

(0-3/2) 电磁束缚系统的 B-S 方程及其近似解¹⁾

戴又善 宋孝同
(杭州大学)

摘 要

本文在梯形近似和弱耦合条件下求解了(0-3/2)电磁束缚系统的 Bethe-Salpeter 方程,给出了精确到 $O(\alpha)$ 量级的相对论协变的近似 B-S 波函数,进而利用此波函数和复合粒子量子场论的微扰展开理论,计算了 $Q^- + p \rightarrow (\pi^+ Q^-) + n$ 过程中 $(\pi^+ Q^-)$ 原子的最大产生截面。其结果为 $\sigma_{\max} \approx 4 \times 10^{-37} \text{cm}^2$ 。

一、引 言

自从描述束缚态的相对论性 B-S 方程提出以后,对它的性质已作了大量、详细的研究^[1]。然而,由于 B-S 方程本身的复杂性,要想精确求得束缚系统的 B-S 波函数却是相当困难的。因此人们尝试用各种近似方法来求解 B-S 方程。近年来在求解弱耦合的电磁束缚系统方面已取得了一些进展,在以前的一些工作中已分别求得了(自旋-自旋)为(0-0)^[2]、(0-1/2)^[3]、(1/2-1/2)(包括等质量和不等质量)^[4,5]系统的近似 B-S 波函数。

进一步研究由高自旋粒子组成的束缚系统是一个令人感兴趣的问题,例如由两个强子组成的 $(\pi^+ Q^-)$ 原子是一个对于强作用稳定的(0-3/2)电磁束缚系统,也是实验上有可能观察到的双例外原子之一^[6]。由于它和其它双例外原子一样只能在粒子反应的过程中产生,同时又带有高速飞行的特点,因此要从理论上研究 $(\pi^+ Q^-)$ 原子的性质。关键问题是要知道相对论协变的束缚态波函数,为此本文首先导出了(0-3/2)电磁束缚系统的 B-S 方程,并在梯形近似和弱耦合条件下进行求解。给出了精确到 $O(\alpha)$ 量级的相对论协变的近似 B-S 波函数,进而利用此波函数和复合粒子量子场论的微扰展开理论计算了 $(\pi^+ Q^-)$ 原子的产生截面。

二、(0-3/2) 电磁束缚系统的 B-S 方程及其近似解

定义(0-3/2)束缚系统的 B-S 波函数为

1) 中国科学院科学基金资助的课题。
本文 1985 年 5 月 30 日收到。

$$\chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(x_a, x_b) \equiv \langle 0 | T[\phi(x_a)\psi_\lambda(x_b)] | PS \rangle = \sqrt{\frac{M}{E}} e^{iPx} \chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(x). \quad (2.1)$$

其中 $\phi(x_a)$ 和 $\psi_\lambda(x_b)$ 分别是自旋为零的 a 粒子和自旋为 3/2 的 b 粒子在海森堡表象中的场算符, $|PS\rangle$ 为束缚态态矢, P, S 分别为束缚态的四动量和自旋投影

$$P^2 = \mathbf{P}^2 - E^2 = -M^2, \quad S = \pm 1/2, \pm 3/2. \quad (2.2)$$

X 和 x 分别为束缚系统的质心坐标和相对坐标

$$\begin{cases} X = \mu_a x_a + \mu_b x_b, & \mu_a = \frac{m_b}{m_a + m_b}; \quad \mu_b = \frac{m_a}{m_a + m_b}. \\ x = x_a - x_b, \end{cases} \quad (2.3)$$

动量空间的 B-S 波函数为

$$\chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(p) = \int d^4x e^{-iPx} \chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(x). \quad (2.4)$$

按标准方法,即由双粒子 Green 函数所满足的非齐次积分方程可以导出 $\chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(p)$ 所满足的齐次 B-S 方程

$$\chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p' \Delta(\mu_a P + p) S_{\lambda\mu}(\mu_b P - p) K_{\mu\nu}(p, p', P) \chi_{\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}}(p'). \quad (2.5)$$

