第 11 卷 第 5 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 11, No. 5
1987 年 9 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Sept., 1987

有势能尾巴的 Klein-Gordon 方程中的 Levinson 定理

戴　安　英
（北京工业学院应用物理系）

摘　　要

当球对称势能函数存在势能尾巴 $\lim\limits_{r\to\infty} r^2V(r)=b$ 时，用变形的 Sturm-Liouville 定理讨论 Klein-Gordon 方程解的性质，证明了相应的 Levinson 定理。

一、引　　言

Levinson 定理[1]是散射理论中一个基本定理，它研究散射相移和束缚态数目之间的关系。三十多年来，人们将这定理进行了各种推广[2]，讨论了各种势的 Schrödinger 方程，Direc 方程和 Klein-Gordon 方程，证明了推广的 Levinson 定理[3]。特别在最近，有人用推广的 Sturm-Liouville 定理[4]来研究 Levinson 定理，方法简单，物理意义明确，且易于推广[5-7]。

讨论 Klein-Gordon 方程的 Levinson 定理会遇到一些特殊的困难。首先，Sturm-Liouville 定理对 Klein-Gordon 方程一般是不成立的，需要适当变形和有条件地应用[7]。其次 Klein-Gordon 方程的波函数是带权规一化的，规一化值并不恒正，它的正负标志该波函数所描写的粒子是正粒子还是反粒子[7,8]，而且，随着势能的变化，正反粒子束缚态可能成对产生或消失[8]。最后，Klein-Gordon 方程的等效势和能量 E 有关，当存在势能尾巴时，解的性质比较复杂。

文[7]只讨论了具有截断势的 Klein-Gordon 方程的 Levinson 定理。本文讨论更普遍的情形，即在 Klein-Gordon 方程中，球对称势函数存在势能尾巴，

$$\lim_{r\to\infty} r^2V(r)=b=\text{const} \tag{1}$$

通过有条件地应用变形的 Sturm-Liouville 定理，讨论区域 $[r_0,\infty)$ 中解的性质，证明推广的 Levinson 定理。

第二节把 Sturm-Liouville 定理作适当变形，化成便于应用的形式。第三节讨论束缚态的形式，第四节讨论散射态的性质，并证明推广的 Levinson 定理。

本文 1986 年 8 月 13 日收到。

二、变形的 Sturm-Liouville 定理

相对论标量粒子满足 Klein-Gordon 方程 ($\hbar = c = 1$)

$$(-\nabla^2 + M^2)\phi(x) = [E - V(r)]^2\phi(x) \tag{2}$$

其中 $V(r)$ 是矢量势第四分量，它是球对称的，且满足

$$\lim_{r\to 0} r|V(r)| = 0 \tag{3}$$

分离角度变量，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r} u_{lE}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{4}$$

得

$$\frac{d^2u_{lE}}{dr^2} + \left[(E^2 - M^2) - (2EV - V^2) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_{lE} = 0 \tag{5}$$

等效势

$$V_{\text{eff}} = 2EV - V^2 \tag{6}$$

与能量有关。Klein-Gordon 方程可能存在复能量的解，但对实能量的解，本征函数总可选成实函数，波函数的带权模 ε_E 并不总是恒正的[7,8]，

$$\int_0^\infty u_{lE_1}(E_1 + E - 2V)u_{lE}dr = \begin{cases}\varepsilon_E\delta(E_1 - E)\\ \varepsilon_E\delta_{E_1E}\end{cases} \tag{7}$$

量子化后[8]，$\varepsilon_E > 0$ 的态描写正粒子，$\varepsilon_E < 0$ 的态描写反粒子，$\varepsilon_E = 0$ 可看成一种极限情况，即具有无穷小 $\pm|\varepsilon_E|$ 的一对正反粒子态在 $|\varepsilon_E| \to 0$ 时的极限。复数能量的本征解物理意义尚不太清楚[8]，本文不予讨论。

在不致引起混淆的地方，下文将省去 u 的下标 l 和 E。对能量为 E 和 E_1 的解 u 和 u_1，由(5)式得

$$(uu_1' - u'u_1)\Big|_{r_1}^{r_2} = -(E_1 - E)\int_{r_1}^{r_2} u_1(E_1 + E - 2V)u dr \tag{8}$$

