第 12 卷 第 3 期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 3
1988 年 5 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1988

快报

2+1 维 $SU(3)$ 群格点规范的胶球质量*

刘金明　郑维宏　郭硕鸿
（中山大学物理系，广州）

摘　　要

本文对具有严格基态解的 Hamiltonian，采用变分法，计算了 2+1 维 $SU(3)$ 规范群的 $C=+1$．$C=-1$ 胶球质量．得到在 $0<1/g^2\leqslant 6$ 范围内，标度行为是 $am_+=3.61g^2$、$am_-=5.98g^2$．

我们已对具有严格基态解的纯格点规范场的 Hamiltonian[1]，采用变分法，计算了 2+1 维 $U(1)$、$SU(2)$ 规范群的胶球质量[2,3]，得到很好的标度行为．本文在此基础上，将其推广到 2+1 维 $SU(3)$ 规范群的情形．2+1 维 $SU(3)$ 规范群的准确基态是[1]：

$$|\Psi_0\rangle = e^{\frac{1}{2}x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)}|0\rangle \tag{1}$$

其中 $x=\dfrac{3}{4g^4}$．

选择变分态形式为[3]：

$$|\Psi\rangle=\sum_{n=1}^{N}C_n|\Psi_n\rangle=\sum_{n=1}^{N}C_n\left(\sum_x \Phi_n(\boldsymbol{x})-v_n\right)|\Psi_0\rangle \tag{2}$$

其中 C_n 为变分参数，为了使 $|\Psi\rangle$ 与 $|\Psi_0\rangle$ 正交，v_n 应取

$$v_n=\left\langle\sum_x \Phi_n(\boldsymbol{x})\right\rangle_0\equiv\left\langle\Psi_0\left|\sum_x \Phi_n(\boldsymbol{x})\right|\Psi_0\right\rangle\Big/\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle$$

采用变分法，可得胶球质量由下面本征值方程决定[3]：

$$\det/\!/W_{mn}-\lambda D_{mn}/\!/=0. \tag{3}$$

式中

$$W_{mn}=-\left\langle\sum_{l\in x}[E_l^a,\ \hat{\Phi}_m(0)][E_l^a,\ \hat{\Phi}_n(\boldsymbol{x})]\right\rangle_0,\quad E_l^a \text{ 是电场}, \tag{4}$$

$$D_{mn}=\sum_x(\langle\hat{\Phi}_m(0)\hat{\Phi}_m(\boldsymbol{x})\rangle_0-\langle\hat{\Phi}_m(0)\rangle_0\langle\hat{\Phi}_n(\boldsymbol{x})\rangle_0), \tag{5}$$

$$\lambda=2am\beta=2am/g^2, \tag{6}$$

在 2+1 维情况下，把链变量积分测度 $[dU_L]$ 变成方块变量积分测度 $[dU_P]$ 时，Jacobian 为 1[4]，因此，可以应用 $SU(3)$ 群的单链群积分[5]：

$$\int_{SU(3)}dU e^{\mathrm{Tr}(UJ^++U^+J)}=2\sum_{jkln=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2K+3l+n+2)!(K+2l+n+1)!}$$

* 国家教委科学基金和中山大学高等学术中心基金会资助的课题．
本文 1987 年 7 月 11 日收到．

$$\times \frac{X^j}{j!}\cdot\frac{Y^k}{k!}\cdot\frac{D^l}{l!}\cdot\frac{\Delta^n}{n!}. \tag{7}$$

其中 $X = \mathrm{Tr}(JJ^+)$,

$$Y = \frac{1}{2}\{[\mathrm{Tr}(JJ^+)]^2 - \mathrm{Tr}(JJ^+)^2\},$$

$$D = \det(JJ^+),$$

$$\Delta = \det J + \det J^+,$$

当 $J = x$ 为常数时,可得:

$$Z = \int dU_p e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)} = \sum_{jkln} Z(jkln) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} Z_i x^i \tag{8}$$

其中 $Z(jkln) = 2\,\dfrac{3^{j+k}2^n}{j!k!l!n!}\cdot\dfrac{x^{2j+4k+6l+3n}}{(j+2k+3l+n+2)!(k+2l+n+1)!}$, Z_i 可由计算机计算得到.