其中 $\Delta, S_{\lambda\mu}$ 分别是自旋为零和自旋为 3/2 的传播子, $K_{\mu\nu}$ 是所有不可约自能图的贡献之和。

对于电磁束缚系统,由于相互作用耦合常数较小,可作梯形近似,则 $\Delta, S_{\lambda\mu}$ 可分别由自由传播子所代替,即

$$\Delta(k) = -i \frac{1}{k^2 + m_a^2}, \quad (2.6)$$

$$S_{\lambda\mu}(k) = i \frac{i\hat{k} - m_b}{k^2 + m_b^2} \left[\delta_{\lambda\mu} - 1/3 \gamma_\lambda \gamma_\mu + \frac{i}{3m_b} (\gamma_\lambda k_\mu - \gamma_\mu k_\lambda) + \frac{2}{3m_b^2} k_\lambda k_\mu \right]. \quad (2.7)$$

$K_{\mu\nu}$ 则化为单光子交换图的贡献。对电磁相互作用,可取

$$\mathcal{H}_I = -ie(J_\mu^{(0)} + J_\mu^{(3/2)}) A_\mu. \quad (2.8)$$

其中 $J_\mu^{(0)}, J_\mu^{(3/2)}$ 分别是自旋为零和自旋为 3/2 粒子的电磁流

$$J_\mu^{(0)} = (\partial_\mu \phi^+) \phi - \phi^+ (\partial_\mu \phi), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} J_\mu^{(3/2)} = & G_1(q^2) \bar{\psi}_\lambda \gamma_\mu \psi_\lambda + \frac{G_2(q^2)}{m_b} \bar{\psi}_\lambda \sigma_{\mu\nu} \psi_\lambda \partial_\nu + \frac{G_3(q^2)}{m_b^2} \bar{\psi}_\lambda \gamma_\mu \psi_\lambda \partial_\lambda \partial_\nu \\ & + \frac{G_4(q^2)}{m_b^2} \bar{\psi}_\lambda \sigma_{\mu\nu} \psi_\lambda \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$J_\mu^{(3/2)}$ 电磁流中的各项分别为电,磁,电四极矩和磁八极矩相互作用,它们在动量表象中分别含有光子动量的零次,一次,二次和三次方项。由于电磁束缚系统耦合较弱,光子传递的动量较小,因此若只考虑最主要的电相互作用项,并且忽略形状因子的修正 $G_1(q^2) \approx G_1(0) = 1$, 则可取

$$J_\mu^{(3/2)} \approx \bar{\psi}_\lambda \gamma_\mu \psi_\lambda. \quad (2.11)$$

由此可求得积分核为

$$K_{\mu\nu}(p, p', P) = -e^2 \frac{\delta_{\mu\nu}}{(p-p')^2} (2\mu_a \hat{p} + \hat{p} + \hat{p}'). \quad (2.12)$$

最后可得梯形近似下 $\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p)$ 所满足的 B-S 方程

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p) = I \left\{ [\mu_b \hat{p} - \hat{p} + im_b] \left[\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} \gamma_\lambda \gamma_\mu + \frac{i}{3m_b} \gamma_\lambda (\mu_b P - p)_\mu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{3m_b} \gamma_\mu (\mu_b P - p)_\lambda + \frac{2}{3m_b^2} (\mu_b P - p)_\lambda (\mu_b P - p)_\mu \right] \right. \\ \left. \cdot (2\mu_a \hat{p} + \hat{p} + \hat{p}') \chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p') \right\}. \quad (2.13) \end{aligned}$$

其中 I 为积分算符

$$I \equiv -ie^2 [(\mu_a P + p)^2 + m_a^2]^{-1} [(\mu_b P - p)^2 + m_b^2]^{-1} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p' \frac{1}{(p-p')^2}. \quad (2.14)$$

为了求解方程(2.13), 首先对 B-S 波函数进行一般性的对称性分析. 由于 (0-3/2) 束缚系统的总自旋为 3/2, 它在质心系中的行为类似于自旋为 3/2 的自由粒子, 因此可设

$$\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p) = A(p, P) u_s^{\dagger}(P). \quad (2.15)$$