物理波函数在原点趋于零，取 $r_1 = 0$，$r_2 = r_0$，得

$$\lim_{E_1\to E}\frac{uu_1' - u'u_1}{E_1 - E}\Big|_{r_0^-} = u^2\frac{d(u'/u)}{dE}\Big|_{r_0^-} = -2\int_0^{r_0} u^2(E - V)dr \tag{9}$$

当 $|E| < M$ 时，取无穷远处收敛的解

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = \lim_{r\to\infty} u_1(r) = 0 \tag{10}$$

则

$$u^2\frac{d(u'/u)}{dE}\Big|_{r_0^+} = 2\int_{r_0}^\infty u^2(E - V)dr \tag{11}$$

令

$$A(E) = u'/u|_{r_0^-}, \quad B(E) \equiv u'/u|_{r_0^+} \tag{12}$$

由 (9) 和 (11) 式相减得

$$u^2(r_0)[B'(E)-A'(E)]=\int_0^\infty u^2(E-V)dr=\varepsilon_E \tag{13}$$

其中的撇代表对能量的微商.

三、束缚态的数目

设势能函数不取截断形式,在远处呈现(1)式的势能尾巴. 选取足够大的 r_0, 下列条件可以得到满足:

i)
$$\frac{M}{4}>|V(r_0)|\geqslant|V(r)|,\quad r\geqslant r_0, \tag{14}$$

ii)
$$V_{\rm eff}\equiv 2EV-V^2=\frac{2Eb}{r^2}+\frac{\varepsilon(r)}{r^2}, \tag{15}$$

其中 $\varepsilon(r)$ 在无穷远处趋于零, 因此, $\varepsilon(r)$, $r\geqslant r_0$, 对相移的贡献随 r_0 增大而趋于零. 而 Levinson 定理的成立与 r_0 的选择无关,所以,在下面的计算中, 我们选取足够大的 r_0, 使 $\varepsilon(r)$ 可以忽略不计.

为确切起见,又不失普遍性,假定

$$b\geqslant 0 \tag{16}$$

若 $b<0$, 可作变换 $E\to -E$, $V\to -V$, 方程(6)仍化为上述形式.

在 $E=M$ 处.

$$2Mb+l(l+1)=a_1(a_1+1)>-\frac{1}{4},\quad a_1>-\frac{1}{2} \tag{17}$$

我们得到在 $[r_0,\infty)$ 区域(6)式的近似解为

$$u_1=r^{a_1+1},\quad u_2=r^{-a_1},\quad E=M \tag{18}$$

在 $E=-M$ 处,若

$$-2Mb+l(l+1)<-\frac{1}{4} \tag{19a}$$

在 $[r_0,\infty)$ 区域(6)式的近似解,在无穷远处是振荡的. 众所周知, 在 Schrödinger 方程情况,若势能在远处呈 b/r^2 形式,且 $b<-\frac{1}{4}$,则有无穷多个束缚态,这是 Sturm-Liouville 定理的直接结果. 其证明方法也适合现在情况,即当 (19a) 成立时,在 $E\gtrsim -M$ 处有无穷多个束缚态, Levinson 定理不成立.

若

$$-2Mb+l(l+1)=a_2(a_2+1)>-\frac{1}{4},\quad a_2>-\frac{1}{2} \tag{19b}$$

(6)式在 $[r_0,\infty)$ 区域近似解为

$$u_1=r^{a_2+1},\quad u_2=r^{-a_2},\quad E=-M \tag{20}$$

对于

$$-2Mb+l(l+1)=-\frac{1}{4} \tag{19c}$$

的情况，根据 $\varepsilon(r)$ 的符号，分属前两种情况之一，这里不作专门讨论.