通过将(7)式两边对 J_{ij}、J_{ij}^* 求二次导数,可得:

$$\begin{aligned}\langle(U_p)_{ij}\rangle_0 &= Z^{-1}\int dU_p(U_p)_{ij}e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)}\\ &= Z^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} iZ_i x^{i-1}/6\cdot\delta_{ij} \equiv U\delta_{ij},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&Z^{-1}\int dU_p(U_p)_{ij}(U_p)_{kl}l^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)}\\ &\quad = Z^{-1}\int dU_p(U_p^*)_{ij}(U_p^*)_{kl}e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)}\\ &\quad = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{jk}\delta_{il},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&Z^{-1}\int dU_p(U_p)_{ij}(U_p^*)_{kl}e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)}\\ &\quad = b_1\delta_{ij}\delta_{kl} + b_2\delta_{ik}\delta_{jl}.\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$a_1 = Z^{-1}\sum_{jkln}\frac{1}{36x^2}[(2j+4k+6l+3n)^2+9n-4k-4j]zljk(n),$$

$$a_2 = Z^{-1}\sum_{jkln} -\frac{1}{6x^2}(2k+6l+3n)zljk(n),$$

$$b_1 = Z^{-1}\sum_{jkln}\frac{1}{36x^2}[(2j+4k+6l+3n)^2-(4k+4j+9n)]zljk(n),$$

$$b_2 = Z^{-1}\sum_{jkln}\frac{1}{3x^2}(j+k)zljk(n).$$

通过计算机可验证 b_1、b_2 满足关系 $b_1+3b_2=1$,这与利用

$$3 = Z^{-1}\int dU_p\mathrm{Tr}(U_pU_p^+)e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)} = Z^{-1}\int dU_p(U_p)_{ij}(U_p^*)_{ij}e^{x\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)} = 3b_1+9b_2$$

所得结果一致,这也说明上述推导是正确的.

由(10)、(11)式可得含有 n 个 plaquette 的图 1、2、3 的基态平均值的递推关系式.(令 $U_n = U_{1p}U_{2p}\cdots U_{np}$)

$$\begin{aligned}A_n &= \langle\mathrm{Tr}(U_{1p}U_{2p}\cdots U_{np}U_{1p}U_{2p}\cdots U_{np})\rangle_0\\ &= \langle\mathrm{Tr}(U_{n-1}U_{np}U_{n-1}U_{np})\rangle_0\\ &= \langle(U_{n-1})_{ij}(U_{n-1})_{kl}(U_{np})_{jk}(U_{np})_{li}\rangle_0\end{aligned}$$

$$= a_1 A_{n-1} + a_2 B_{n-1},$$

$$B_n = \langle \mathrm{Tr}(U_n)\mathrm{Tr}(U_n)\rangle_0$$

$$= a_1 B_{n-1} + a_2 A_{n-1},$$

$$C_n = \langle \mathrm{Tr}(U_n)\mathrm{Tr}(U_n^+)\rangle_0$$

$$= b_1 C_{n-1} + 3b_2.$$

且递推公式的初值为:

$$A_1 = \langle (U_p)_{ij}(U_p)_{ji}\rangle_0 = 3a_1 + 9a_2,$$

$$B_1 = \langle (U_p)_{ii}(U_p)_{jj}\rangle_0 = 9a_1 + 3a_2,$$

$$C_1 = \langle (U_p)_{ii}(U_p^*)_{jj}\rangle_0 = 9b_1 + 3b_2.$$

对于 2+1 维 $SU(3)$ 群的 0^{++} 胶子球,选择变分态为:

$$\hat{\Phi}_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{Tr}(U_p(n,\boldsymbol{x}) + U_p^+(n,\boldsymbol{x})),\quad n = 1, 2, \cdots, N.$$

式中 V 为格点总数,即 $V = \sum\limits_x 1$, $U_p(n, \boldsymbol{x})$ 表示一个端点在 $\boldsymbol{x}$ 处的 $n \times n$ 矩形 Wilson 圈.

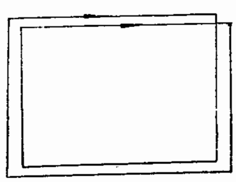

图 1 A_n

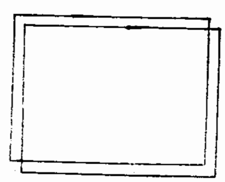

图 2 B_n

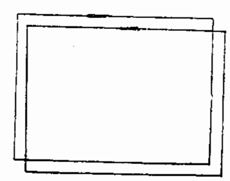

图 3 C_n

由此可得对称变分矩阵元 W_{mn}、D_{mn} 在 $n \geqslant m$ 时为:

$$W_{mn} = 8m(n-m-1)U^{n^2-m^2}\left(B_{m^2}/6 - A_{m^2}/2 + \frac{3}{2} - C_{m^2}/6\right)$$

$$+ 16\sum_{i=1}^{m} iU^{n^2+m^2-2im}\left(B_{im}/6 - A_{im}/2 + \frac{3}{2} - C_{im}/6\right),$$

$$D_{mn} = 8\sum_{ij=1}^{m} U^{n^2+m^2-2ij}(B_{ij} + C_{ij} - 18U^{2ij})$$

$$+ 8(n-m-1)\sum_{i=1}^{m} U^{n^2+m^2-2im}(B_{im} + C_{im} - 18U^{2im})$$

$$+ 2(n-m-1)^2 U^{n^2-m^2}(B_{m^2} + C_{m^2} - 18U^{2m^2}).$$

对于 2+1 维 $SU(3)$ 群的 0^{+-}胶子球,可选择变分态为:

$$\hat{\Phi}_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{Tr}(U_p(n, \boldsymbol{x}) - U_p^+(n, \boldsymbol{x})),\quad n = 1, 2, \cdots, N.$$

