第11卷 第1期
1987年1月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol. 11, No. 1
Jan., 1987

快　报

引力场约化理论中的 Virasoro 代数[1)]

侯伯宇　李　卫
（西北大学现代物理所）

摘　要

我们在引力场约化理论中找到了一种新的变换关系，并且发现这种变换所对应的代数结构是没有中心项的 Virasoro 代数。同 Geroch 群相比较，不难确定在引力场约化理论中 Virasoro 代数与 Kac-Moody 代数之间的关系．最后，我们指出了这种变换可用来产生 Ernst 场方程的新解。

一、前　言

自从 Kac-Moody 代数[1,2]和 Virasoro 代数[3]被发现以来，它们已经广泛地应用在各种物理理论中．例如，在讨论完全可积性体系时，经典运动方程解空间的"隐藏对称性"可由 Kac-Moody 代数来表示[4-9]．另一方面，由于非线性 σ-模型量子理论里存在保形对称性，在无穷小局域平移变换下，能量-动量张量提供了 Virasoro 代数表示[10-12]．对于弦理论也有类似情况[13]．现在我们研究 Virasoro 代数在引力场约化理论中的表示问题．

十多年前，Geroch[14] 最先发现对于有两个可对易 Killing 矢量的真空爱因斯坦场方程解，存在一个无穷多维对称群，称之为 Geroch 群．在此基础上，Kinnersley 和 Chitre[15] 引进一组无穷多系列双线性势，把 Geroch 群作用在其上，从而获得一个无穷小对称变换的无穷维李代数，即 Kac-Moody 代数．后来这一出色工作被不断地完善和简化[8,16-18]．特别是 Cosgrove[18] 在 Geroch 群之外又发现一个对称群，该群与李群 $SL(2,R)$ 同构．

根据无穷维李代数性质，如果设无穷多算符系列 $\{L_n\}$ 和 $\{J^a_n\}$ 分别构成 Virasoro 代数和 Kac-Moody 代数，那么有下列对易关系[12]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \tag{1a}$$

$$[J^a_n, J^b_m] = f^{abc}J^c_{n+m} + \frac{\lambda}{2}n\delta^{a,b}\delta_{n,-m} \tag{1b}$$

$$[L_n, J^a_m] = -mJ^a_{n+m} \tag{1c}$$

其中 $n, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, c 和 λ 分别为 Virasoro 代数和 Kac-Moody 代数中心

本文 1986 年 4 月 28 日收到.
1) 本文由中国科学基金资助.

项，$T_0^a(a=1,2,3)$是李群G的生成元，f^{abc}是其结构常数．考虑到 Kac-Moody 代数与 Virasoro 代数之间联系，以及李代数 $SL(2,R)$ 又是 Virasoro 代数最低阶子代数，我们希望把 Cosgrove 群扩充为无穷维李群，从而得到引力场约化理论中的 Virasoro 代数．

这里需要指出的是，本文讨论的 Virasoro 代数与量子场论或弦理论中研究的 Virasoro 代数有本质上不同．对前者，Virasoro 代数表示由 Ernst 场方程解提供，它反映了解空间的某种对称性，与能量-动量张量无关，不像后者反映的是普通坐标空间的保形对称性．因此，Virasoro 代数在物理上可用来表示体系不同对称性．

一、Geroch 群和 Cosgrove 群

我们先简单地回顾一下 Geroch 群与 Cosgrove 群作用在双线性势上的无穷小变换，同时说明本文中标定的符号．

我们知道，如果四维时空中有两个可对易 Killing 矢量，四维真空中爱因斯坦场方程可约化为二维问题．本文只采用两个 Killing 矢量都是类空，即静轴对称爱因斯坦空间．不难把该结果推广到柱对称爱因斯坦空间．对于前者，其度规可写为

$$ds^2 = g_{ij}(t,z)dx^i dx^j + f_{ab}(t,z)dx^a dx^b \tag{2}$$

这里 $i,j=1,2$，$a,b=3,4$，$(x^3,x^4)=(z,t)$．根据真空中爱因斯坦场方程，可知 g_{ij} 满足运动方程

$$\partial_a(\alpha^{-1}g\epsilon\partial^a g)=0 \qquad \varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $g=(g_{ij})$ 是 2×2 对称矩阵，$\alpha^2=-\det g$．