其中 $A(p, P)$ 为 Lorentz 不变的 4×4 矩阵, $u_s^{\dagger}(P)$ 为 Rarita-Schwinger 矢量-旋量, 满足方程

$$\begin{cases} (P - iM) u_s^{\dagger}(P) = 0, \\ \gamma_\lambda u_s^{\dagger}(P) = 0, & P_\lambda u_s^{\dagger}(P) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

将 $A(p, P)$ 按正交完备的 γ 矩阵 ($1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu$) 展开, 由 Lorentz 不变性, 并利用 Rarita-Schwinger 方程 (2.18), 可将 $\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p)$ 的一般形式写为

$$\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p) = \left(f_1 + f_2 \frac{i\hat{p}}{M} + f_3 \gamma_5 + f_4 \gamma_5 \frac{i\hat{p}}{M} \right) u_s^{\dagger}(P). \quad (2.17)$$

其中 $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 都是 pP, p^2 的函数, 为空间反演不变的 Lorentz 标量, 由空间反演不变性给出

$$\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p) = -\eta_a \eta_b \eta_B (-1)^{\delta_{\lambda\mu}} \gamma_\lambda \chi_{\hat{p},-s}^{\dagger}(\tilde{p}). \quad (2.18)$$

其中 $\tilde{p} = (-\mathbf{P}, iP_0)$, η_a, η_b 分别为 a 粒子和 b 粒子的内禀宇称, η_B 为束缚态的宇称 $\eta_B = \eta_a \eta_b (-1)^L$. 若考虑轨道角动量 $L = 0$ 的基态, 则可证明 $f_3 = f_4 = 0$ 故基态 B-S 波函数的一般形式为

$$\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p) = \left[f_1(p, P) + f_2(p, P) \frac{i\hat{p}}{M} \right] u_s^{\dagger}(P). \quad (2.19)$$

其中含有两个未知的标量函数 f_1, f_2 , 将 $\chi_{\hat{p}s}^{\dagger}(p)$ 的一般表示式 (2.19) 代入 B-S 方程 (2.13), 利用自旋求和关系

$$\sum_s u_s^{\dagger}(P) u_s^{\dagger}(P) = \frac{\hat{P} + iM}{i2M} \left[\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} \gamma_\lambda \gamma_\mu + \frac{i}{3M} (\gamma_\lambda P_\mu - \gamma_\mu P_\lambda) + \frac{2}{3M^2} P_\lambda P_\mu \right]. \quad (2.20)$$

可得 f_1, f_2 所满足的联立方程

$$\begin{cases} f_1(p, P) + f_2(p, P) \frac{(pP)}{M^2} = -\frac{1}{9} I\{f_1(p', P)A(p, p', P) + f_2(p', P)B(p, p', P)\} \\ f_1(p, P) \frac{(pP)}{M^2} - f_2(p, P) \frac{p^2}{M^2} = -\frac{1}{9} I\{f_1(p', P)C(p, p', P) + f_2(p', P)D(p, p', P)\}. \end{cases} \quad (2.21)$$

其中 A, B, C, D 的具体表达式见附录 A.

联立方程 (2.21) 当然无法严格求解. 但考虑到电磁束缚系统为弱耦合的库仑原子, 结合能很小, 则有

$$\frac{p^2}{\mu^2} \sim \alpha^2, \quad \frac{p_0}{\mu} \sim \alpha^2. \quad (2.22)$$

其中 $\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ 为约化质量. $\alpha = \frac{1}{137}$ 为精细结构常数. 设 f_1 与 f_2 同数量级, 则在精

确到 $0(\alpha)$ 的近似下, 联立方程组 (2.21) 可简化为

$$\begin{cases} f_1(p, P) \approx -I\{4\mu_a\mu_b M^2 f_1(p', P)\}, \\ f_1(p, P) \frac{(pP)}{M^2} - f_2(p, P) \frac{p^2}{M^2} \approx -I\{[4\mu_a\mu_b(pP) - 2\mu_a p^2] f_1(p', P)\}. \end{cases} \quad (2.23)$$