同样可得对称矩阵元 W_{mn}、D_{mn} 在 $n \geqslant m$ 时为:

$$W_{mn} = 8m(n-m-1)U^{n^2-m^2}\left(A_{m^2}/_2 - B_{m^2}/_6 + \frac{3}{2} - C_{m^2}/6\right)$$

$$+16\sum_{i=1}^{m} iU^{n^2+m^2-2im}\left(A_{im}/_2 - B_{im}/6 + \frac{3}{2} - C_{im}/6\right),$$

$$D_{mn} = 8\sum_{ij=1}^{m} U^{n^2+m^2-2ij}(C_{ij} - B_{ij}) + 8(n-m-1)\sum_{i=1}^{m} U^{n^2+m^2-2im}(C_{im} - B_{im})$$
$$+ 2(n-m-1)^2 U^{n^2-m^2}(C_{m^2} - B_{m^2}).$$

分别取变分态数 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15$ 和 30，求出本征值方程(3)式的本征值，取其最小 m，作 $\beta am \approx \beta$ 的关系曲线，如图 4、5 所示（$N = 15$ 和 $N = 30$ 的二条曲线重迭.），从图可以看出，在 $\beta = 1/g^2 > 2$ 时，开始显示标度行为：$am_+ = 3.61g^2$，$am_- = 5.98g^2$.

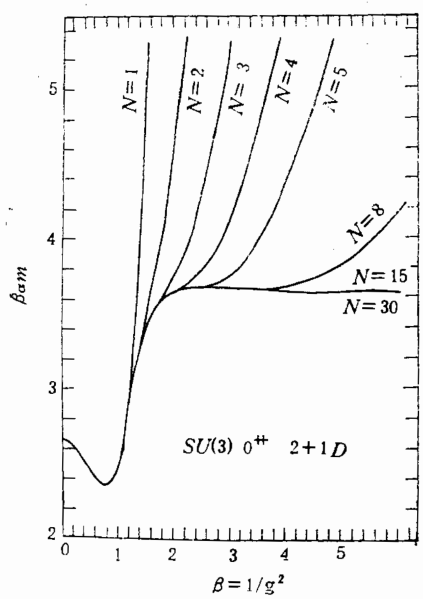

图 4

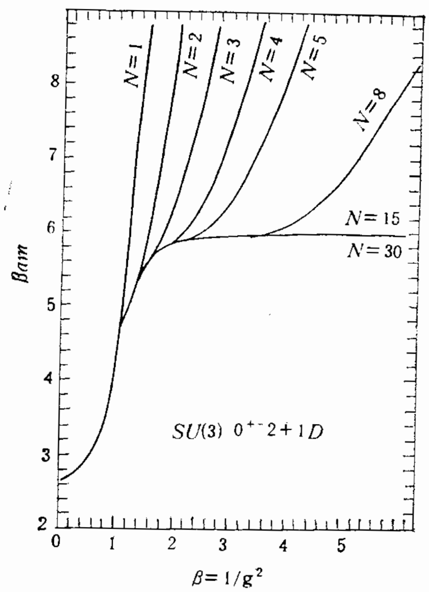

图 5

参　考　文　献

[1] Guo S. H., Liu J. M. and Chen Q. Z., *Chin. Phys. Lett.*, **2**(1985), 409.
[2] Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1986), 445.
[3] 郑维宏，刘金明，郭硕鸿，待发表在《高能物理与核物理》上.
[4] G. G. Batrouni, *Nucl. Phys.*, **B208**(1982), 12.
[5] K. E. Eriksson and N. Svartholm, *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 2276.

THE MASS GAP IN 2+1 DIMENSIONAL *SU*(3) LATTICE GAUGE THEORY

LIU JINMING, ZHENG WEIHONG, GUO SHUOHONG

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

ABSTRACT

We present a variational calculation of $C=+1$ and $C=-1$ glueball masses in 2+1 dimensional $SU(3)$ lattice gauge theory using a Hamiltonian in which the ground state is exactly known. In the range $0<1/g^2\leqslant 6$, we obtain good scaling behaviour $am_+=3.61\,g^2$ and $am_-=5.98\,g^2$.