现定义 Ernst 矩阵势

$$H = g + i\psi \tag{4}$$

其中 ψ 满足

$$\partial_a\psi = \alpha^{-1}g\epsilon\tilde{\partial}_a g \tag{5}$$

这里 $\tilde{\partial}_a\equiv\varepsilon_{ab}\partial^b$．如果令 $\beta\equiv-\frac{1}{2}(-\psi-\psi^T)\varepsilon$，则从方程 (3) 和 (5) 就得到 Ernst 方程

$$2\alpha\tilde{\partial}_a H + 2\beta\partial_a H = (H+H^+)\epsilon\partial_a H \tag{6}$$

Geroch、Kinnersley 等人已证明：由 Ernst 势H可以产生无穷多系列的新势 $H^{(n)}$ 和 $N^{(m,n)}$ $(m,n=0,1,\cdots)$．下面列出它们递推关系以及有关性质[1,5]：当 $m,n\geqslant 0$ 时，

$$H^{(0)}=1,\quad H^{(1)}=iH\varepsilon,\quad H^{(n)}=-N^{(0,n)} \tag{7a,b,c}$$

$$N^{(m+k,n)}-N^{(m,n+k)}=\sum_{p=1}^{k}N^{(m,p)}N^{(k-p,n)} \quad k\geqslant 1 \tag{7d}$$

$$\partial_a N^{(m,n)}=\varepsilon H^{(m)+}\epsilon\partial_a H^{(n)},\quad N^{(m,0)}=0 \quad (m\neq 0) \tag{7e,f}$$

此外，当 $m,n<0$ 时，令

$$N^{(m,n)}\equiv 0 \tag{7g}$$

定义 $H^{(n)}$ 和 $N^{(m,n)}$ 产生函数为

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}t^{n},\quad G(t_1,t_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}N^{(m,n)}t_1^m t_2^n \tag{8a, b}$$

这里 t、t_1、t_2 是任意参数．$G(t_1,t_2)$ 与 $F(t)$ 有关系式

$$G(t_1,t_2)=-\frac{t_1}{t_1-t_2}+\frac{t_2}{t_1-t_2}F^{-1}(t_1)F(t_2) \tag{9a}$$

$$G(0,t_2)=-F(t_2),\quad G(t_1,0)=-I \tag{9b, c}$$

I 代表二阶单位矩阵．

Geroch 群无穷小变换可表达为

$$\gamma_a^{(k)}N^{(m,n)}=-T_aN^{(m+k,n)}+N^{(m,n+k)}T_a+\sum_{p=1}^{k}N^{(m,p)}T_aN^{(k-p,n)} \tag{10}$$

这里 $m\geqslant 0$，$n\geqslant 1$．除 $m+n=-k$ 例外，(10) 式对 $k<0$ 也成立．于是

$$[\gamma_a^{(k)},\gamma_b^{(l)}]N^{(m,n)}=f_{ab}^{c}\gamma_c^{(k+l)}N^{(m,n)} \tag{11}$$

这里 f_{ab}^c 是李代数 $SL(2,R)$ 结构常数．与 (1b) 相比较，显然 $\{\gamma_a^{(k)}\}$ 可构成没有中心项的 Kac-Moody 代数．

