

$SU(2)$ Group Space Decimation 有效 作用量的 Monte Carlo 研究

李文铸 张剑波 董绍静
(浙 江 大 学)

摘 要

我们在 4^4 周期性正方格点上对 $SU(2)$ - $Y(120)$ 群 Group Space Decimation 有效近似作用量进行了 Monte Carlo 模拟,发现有效作用量系统在 $\beta \leq 9$ 没有凝固点,但有效作用量系统的内能曲线与 $SU(2)$ Wilson 作用量的内能曲线有差别.这说明,虽然 Group Space Decimation 方法原则上可使分立子群代替连续群进行 Monte Carlo 模拟,但就减少计算机模拟时间来说不是非常有效.

一、引 言

Monte Carlo 模拟已成为研究格点规范理论的最有效的方法^[1].但是,由于计算机容量与机时的限制,目前的 Monte Carlo 计算还是比较粗糙的,有待于进一步的增加格点和提高计算精度.在格点规范理论中,我们最感兴趣的是 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 等非阿沛尔群.对于这些群,一个非常有效的减少 Monte Carlo 模拟时间的方法是用分立子群代替连续解^[2].计算结果表明,用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群 $Y(120)$ 来进行 Monte Carlo 模拟,其结果与 $SU(2)$ 群的结果符合得很好.虽然存在由群分立性而引起的一阶相变点,但此相变点远离我们感兴趣的格点规范理论的过渡区,因而没有什么影响.用正二十面体子群 $Y(120)$ 代替 $SU(2)$ 其优点是显而易见的.原来 2×2 复矩阵的乘法,现在只要在已算好的乘法表中寻找.这样,就可以大大节约计算时间.目前,对于 $SU(2)$ 的 Monte Carlo 模拟,基本上都用正二十面体子群 $Y(120)$ 来代替.

对于 $SU(3)$,能不能用其分立子群来代替呢?回答几乎是否定的.如果我们用 $SU(3)$ 的最大类晶体子群 $\tilde{S}(1080)$ 代替 $SU(3)$,对四维空间的 Wilson 作用量进行模拟,发现由群分立性而引起的凝固相变点在 $\beta = 3.58 \pm 0.02$ ^[3],最近,我们对正弦作用量也作了类似的模拟,发现凝固点在 $\beta = 3.8$ ^[4]由于物理上感兴趣的区域应在 $\beta = 6$ 附近,看来这种朴素的替代有较大的困难.

对于 $SU(3)$ 规范群,如果能用分立群代替连续群,其收益将大于 $SU(2)$ 的情况,计算

量可减少百倍以上。因此,人们试图在这方面有所突破。最近, Flyvbjerg 提出了一种新的方法,其主要出发点是,用分立子群代替连续群是一种近似,这种近似可以用系统的方法使之成为精确,那就是用分立子群对有效作用量的 Monte Carlo 模拟来代替连续群对原来作用量的模拟。这种推导有效作用量的方法叫做 Group Space Decimation。一般来说,精确的有效作用量是极为复杂的。我们的目的是在合理的近似下,使有效作用量的形式不致大大复杂于原来作用量,而使我们能够用分立子群代替连续群进行 Monte Carlo 模拟。

本文的目的就是要检验这种 Group Space Decimation 方法的实际作用。为此,我们用 Monte Carlo 方法对 $SU(2)$ -Y (120) 系统近似到累积展开二级的有效作用量进行模拟,并与 $SU(2)$ 的模拟结果比较。

二、Group Space Decimation

我们首先简述一下 Group Space Decimation 方法^[9]。设 G 是规范群(紧致李群), dU 是 G 上的不变测度, H 为 G 的阶为 h 的分立子群。取格点规范作用量为 Wilson 作用量:

$$S[U] = \beta \sum_p S(U_p) \quad (1)$$

其中 $U_p = U_1 U_2 U_3^* U_4^*$ 为元格的四条链上群元的有序乘积。相应的系统配分函数为

$$Z = \int_G \prod_l dU_l \exp S[U] \quad (2)$$

式中 l 代表链。

群 G 中每个元 U 具有唯一的分解

$$U = u \cdot s \quad (3)$$

式中 $u \in H$, 而 $s \in Q$, Q 有下式定义

$$Q = \{U \in G | S[U] > S[uU] \forall u \in H / \{1\}\} \quad (4)$$

这样(4)式就定义了分解式(3)。

一个容易想象的 Q 的定义是

$$Q_s = \{U \in G | d(U, 1) < d(U, u) \forall u \in H / \{1\}\} \quad (5)$$

这里 $d(U, V)$ 是 G 的李代数中 U 与 V 之间的不变距离。对于秩为 1 的群, 如 $SU(2)$, (4) 与 (5) 是等价的。 Q 也可以有另外定义, 原则上, 我们可把 Q 作为一个可变化的量来最优化, 只要 Q 相对于 H 的元共轭和厄米共轭不变。