在 $|E|<M$ 能域，取无穷远处收敛的解，由(11)式知

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dB(E)}{dE}>0,\ \frac{M}{4}\leqslant E<M\\&\frac{dB(E)}{dE}<0,\ -M<E\leqslant-\frac{M}{4}\\&B(M)=-\frac{a_1}{r_0},\ B(-M)=-a_2/r_0\end{aligned}\right\}\tag{21a}$$

在能域 $|E|<\frac{M}{4}$，由 (11b) 不能得到 $B(E)$ 单调的结论. 但因

$$k_1=\sqrt{M^2-E^2}\geqslant\frac{\sqrt{15}}{4}M$$

和

$$2Eb+l(l+1)=a_3(a_3+1)>-\frac{1}{4},$$

(6)式在 $[r_0,\infty)$ 区域的近似解为

$$u=\hat{K}_{a_3}(k_1r)=\sqrt{\frac{\pi k_1r}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{2}(a_3+3/2)}\,H^{(1)}_{a_3+\frac{1}{2}}(ik_1r)\sim e^{-k_1r}$$

因此，

$$B(E)=-k_1=-\sqrt{M^2-E^2},\quad |E|<M/4\tag{21b}$$

$B(E)$ 在 $|E|<M$ 能域是能量的连续函数，它在 $0<E<M$ 能域单调上升，在 $-M<E<0$ 能域单调下降. 根据近似解的形式(18)和(20)式，从 (11b) 可得

$$\begin{aligned}&\left.\frac{dB(E)}{dE}\right|_{E=M}\sim\infty\qquad 若\ -\frac{1}{2}<a_1<\frac{1}{2};\\&\left.\frac{dB(E)}{dE}\right|_{E=-M}\sim-\infty\quad 若\ -\frac{1}{2}<a_2<\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{22}$$

在 $[0,r_0]$ 区域的解依赖于势能的具体形式，在 $V=0$ 时，解为

$$u=\hat{I}_l(k_1r)=\sqrt{2\pi k_1r}\,e^{-i\frac{\pi}{2}(l+\frac{1}{2})}J_{l+\frac{1}{2}}(ik_1r)\sim\begin{cases}\dfrac{2(k_1r)^{l+1}}{(2l+1)!!} & k_1r\sim0\\ e^{k_1r} & k_1r\sim\infty\end{cases}\tag{23}$$

$$A(E)|_{V=0}=k_1\frac{\hat{I}'_l(k_1r_0)}{\hat{I}_l(k_1r_0)}\sim\begin{cases}(l+1)/r_0 & k_1\sim0\\ k_1 & k_1\sim\infty\end{cases}\tag{24}$$

显然，$A(E)|_{V=0}$ 和 $B(E)$ 在能域 $|E|<M$ 不相交，即当 $[0,r_0]$ 区域无势能时，不存在束缚态. 现在让区域 $[0,r_0]$ 内的势能 V 由零变到给定值 $V(r)$，曲线 $B(E)$ 不发生变化，而曲线 $A(E)$ 连续变化，只是在若干分立点，由于 $u(r_0)=0$，$A(E)$ 趋于无穷大. 一般说来，$A(E)$ 和 $B(E)$ 两条曲线可以有若干个交点，在交点处，衔接条件

$$A(E)=B(E)\tag{25}$$

成立,即存在束缚态. 根据(13)式,交点处两曲线斜率的大小决定该束缚态描写正粒子还是反粒子,

$$\left.\begin{array}{l} A(E)=B(E),\ A'(E)<B'(E),\ \text{描写正粒子} \\ A(E)=B(E),\ A'(E)>B'(E),\ \text{描写反粒子} \end{array}\right\} \tag{26}$$

由于 $[0, r_0]$ 区域内势能 V 的变化引起曲线 $A(E)$ 的变化,从而使两曲线的交点数目发生变化. 交点数目的变化有两个来源: 一是两曲线相切后分开或相交,由于交点总是成对出现或消失,这对应一对正反粒子束缚态的产生或消失,因此它不改变正反粒子束缚态数目之差 N_l,

$$N_l = n_l^{(+)} - n_l^{(-)} \tag{27}$$

一是交点通过 $E=\pm M$ 点进入或引出区域 $|E|<M$, 这代表束缚态和散射态的相互转变.

