果, 我们要用到 Wilson 算符乘积展开系数 C_i , 这些系数是用连续微扰 QCD 理论得到的, 而矩阵元 $\langle \pi^+ | O_i | K^+ \rangle$ 则用本文方法计算, 其结果作 Padé 近似后, $g(a) \rightarrow 0$ 可回到连续极限。因此利用文献[7] Shifman *et al.* 的系数 C_i , 并取 $g^2(\mu^2)/4\pi = 1$, $\mu_w = 80 \text{GeV}$, $\mu_c = 1.5 \text{GeV}$, $\mu = 0.7 \text{GeV}$, 有

$$C_1 = -3.253, C_2 = 0.06896, C_3 = 0.07298,$$

$$C_4 = 0.3649, C_5 = -0.05912, C_6 = -0.01069 \quad (4.3)$$

代入下式

$$\frac{A_{1/2}(K^+ \rightarrow \pi^+)}{A_{3/2}(K^+ \rightarrow \pi^+)} = \frac{\sum_{i=1,2,3,5,6} C_i \langle \pi^+ | O_i | K^+ \rangle / \langle K^+ | K^+ \rangle}{C_4 \langle \pi^+ | O_4 | K^+ \rangle / \langle K^+ | K^+ \rangle} \quad (4.4)$$

得

$$\frac{A_{1/2}(K^+ \rightarrow \pi^+)}{A_{3/2}(K^+ \rightarrow \pi^+)} = \begin{cases} 5.292 (m=1, r=0.3) \\ 5.293 (m=1, r=0.6) \\ 5.294 (m=1, r=1) \\ 5.292 (m=2, r=0.3) \\ 5.293 (m=2, r=0.6) \\ 5.294 (m=2, r=1) \end{cases} \quad (4.5)$$

上面的结果说明了 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 增强, 该比值与用其它方法得到的结果^[2,4,7]大致相符.

这些计算都显示 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 有一定增强, 但数值上仍不足以解释实验上的 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则.

我们认为, 理论与实验的偏离很可能是由于计算方法上的局限性所致. 我们在计算中把短距离效应和长距离效应分开, 短距离效应采用其它作者导出的算符乘积展开, 而长距离效应则用格点上的强耦合展开和 Padé 近似. 从能谱计算和强子其它性质的计算来看,

表3 $G^{(4)}(H_w)$ 和 $\mu(H_w)$ 的数值结果

(i) $m=1$

r	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$G^{(4)}(H_A)$	1.793	173.0	153.9	122.0	77.44	20.11
$G^{(4)}(H_B)$	492.6	479.1	438.7	371.2	276.8	155.5
$G^{(4)}(H_C)$	-1279	-1318	-1433	-162.5	-189.4	-2239
$G^{(4)}(H_D)$	-223.5	-233.0	-261.6	-309.2	-375.9	-461.6
$\mathcal{M}(H_A)$	1.772	1.920	1.946	1.942	1.928	1.908
$\mathcal{M}(H_B)$	5.237	5.753	5.839	5.826	5.783	5.724
$\mathcal{M}(H_C)$	-17.22	-20.40	-20.76	-20.72	-20.57	-20.36
$\mathcal{M}(H_D)$	-3.149	-3.822	-3.892	-3.885	-3.857	-3.819

(ii) $m=2$

r	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$G^{(4)}(H_A)$	26.37	24.88	20.41	12.95	2.508	-10.92
$G^{(4)}(H_B)$	71.25	67.44	56.01	36.97	10.31	-23.97
$G^{(4)}(H_C)$	-184.0	-184.0	-183.7	-183.3	-182.8	-182.1
$G^{(4)}(H_D)$	-31.58	-31.91	-32.88	-34.51	-36.78	-39.71
$\mathcal{M}(H_A)$	1.811	1.926	1.913	1.870	1.813	1.749
$\mathcal{M}(H_B)$	5.349	5.775	5.739	5.610	5.439	5.246
$\mathcal{M}(H_C)$	-17.70	-20.50	-20.40	-19.95	-19.35	-18.67
$\mathcal{M}(H_D)$	-3.218	-3.842	-3.825	-3.741	-3.629	-3.502

强
进
研

[1

[2

[3

[4

[5

[6

[7

[8

[9

bas
exj

(4.3)

强耦合展开和 Padé 近似有较大的局限性,并不是总能给出自洽结果的。因此,我们必须进一步改进强相互作用的处理方法,采用更可靠的强子波函数来计算弱矩阵元,我们正在研究改善格点计算的方案。

(4.4)

参 考 文 献

- [1] R. E. Marshak, Riazuddin and C. P. Ryan, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics* (Wiley-Interscience, 1969).
- [2] M. K. Gaillard and B. W. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 108; C. T. Hill and G. G. Ross, *Nucl. Phys.*, **B171**(1980), 141.
- [3] N. Cabibbo, G. Martinelli and R. Petronzio, *Nucl. Phys.*, **B244**(1984), 381.
- [4] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. Holstein, *Phys. Reports*, 131 Nos. 5 & 6(1986), 319.
- [5] J. Shigemitsu, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 1709.
- [6] 陈启洲、李志兵、何宝鹏、罗向前、郭硕鸿, *高能物理与核物理*, **12**(1988), 459.
- [7] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.*, **B120**(1977), 316; F. Gilman and M. Wise, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2343.
- [8] A. Messiah, *Quantum Mechanics Vol. II* (North Holland, 1962).
- [9] T. J. Devlin and J. O. Dickey, *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979), 237.

(4.5)

相符。

规则。

算中把
距离
来看,

 $\Delta I = 1/2$ RULE IN LATTICE GAUGE THEORIES

LUO XIANGQIAN HE BAOPENG CHEN QIZHOU LI ZHIBING GUO SHUOHONG
(Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

The $|\Delta S|=1$ weak interaction matrix elements of the nonleptonic K decays are calculated based on the strong coupling expansion method in lattice QCD. We compare our results with experiment, and show the enhancement of $\Delta I=1/2$.

1

3.11

5.5

3

1.6

1.908

5.724

3.36

3.819

1

3.92

3.97

2.1

3.71

1.749

5.246

3.67

3.502