对于 Q 的任意选择, 我们可以认为是把群流形分成 h 块, $(uQ)_{u \in H}$, 每一块包含一个 H 的元 u , u 位于这个分块的中心而唯一地表征这个分块。

由(3)式可得,

$$\int_G dU \dots = \sum_{u \in H} \int_Q ds \quad (6)$$

式中我们已用了归一化条件

$$1 = \int_Q ds = \sum_{u \in H} \int_Q ds = \frac{1}{h} \sum_{u \in H} \quad (7)$$

ion
有
有
连

计算机容
格点和
尔群。
替连续
arlo 模
变点,
二十面
在只要
Monte

们用
生行模
作用量
附近,

, 计算

利用(6)式和 $S[U] = S[u, \varepsilon]$, 配分函数(2)可以写成

$$\begin{aligned} Z &= \int_G \prod_l du_l \exp S[U] \\ &= \prod_l \sum'_{u_l \in H_l} \prod_l \int_{\mathcal{O}_l} d\varepsilon_l \exp S[u, \varepsilon] \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\exp S'[u] = \prod_l \int_{\mathcal{O}_l} d\varepsilon_l \exp S[u, \varepsilon]$$

$S'[u]$ 可由累积量展开得到^[6],

$$S'[u] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S[u, \varepsilon]^n \rangle_c \quad (9)$$

式中下标 c 表示相联图, $\langle \rangle$ 由下式定义:

$$\langle F(\varepsilon) \rangle \equiv \prod_l \int_{\mathcal{O}_l} d\varepsilon_l F(\varepsilon) \quad (10)$$

这样, 配分函数就可以写成:

$$Z = \prod_l \sum'_{u_l \in H_l} \exp S'[u] \quad (11)$$

如果我们把 $S'[u]$ 看成有效作用量, 上式就是规范群是分立子群 H , 作用量为 $S'[u]$ 的系统之配分函数表达式。

现在, 如果我们用 Monte Carlo 方法来模拟 $SU(3)$ 格点规范系统, 就可以用模拟以 $S'[u]$ 为作用量的分立子群系统来代替, 原则上说, 这种代替是没有近似的。

事实上, 要精确计算 $S'[u]$ 是非常困难的, 就是能够计算的话, 所得的 $S'[u]$ 也会很复杂, 用 Monte Carlo 模拟就不会节省时间, 因此也就失去了用分立子群的意义。我们所希望的是, 在合理的近似下, 使 S' 不致比 S 复杂许多, 而能用分立子群来代替连续群来进行 Monte Carlo 模拟从而大大节省计算机时间。

三、 $SU(2)$ - $Y(120)$ 有效作用量与 MC 模拟

Flyvbjerg 在文献[5]中, 给出了 $SU(N)$ 群 Group Space Decimation 近似到累积展开二级的有效作用量, 也给出了 $SU(2)$ - $Y(120)$ 和 $SU(3)$ - $\bar{S}(1080)$ 系统相应的近似作用量的具体形式。本文中, 我们对其给出的 $SU(2)$ - $Y(120)$ 有效作用量进行了 Monte Carlo 模拟, 作用量的具体形式如下:

$$\begin{aligned} S'[u] &\approx S_1[u] + S_2[u] \\ &\approx \sum_p \left(\beta_T + \beta_F \frac{1}{2} x_F(u_p) + \beta_A \frac{1}{3} x_A(u_p) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{p_1 p_2 \\ p_1 \cap p_2 = \text{one link}}} \beta_{2F} \left(\frac{1}{2} x_F(U_{p_1 * p_2}) - \frac{1}{2} x_F(U_{p_1 * p_2^+}) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 U_p 等表示方格上各链的 U 的有序乘积, x_F 表示基础表示中的特征标, x_A 表示伴随表

示中

耦合

考虑
作用
 $S_1[u]$ 我们
改进
扫描这里
程度
示。

Carl

示中的特征标, $p_1 * p_2$ 和 $p_1 * p_2^+$ 表示相交于一条链的两元格, 如下图:

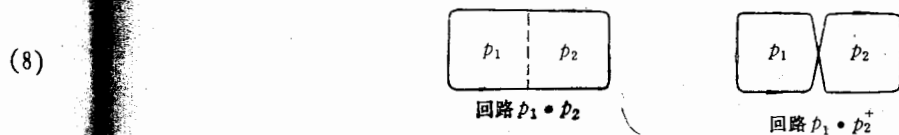


图 1 回路 $p_1 * p_2$ 和 $p_1 * p_2^+$

耦合常数为

(9)

$$\beta_T \equiv 0.03\beta^2$$

$$\beta_F \equiv 0.87\beta, \beta_A \equiv -0.025\beta^2, \beta_{2F} \equiv 0.005\beta^2. \quad (13)$$