Cosgrove 给出 Cosgrove 群作用在生成函数上的有限变换形式，它们是

$$(R)_\lambda G(t_1,t_2)=G(\Lambda t_1,\Lambda t_2)\quad \Lambda=e^{\lambda} \tag{12a}$$

$$(Z)_\mu G(t_1,t_2)=\frac{tt_1}{t_1-t_2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\mu t_1}{1-\mu t_2}}\right)+(1-\mu t_1)^{-\frac12}(1-\mu t_2)^{-\frac12}G\left(\frac{t_1}{1-\mu t_1},\frac{t_2}{1-\mu t_2}\right) \tag{12b}$$

$$(\tilde{Q})_tG(t_1,t_2)=\frac{t}{t+t_2}+\frac{t_2}{t+t_2}G(t+t_1,t+t_2) \tag{12c}$$

其中 λ、μ、t 为参数．假如取这些参数为一阶无穷小量，那么 Cosgrove 群无穷小变换可写成

$$(\mathscr{R})_\lambda N^{(m,n)}=(m+n)N^{(m,n)} \tag{13a}$$

$$(\mathscr{L})_\mu N^{(m,n)}=\frac{1}{2}(2m-1)N^{(m-1,n)}+\frac{1}{2}(2n-1)N^{(m,n-1)} \tag{13b}$$

$$(\tilde{Q})_tN^{(m,n)}=(m+1)N^{(m+1,n)}+nN^{(m,n+1)} \tag{13c}$$

下面我们将会看到，Cosgrove 群对应的李代数正好是 Virasoro 代数最低阶子代数．

三、产生 Virasoro 代数的无穷小变换

为了找到引力场约化理论中 Virasoro 代数，现假设存在一个无穷小变换

$$\delta^{(k)}N^{(m,n)}=-\frac{1}{2}\Big\{(2m+k)N^{(m+k,n)}+(2n+k)N^{(m,n+k)}+\sum_{p=1}^{k}(2p-k)N^{(m,p)}N^{(k-p,n)}\Big\} \tag{14}$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．当 $k=0$、±1 时，我们得到

$$\delta^{(1)}N^{(m,n)} = -(m+1)N^{(m+1,n)} - nN^{(m,n+1)} \tag{15a}$$

$$\delta^{(0)}N^{(m,n)} = -(m+n)N^{(m,n)} \tag{15b}$$

$$\delta^{(-1)}N^{(m,n)} = -\frac{1}{2}(2m-1)N^{(m-1,n)} - \frac{1}{2}(2n-1)N^{(m,n-1)} \tag{15c}$$

显然算子 $\{\delta^{(1)}、\delta^{(0)}、\delta^{(-1)}\}$ 对应于 Cosgrove 群无穷小生成元.

从 (14) 式,不难证明

$$[\delta^{(k)}, \delta^{(l)}]N^{(m,n)} = (l-k)\delta^{(l+k)}N^{(m,n)} \tag{16}$$

对于所有整数 k、l 都成立. 算子 $\{\delta^{(k)}\}$ 构成没有中心项的 Virasoro 代数. 与 Geroch 群无穷小算子比较,还可得到另一对易关系

$$[\delta^{(k)}, \gamma_a^{(l)}]N^{(m,n)} = -l\gamma_a^{(k+l)}N^{(m,n)} \tag{17}$$

通过以上讨论，我们知道在 Ernst 场方程解空间除了存在 Kac-Moody 代数结构外，还有 Virasoro 代数结构. 它们反映的是 Ernst 场方程解空间的不同对称性.

为了今后讨论的方便，我们将根据产生函数写出无穷小变换 (14). 由关系式 (7d), (14) 式可表达为

$$\delta^{(k)}N^{(m,n)} = -\left\{(m+k)N^{(m+k,n)} + nN^{(m,n+k)} + \sum_{p=1}^{k} p\,N^{(m,p)}N^{(k-p,n)}\right\}$$
$$m \geqslant 1,\ n > 0\ \ k \geqslant 0 \tag{18}$$

令

$$\delta(s)F(t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \delta^{(k)}H^{(n)}s^k t^n \tag{19a}$$

$$\delta(s)G(t_1,t_2) = \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \delta^{(k)}N^{(m,n)}s^k t_1^m t_2^n \tag{19b}$$