即退耦为

$$f_1(p, P) \approx -I\{4\mu_a\mu_b M^2 f_1(p', P)\} \quad (2.24)$$

$$f_2(p, P) \approx \frac{1}{2\mu_b} f_1(p, P). \quad (2.25)$$

因此可求得精确到 $0(\alpha)$ 的近似 B-S 波函数为

$$\chi_{FS}^{\pm}(p) = N f(p, P) \left(1 + i \frac{\hat{p}}{2m_b}\right) u_S^{\pm}(P). \quad (2.26)$$

其中 $f(p, P)$ 满足 Wick-Cutkosky 型方程 (2.24), 其在质心系中的解已由 [2] 中给出, 对于基态

$$f(p, P) = [p^2 + \mu_a\mu_b p^2 + m_a m_b]^{-1} [(\mu_a P + p)^2 + m_a^2]^{-1} [(\mu_b P - p)^2 + m_b^2]^{-1}. \quad (2.27)$$

结合能为

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu_a \mu_b \alpha^2 M. \quad (2.28)$$

按标准方法可以得到 B-S 波函数在质心系中的下述归一化条件, 由此可以确定归一化系数 N

$$\frac{-i}{(2\pi)^8} \int d^4 p d^4 p' \bar{\chi}_{FS}^{\mu}(p) \frac{\partial}{\partial P_0} [G_{\mu\nu}(p, p', P) - K_{\mu\nu}(p, p', P)]_{P_0=M} \chi_{FS'}^{\nu}(p') = \delta_{SS'}. \quad (2.29)$$

其中 $\bar{\chi}_{FS}^{\mu}(p) = \chi_{FS}^{\mu}(p)^{\dagger} \gamma_4$ 为共轭波函数

$$G_{\mu\nu}(p, p', P) = (2\pi)^4 \delta^4(p' - p) \Delta^{-1}(\mu_a P + p) S_{\mu\nu}^{-1}(\mu_b P - p). \quad (2.30)$$

$K_{\mu\nu}(p, p', P)$ 的表达式见 (2.12) 式 $\Delta^{-1}, S_{\mu\nu}^{-1}$ 分别是自旋为零和自旋为 $3/2$ 的自由传播子之逆

$$\Delta^{-1}(k) = i(k^2 + m_a^2), \quad (2.31)$$

$$S_{\mu\nu}^{-1}(k) = (\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu)(-\hat{k} + im_b) + k_\mu \gamma_\nu - k_\nu \gamma_\mu. \quad (2.32)$$

将 B-S 波函数的表达式 (2.26) 代入 (2.29), 精确到 $0(\alpha)$, 则可得到如下的归一化条件

$$1 = \frac{-i}{(2\pi)^4} N^2 \int d^4 p [f(p, P)]^2 \left[4\mu_a^2 \mu_b M \varepsilon + \frac{\mu_a^2 + \mu_b^2}{\mu_b} p^2 - 2\mu_a(\mu_a - \mu_b)(pP) + \frac{4\mu_a \mu_b - \mu_a^2}{\mu_b} \frac{(pP)^2}{M^2} \right]. \quad (2.33)$$

进而利用 Feynman 参数化积分方法, 不难求得归一化系数为

$$N = 8 \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_a}} (\mu_a \mu_b \alpha)^{5/2} M^3. \quad (2.34)$$

值得指出的是, 以上得到的 (0-3/2) 电磁束缚系统基态的近似 B-S 波函数和在 [3] 中求得的 (0-1/2) 电磁束缚系统的结果非常相似

$$(0-1/2): \quad \chi_{PS}(p) = N f(p, P) \left(1 + i \frac{\hat{p}}{2m_b} \right) u_S(P).$$

$$(0-3/2): \quad \chi_{PS}^{\frac{1}{2}}(p) = N f(p, P) \left(1 + i \frac{\hat{p}}{2m_b} \right) u_S^{\frac{1}{2}}(P).$$

其中精确到 $0(\alpha)$ 量级, 则 $f(p, P)$ 所满足的 Wick-Cutkosky 方程 (2.24) 和确定 N 的归一化条件 (2.33) 两者都完全相同, 唯一的差别是用自旋 3/2 的 Rarita-Schwinger 矢量-旋量 $u_S^{\frac{1}{2}}(P)$ 代替了自旋 1/2 的 Dirac 旋量 $u_S(P)$, 这反映了两者的不同旋量结构, 同时说明在弱耦合的电磁束缚系统内部, 束缚粒子之间的相对运动是大致相同的, 不同自旋结构引起的相对运动差别应为 $0(\alpha)$ 量级.