考虑到对 $SU(2)$ 规范群, 用分立子群 Y 代替它进行 Monte Carlo 模拟而直接采用 Wilson 作用量, 在 $\beta < 6$ 的范围内得到了很好的结果。因此, 我们第一步用(12)式中单元格部分 $S[u]$ 进行 Monte Carlo 模拟, 即取:

(10)

$$S'[u] \approx \sum_p \left(\beta_T + \beta_F \frac{1}{2} x_F(u_p) + \beta_A \frac{1}{3} x_A(u_p) \right) \quad (14)$$

我们在 4^4 大小并具有周期性边界条件的四维超立方格点上进行了模拟, 采用的是通常的改进的 Metropolis 方法, 对每条给定的链进行 6 次修改后再转移到下条链, 对所有链变量扫描一遍称为完成一次 Monte Carlo 迭代。我们计算了以下两个量,

(11)

$$E_p = \left\langle 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_p \right\rangle, \quad E_q = \left\langle 1 - \frac{1}{\beta} S'_p[U_p] \right\rangle \quad (15)$$

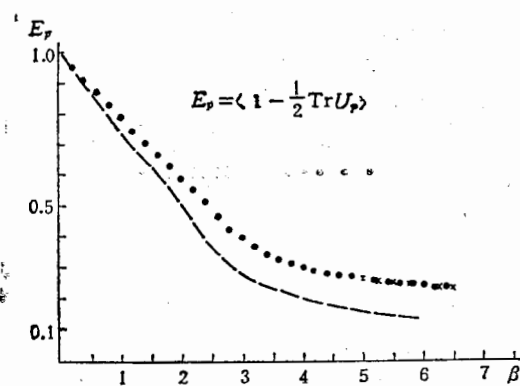


图 2 $SU(2)$ Group Space decimation 单元格作用是 $E_p \sim \beta$ 曲线

--- $SU(2)$ 群 Wilson 作用是

..... $\times \times \times$

这里 $\langle \rangle$ 表示 MC 平均, 计算这两个量可以直观地比较 $S'[U_p]$ 与 Wilson 作用量的近似程度。计算所得的数据都由做 100 次迭代取后 70 次迭代作平均得到, 结果如图 2—3 所示。发现内能曲线与 $SU(2)$ Wilson 作用量系统不重合。

我们随后对(12)式进行了 Monte Carlo 模拟, 所用的条件和计算的量与上述 Monte Carlo 模拟一样, 结果如图 4—5 所示。这里我们发现其近似程度也不是很好, 但有一点是

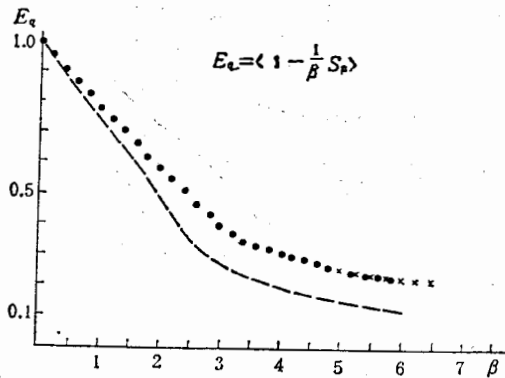


图 3 $SU(2)$ Group Space Decimation 单元格作用量 E_q - β 曲线

--- $SU(2)$ 群 Wilson 作用是

..... \rightarrow $\times \times \times \leftarrow$

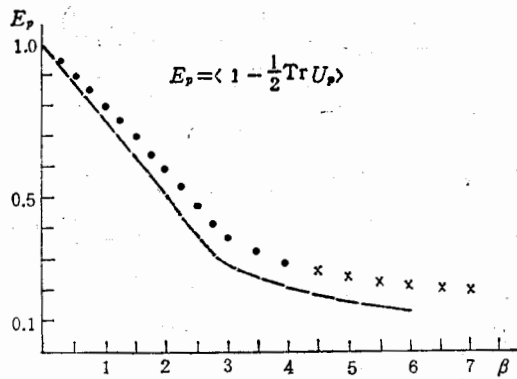


图 4 $SU(2)$ Group Space Decimation 有效近似作用量 E_p - β 曲线

--- $SU(2)$ 群 Wilson 作用是

..... \rightarrow $\times \times \times \leftarrow$

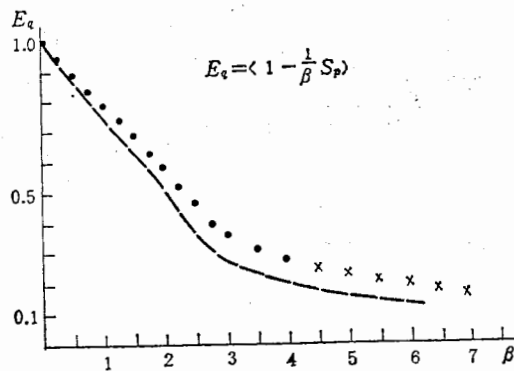


图 5 $SU(2)$ Group Space Decimation 有效近似作用量 E_q - β 曲线

--- $SU(2)$ 群 Wilson 作用是

..... \rightarrow $\times \times \times \leftarrow$

比
变。

了
从
立
是

6
时，

推
大

计
程
此
 $SU($
发
加

来
进
别
的
合。

[1]
[2]
[3]
[4]
[5]
[6]