由于

$$F(t) = -(-1 + N^{(0,1)}t + N^{(0,2)}t^2 + \cdots + N^{(0,n+1)}t^{n+1}t\cdots) \tag{20a}$$

$$F^{-1}(t) = 1 + N^{(0,1)}t + N^{(1,1)}t^2 + \cdots + N^{(n,1)}t^{n+1} + \cdots \tag{20b}$$

将 (18) 式代入 (19a) 式中,利用 (20a) 和 (20b) 两式可得到

$$\delta(s)F(t) = -\frac{t}{t-s}\left\{t\frac{\partial}{\partial t}F(t) - s\frac{\partial}{\partial s}F(s)F^{-1}(s)F(t)\right\} \tag{21}$$

最后利用(9a)式,给出 $G(t_1, t_2)$ 在 δ 作用下的表达式

$$\begin{aligned}\delta(s)G(t_1,t_2) = &-\frac{t_1^2}{t_1-s}\frac{\partial}{\partial t_1}G(t_1,t_2) - \frac{t_2^2}{t_2-s}\frac{\partial}{\partial t_2}G(t_1,t_2)\\ &- s\frac{\partial}{\partial s}G(t_1,s)G(s,t_2) + \frac{s^2}{t_2-s}\frac{\partial}{\partial s}G(t_1,s)\\ &- \frac{st_1}{(t_1-s)^2}G(s,t_2) + \frac{st_1}{(t_1-s)^2}G(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{22}$$

这样我们给出了无穷小变换 (14) 作用在产生函数上的形式. 由于 $\left.\frac{\partial}{\partial t}F(t)\right|_{t=0} = iH\varepsilon$, 则

$$\delta(s)H=-\frac{\partial}{\partial s}F(s)F(s)i\varepsilon \tag{23}$$

我们将在下一篇文章中证明，变换(23)可用来产生 Ernst 场方程新解。因此，变换(14)不仅可构成 Ernst 场方程解空间的 Virasoro 代数，而且提供了求 Ernst 场方程解的新途径。

参 考 文 献

[1] V. G. Kac, Matt. USSR-Izv., 2(1968), 1271.
[2] R. V. Moody, J. Algebra, **10**(1968), 211.
[3] M. A. Virasoro, *Phys. rev.*, D1(1970), 2933.
[4] L. Dolan and A. Roos, *Phys. Rev.*, D**22**(1980), 2018.
[5] B. Y. Hou, Yale preprint **80—29** (1980).
[6] B. Y. Hou, M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Rev.*, D**24**(1981), 2238.
[7] L. Dolan, *Phys Rep.*, **109**(1984), 1.
[8] Y. S. Wu and M. L. Ge, *J. Math. Phys.*, **24**(1983), 1187.
[9] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys. Lett.*, **117**(1982), 208.
[10] P. Goddard and D. I. Olive, *Nucl. Phys.*, B**257**[FS14] (1984), 226.
[11] A. A. Belavin et al., *Nucl. Phys.*, B**247**(1984), 83.
[12] P. Goddard, DAMTP 85/7, (1985).
[13] E. Fradkin and L. P. Kadanoff, *Nucl. Phys.*, B**170**[FS1] (1980), 1.
[14] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **12**(1970), 918; **13**(1971), 394.
[15] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 1538; **19**(1978), 1926.
[16] D. Maison, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 871.
[17] I. Hauser and F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, D**20**(1979), 362; 978.
[18] C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 2417.

VIRASORO ALGEBRA FOR THE THEORY OF THE REDUCED GRAVITY

B. Y. Hou　　W. Lee

(*Institute of Modern Physics, Northwest University*)

Abstract

In the paper we give a new transformation in the reduced gravity, which is associated with the Virasoro algebra without the center term. To compare with the Geroch group it is easy to establish the relationship between the Virasoro algebra and the Kac-Moody algebra in the theory of the reduced gravity. Then we point out that the transformation can be adopted to generated the new solutions of the Ernst equation from the old ones.