三、 $(\pi^+ \Omega^-)$ 原子的产生

以上所求得的 (0-3/2) 电磁束缚系统相对论协变的近似 B-S 波函数, 可以用来讨论有关 $(\pi^+ \Omega^-)$ 原子的问题, 实验上获得 $(\pi^+ \Omega^-)$ 原子的一个可能途径是将 Ω^- 粒子打在核靶上, 即在扣下的俘获反应中产生



与过程 (3.1) 相应的最低阶 Feynman 图见图 1.

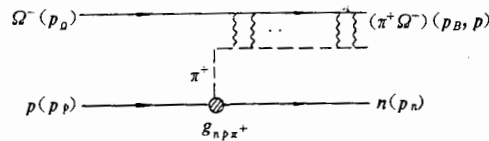


图 1 $\Omega^- + p \longrightarrow (\pi^+ \Omega^-) + n$

对于 $np\pi$ 顶点, 取同位旋守恒的唯象相互作用

$$\mathcal{U}_I = -ig\bar{N}\gamma_5\tau \cdot \phi N \quad \text{则} \quad g_{np\pi^+} = \sqrt{2}g \quad (3.2)$$

令

$$m_a = m_n, m_b = m_D; \mu_a = \frac{m_a}{m_a + m_b} \approx 0.077, \mu_b = \frac{m_b}{m_a + m_b} \approx 0.923,$$

则根据复合粒子量子场论的微扰展开理论,不难算得与(图1)相应的S矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle (\pi^+ Q^-)_n | S - 1 | Q^- p \rangle &= -\sqrt{2} g (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_n - p_p - p_D) \sqrt{\frac{m_B m_b m_n m_p}{\varepsilon_B \varepsilon_D \varepsilon_n \varepsilon_p}} \\ &\cdot \bar{\chi}_{p_B}^{\lambda}(\mu_b p_B - p_D) S_{\lambda\nu}^{-1}(p_D) u^{\nu}(p_D) \bar{u}(p_n) \gamma_5 u(p_p). \end{aligned} \quad (3.3)$$

在(3.3)式中虽然根据 Rarita-Schwinger 方程有 $S_{\lambda\nu}^{-1}(p_D) u^{\nu}(p_D) = 0$,但在 B-S 波函数 $\bar{\chi}_{p_B}^{\lambda}(\mu_b p_B - p_D)$ 的分母中也具有相应的零点. 将近似 B-S 波函数(2.28)代入后,最后可求得 S 矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle (\pi^+ Q^-)_n | S - 1 | Q^- p \rangle &= -i \sqrt{2} g N (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_n - p_p - p_D) \sqrt{\frac{m_B m_b m_n m_p}{\varepsilon_B \varepsilon_D \varepsilon_n \varepsilon_p}} \\ &\cdot \frac{3m_b - \mu_b m_B}{4\mu_b m_b^2 (m_a^2 - m_b^2 - m_B^2 - 2p_B p_D)^2} \\ &\cdot \bar{u}^{\lambda}(p_B) u^{\lambda}(p_D) \bar{u}(p_n) \gamma_5 u(p_p). \end{aligned} \quad (3.4)$$