我们详细研究后一种情况. 随着区域 $[0, r_0]$ 内势能 V 的变化,若 $A(M)$ 减少而经过 $B(M)$ 值,有如下四种可能:

i) $$A'(M)<B'(M), \tag{28a}$$

ii) $$A^{(n)}(M)=B^{(n)}(M), \quad n=1,2,3,\cdots,$$
$$(-1)^n A^{(n+1)}(M)<(-1)^n B^{(n+1)}(M), \tag{28b}$$

iii) $$A^{(n)}(M)=B^{(n)}(M), \quad n=1,2,\cdots,$$
$$(-1)^n A^{(n+1)}(M)>(-1)^n B^{(n+1)}(M), \tag{28c}$$

iv) $$A'(M)>B'(M). \tag{28d}$$

前两种情况代表 $E>M$ 的散射态变成了 $E<M$ 的正粒子的束缚态, 后两种情况代表 $E<M$ 的反粒子束缚态变成了 $E>M$ 的散射态,所有这四种情况 N_0 都增加一.反之,当 $A(M)$ 增加而经过 $B(M)$ 时,所有四种情况下, N_l 都减小一.

在 $E=-M$ 处,随着 $V(r)$ 的变化,若 $A(-M)$ 减小而经过 $B(-M)$ 值, 也有下述四种可能:

i) $$A'(-M)>B'(-M), \tag{29a}$$

ii) $$A^{(n)}(-M)=B^{(n)}(-M), \quad n=1,2,\cdots,$$
$$A^{(n+1)}(-M)>B^{(n+1)}(-M), \tag{29b}$$

iii) $$A^{(n)}(-M)=B^{(n)}(-M), \quad n=1,2,\cdots,$$
$$A^{(n+1)}(-M)<B^{(n+1)}(-M), \tag{29c}$$

iv) $$A'(-M)<B'(-M). \tag{29d}$$

前两种情况代表 $E<-M$ 的散射态变成了 $E>-M$ 的反粒子束缚态, 后两种情况代表 $E>-M$ 的正粒子束缚态变成 $E<-M$ 的散射态, 所有四种情况 N_l 都减少一, 反之, 当 $A(-M)$ 增加而经过 $B(-M)$ 值,在所有四种情况下, N_l 均增加一.

当 V 由零变化到给定值时,用 $n(M)$ 表示 $A(M)$ 减少而经过 $B(M)$ 值的次数减去 $A(M)$ 增加而经过 $B(M)$ 值的次数,用 $n(-M)$ 表示 $A(-M)$ 减少而经过 $B(-M)$ 值的次数减去 $A(-M)$ 增加而经过该值的次数,则

$$N_l = n(M) - n(-M) \tag{30}$$

四、Levinson 定理

现在讨论散射态. 对 $E > M$,

$$2Eb + l(l+1) = \nu(\nu+1) > -\frac{1}{4},\quad \nu > -\frac{1}{2}$$

$$\nu \sim a_1,\ \text{当}\ E \sim M$$

则有近似解

$$u = \cos\delta_\nu \hat{j}_\nu(kr) + \sin\delta_\nu \cdot \hat{n}_\nu(kr) \overset{r\sim\infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{\nu}{2}\pi + \delta_\nu\right) \tag{31}$$

其中 $k = \sqrt{E^2 - M^2}$,

$$\hat{j}_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x),\quad \hat{n}_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$$

与标准的渐近形式 $\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$ 比较知,相移

$$\delta_l = \delta_\nu - \frac{\nu - l}{2}\pi \tag{32}$$

在 r_0 点的衔接条件(25)式决定相移

$$\operatorname{tg}\delta_\nu = \frac{\hat{j}_\nu(kr_0)}{\hat{n}_\nu(kr_0)} \frac{A(E) - k\hat{j}'_\nu(kr_0)/\hat{j}_\nu(kr_0)}{A(E) - k\hat{n}'_\nu(kr_0)/\hat{n}_\nu(kr_0)} \overset{k\sim 0}{\sim} \frac{\pi(kr_0/2)^{2a_1+1}}{\Gamma\left(a_1+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(a_1+\frac{1}{2}\right)} \frac{A(M) - (a_1+1)/r_0}{A(M) - (-a_1/r_0)} \tag{33}$$