比较满意的, 就是没有发现热滞圈, 说明在 $\beta < 9$ 时没有由于群分立性而引起的凝固相变。另外是 E_p 和 E_q 非常接近, 这也是我们所希望的。

四、结论与讨论

我们在 4^4 超立方格点上对 $SU(2)$ -Y(120) Group Space Decimation 有效作用量进行了 Monte Carlo 模拟, 发现内能曲线与 $SU(2)$ 群 Wilson 作用量的内能曲线有差别, 但从逐级近似来看, 有重合的趋势。我们对内能的计算一直做到 $\beta = 9$, 也没有发现由群分立性而引起的凝固点, 从这点上来说, Group Space Decimation 方法是成功的。另外一点是 E_p 和 E_q 非常接近, 直接上说明有效作用量能够近似原来的作用量系统。最后是 $\beta > 6$ 时, E_q 和 E_p 分开, 而 E_q 偏离正确值, 说明有效作用量有强耦合展开的特点, 在 β 大时, 必须保留到更高级的近似。对于 MC 模拟的结果, 我们认为:

1. E_q 与 $SU(2)$ Wilson 作用量结果差异较大的原因可能与有效作用量中耦合常数推导过程中所用的近似有关^[5], $\beta_F = 0.87\beta$, β 前面的系数过小了, 用另外的近似合理地增大 β 前面的系数, 有可能缩小差异。

2. Group Space Decimation 方法原则上可严格地使分立子群代替连续群, 但从减少计算机时间这点来看, 可能不是很有效。因为对于(12)式这样较为复杂的作用量, 其近似程度还不是很好。这样, 如果要想得到较满意的结果, 必须采用更加复杂的作用量, 因此用分立子群模拟复杂的作用量不一定会比连续群模拟简单的作用量省时。我们还对 $SU(3) \sim \bar{S}(1080)$ Group Space Decimation 有效作用量的单元格部分作了试验性模拟, 发现内能曲线与 $SU(3)$ 群的内能曲线差别较大, 也表明要得到精确的结果, 必须使用更加复杂的有效作用量。

3. 本文中我们是在 4^4 格点上进行 Monte Carlo 模拟的, 这对包含六链方格的作用量来说格点数目是少了一些。为了保证我们结果的可信度, 我们曾在 8^4 格点上对几个 β 点进行计算, 并与 4^4 格点上的结果比较, 发现元格内能在两种情形下只有 10^{-2} 量级的差别。这说明我们的结果是可靠的。另一方面, 从原则上说, 在进行包含多链方格的作用量的 Monte Carlo 模拟时, 必须使用更多的格点, 这就增加了计算量, 也与本文的结论相符合。

参 考 文 献

- [1] M. Creutz, L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 1390; *Phys. Rep.*, 95(1983), 201.
- [2] G. Bhanot and C. Rebbi, *Nucl. Phys.*, B180(1981), 469; C. B. Lang, C. Rebbi, P. Salomonson and B. S. Skagerstam, *Phys. Lett.*, 101B(1981), 173.
- [3] G. Bhanot, C. Rebbi, *Phys. Rev.*, D24(1981), 3319.
- [4] Li Wen-zhu, Zhang Jian-bo, Dong Shao-jing, to be published.
- [5] H. Flyvbjerg, *Nucl. Phys.*, B243(1984), 350.
- [6] R. Kubo, *J. Phys. Japan*, 17(1962), 1100.

MONTE CARLO STUDY OF $SU(2)$ GROUP SPACE DECIMATION EFFECTIVE ACTION

LI WEN-ZHU ZHANG JIAN-BO DONG SHAO-JING
(*Zhejiang University*)

ABSTRACT

We perform Monte Carlo simulation for the $SU(2)$ - $Y(120)$ group space decimation approximate effective action in 4^4 periodic lattice, find that the effective action system does not have freezing point at $\beta \leq 9$, but the internal energy curve of the system is different from that of $SU(2)$ group with Wilson action. This indicates that although group space decimation method in principle can make discrete subgroup substitute for continuous group available in Monte Carlo simulation, it is not an effective method as to save MC computer time.