和

$$\left.\frac{\partial\delta_\nu}{\partial A}\right|_E < 0 \tag{34}$$

$A(E)$ 和 $[0, r_0]$ 区域中势能函数 $V(r)$ 有关, 若 $V = 0$, 则在区域 $[0, r_0]$ 内有解 $u = \hat{j}_l(kr)$, $A(M) = (l+1)/r_0$, 代入(33)式得 $E = M$处, $\operatorname{tg}\delta_\nu = 0$. 规定

$$\delta_\nu(M) = 0\ \text{若在}\ [0, r_0]\ \text{区域}\ V = 0 \tag{35}$$

尽管由(33)式定出的 δ_ν 允许相差 π 的整数倍,但这一规定和(33)式一起可以给出相移的绝对定义. 由于(33)式中有因子 $(kr_0)^{2a_1+1}$, $E \sim M$ 时的相移 δ_ν 是 π 的整数倍 $\left(a_1 \leqslant \frac{1}{2}\ \text{情况例外,见下}\right)$.

让 $[0, r_0]$ 区域的势函数由零变到给定值 $V(r)$, $A(M)$ 值相应发生变化.如果$A(M)$值减小,则 δ_ν 增加. 每当 $A(M)$ 减小而经过 $B(M) = -a_1/r_0$, $\delta_\nu(M)$ 由第一(三)象限进入第二(四)象限,即 $\delta_\nu(M)$ 增加 π, 反之, $A(M)$ 值增加而经过 $B(M)$ 值, $\delta_\nu(M)$ 减少 π, 因此,

$$\delta_\nu(M) = \delta_l(M) + (a_1 - l)\pi/2 = n(M)\pi \tag{36a}$$

对 $E<-M$，$2Eb+l(l+1)$ 可能会小于 $-1/4$，故此时近似解不是 Bessel 函数。但我们只关心 $E\lesssim -M$ 能域，此时上述讨论全部适用，我们有

$$\operatorname{tg}\delta_\nu \overset{k\sim 0}{\sim} -\frac{\pi(kr_0/2)^{2a_2+1}}{\Gamma\left(a_2+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(a_2+\frac{1}{2}\right)}\frac{A(-M)-(a_2+1)/r_0}{A(-M)-(-a_2/r_0)}$$

$$\cdot\left.\frac{\partial\delta_\nu}{\partial A}\right|_E<0$$

$$\delta_\nu(-M)=\delta_l(-M)+\frac{a_2-l}{2}\pi=n(-M)\pi \tag{36b}$$

最后，讨论临界情况，即当 $V(r)$ 趋于给定值时，$A(\pm M)$ 刚好等于 $B(\pm M)$ 值。此时，在 $[r_0,\infty)$ 区域有下述解和 $A(\pm M)$ 相接，

$$\left.\begin{aligned}&u=r^{-a_1},\ 若\ A(M)=B(M)=-a_1/r_0\\&u=r^{-a_2},\ 若\ A(-M)=B(-M)=-a_2/r_0\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$a_1>\frac{1}{2}$ 对应 $E=M$ 的束缚态，$a_2>\frac{1}{2}$ 对应 $E=-M$ 的束缚态，它们究竟描写正粒子还是反粒子，由 $A'(\pm M)$ 和 $B'(\pm M)$ 的相对大小决定。如果 $A'(M)=B'(M)$ 或 $A'(-M)=B'(-M)$，对应 $\varepsilon_E=0$，这状态对 N_l 的贡献为零。若 $-\frac{1}{2}<a_1<\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<a_2<\frac{1}{2}$，则此状态不是束缚态，文献中称为半束缚态。

当 $-\frac{1}{2}<a_1<\frac{1}{2}$ 时，由 $\hat{n}_\nu(x)$ 的具体形式可知

$$\hat{n}'_{a_1}(kr_0)/\hat{n}_{a_1}(kr_0)=-\frac{a_1}{r_0}-k\left(\frac{kr_0}{2}\right)^{2a_1}\pi\cot\left(a_1+\frac{1}{2}\right)\pi/\Gamma\left(a_1+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{38}$$

代入(33)式得

$$\operatorname{tg}\delta_\nu(k)\overset{k\sim 0}{\sim}\operatorname{tg}\left(a_1+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{39}$$

即

$$\delta_\nu(M)=n(M)\pi+\left(a_1+\frac{1}{2}\right)\pi\quad 若-\frac{1}{2}<a_1<\frac{1}{2},\ A(M)=B(M)$$

同理

$$\delta_\nu(-M)=n(-M)\pi+\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\pi\ 若-\frac{1}{2}<a_2<\frac{1}{2},A(-M)=B(M) \tag{40}$$

当 $a_1>\frac{1}{2}$ 和(或) $a_2>\frac{1}{2}$ 时，$\delta_\nu(\pm M)$ 等于 $n(\pm M)\pi$，或 $[n(\pm M)-1]\pi$，它由临界情况束缚态性质决定。$a_1=\frac{1}{2}$ 和(或) $a_2=\frac{1}{2}$ 情况，可由 $\varepsilon(r)$ 的符号决定分属上述两种情况。综合以上讨论，我们最后得到有势能尾巴 (1) 的 Klein-Gordon 方程的 Levinson 定理：

$$N_l=\frac{1}{\pi}[\delta_l(M)-\delta_l(-M)+\alpha_1-\alpha_2]+(a_1-a_2)/2 \tag{41}$$

其中 α_1 和 α_2 取值如下：

i）对于给定的势，若 $A(M) \neq B(M)$，则 $\alpha_1 = 0$，若 $A(-M) \neq B(-M)$，则 $\alpha_2 = 0$。

ii）对于给定的势，若 $A(M) = B(M)$，则

$\alpha_1 = 0$。若 $a_1 > \frac{1}{2}$，且条件 (28a) 或 (28c) 满足

$\alpha_1 = -1$。若 $a_1 > \frac{1}{2}$，且条件 (28b) 或 (28d) 满足

$$\alpha_1 = -\left(a_1 + \frac{1}{2}\right) \quad 若 \quad -\frac{1}{2} < a_1 < \frac{1}{2}$$

iii）对于给定的势，若 $A(-M) = B(-M)$，则

$\alpha_2 = 0$　若 $a_2 > \frac{1}{2}$ 且条件 (29a) 或 (29c) 满足

$\alpha_2 = -1$ 若 $a_2 > \frac{1}{2}$ 且条件 (29b) 或 (29d) 满足

$$\alpha_2 = -\left(a_2 + \frac{1}{2}\right) 若 \ -\frac{1}{2} < a_2 < \frac{1}{2}$$

注意：在临界情况下，当 $-\frac{1}{2} < a_1$，$a_2 < \frac{1}{2}$ 时，在 Levinson 定理中应把相移的附加增值 $\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)\pi$ 或 $\left(a_2 + \frac{1}{2}\right)\pi$ 减去.

参　考　文　献

[1] N. Levinson, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat-fys., *Medd.*, No. 9(1949), 25.

[2] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed. (Springer, New York, 1982) and the references therein.

[3] M.-C. Barthélémy, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **A7**(1967), 115; G. J. Ni, **高能物理与核物理，3**，(1979) 449; Z. Q. Ma and G. J. Ni, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 1482.

[4] C. N. Yang, in *Monopoles in Quantum Field Theory* Proceedings of the Monopole Meeting, Trieste, Italy, 1981, ed. by N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm (World Scientific, Singapore, 1982), p. 237; Y. Kazama and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **15D**(1977), 2300.

[5] R. Iwinski, L. Rosenberg and L. Spruch, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 1229; *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 1602; *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 946.

[6] Z. Q. Ma, *J. Math. Phys.*, **26**(1985), 1995; *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2203, 2213; **D33**(1986), 1745.

[7] Y. G. Liang and Z. Q. Ma, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 565.

[8] H. Snyder and J. Weinberg, *Phys. Rev.*, **15**(1940), 307; L. I. Schiff, H. Snyder and J. Weinberg., *Phys. Rev.*, **15**(1940), 315.

LEVINSON'S THEOREM FOR KLEIN-GORDON EQUATIONS WITH POTENTIAL TAILS

DAI AN-YING

(*Institute of Industry of Beijing*)

ABSTRACT

In terms of the modified Sturm-Liouville theorem, the properties of the solutions to the Klein-Gordon equations with the potential tails $\lim\limits_{r\to\infty} r^2V(r)=b$ is discussed and the corresponding Levinson's theorem is proved in this paper.