按标准方法可算得实验室系 ($p_p = 0$) 的总截面为

$$\sigma_{\text{Lab}} = \frac{g^2 N^2}{16\pi \cdot 144 \mu_b^2 m_b^2 m_B m_p^2 (\varepsilon_D^2 - m_b^2)} \int_{c_-(\varepsilon_D)}^{c_+(\varepsilon_D)} dx \frac{(x-b)(5+7x+4x^2+2x^3)}{(x-a)^4}. \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{cases} C_{\pm}(\varepsilon_D) = \frac{(m_b^2 + m_p \varepsilon_D)[S(\varepsilon_D) + m_B^2 - m_n^2] \pm \sqrt{\Delta(\varepsilon_D)}}{2m_b m_B S(\varepsilon_D)}, \\ \Delta(\varepsilon_D) = m_p^2 (\varepsilon_D^2 - m_b^2) \{ [S(\varepsilon_D) + m_B^2 - m_n^2]^2 - 4m_b^2 S(\varepsilon_D) \}, \\ S(\varepsilon_D) = m_p^2 + m_b^2 + 2m_p \varepsilon_D. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$a = \frac{m_B^2 + m_b^2 - m_n^2}{2m_b m_B} \approx 1, \quad b = \frac{m_B^2 + m_b^2 - (m_n - m_p)^2}{2m_b m_B} \approx 1.0032. \quad (3.7)$$

由条件 $\Delta(\varepsilon_D) \geq 0$, 可推得

$$\varepsilon_D \geq \varepsilon_{\text{th}} = \frac{(m_B + m_n)^2 - m_b^2 - m_p^2}{2m_p} \approx 2075 \text{ MeV}. \quad (3.8)$$

如果令 $\varepsilon_D = \varepsilon_{\text{th}} + \varepsilon$, 则(3.8)式可化为

$$\sigma_{\text{Lab}} = \frac{g^2}{4\pi} \frac{N^2}{144 \mu_b^2 m_B^2} I(\varepsilon), \quad (3.9)$$

$$I(\varepsilon) = \frac{m_B^4}{A(\varepsilon)} \int_{c_-(\varepsilon)}^{c_+(\varepsilon)} dx \frac{(x-b)(5+7x+4x^2+2x^3)}{(x-a)^4}. \quad (3.10)$$

其中

$$\begin{cases} A(\varepsilon) = [S(\varepsilon) - (m_b + m_p)^2][S(\varepsilon) - (m_b - m_p)^2], \\ S(\varepsilon) = (m_B + m_n)^2 + 2m_p \varepsilon. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} C_{\pm}(\varepsilon) = C_0(\varepsilon) \pm C_1(\varepsilon), \\ C_0(\varepsilon) = \frac{[S(\varepsilon) + m_b^2 - m_p^2][m_B(m_B + m_n) + m_p\varepsilon]}{2m_b m_B S(\varepsilon)}, \\ C_1(\varepsilon) = \frac{[m_p\varepsilon(2m_B m_n + m_p\varepsilon) \cdot A(\varepsilon)]^{1/2}}{2m_b m_B S(\varepsilon)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

将 $\frac{\varepsilon^2}{4\pi} = 14.5$, $N^2 = 128\pi\mu_a^4\mu_b^5\alpha^5 m_B^6$ 代入 (3.9) 中, 得

$$\sigma_{\text{Lab}} = \frac{116\pi\mu_a^4\alpha^5}{9m_B^2} I(\varepsilon) \approx 2.95 \times 10^{-14} \frac{1}{m_B^2} I(\varepsilon). \quad (3.13)$$

当 $\varepsilon_0 = \varepsilon_m$, 即 $\varepsilon = 0$ 时, 有 $C_+(\varepsilon = 0) = C_-(\varepsilon = 0)$, 则 $I(\varepsilon = 0) = 0$, 但注意到这一产生 $(\pi^+\Omega^-)$ 原子的过程是一吸热反应, 在阈能附近其截面必然是上升的因而这一反应截面必将有一极值, 对 (3.10) 式进行数值积分的结果给出 $I(\varepsilon)$ 的最大值约为

$$I_{\text{max}}(\varepsilon \approx 517\text{MeV}) \approx 1.115 \times 10^5. \quad (3.14)$$

则产生截面的最大值约为

$$\sigma_{\text{max}} \approx 3.29 \times 10^{-9} \frac{1}{m_B^2} = 3.93 \times 10^{-37} \text{cm}^2. \quad (3.15)$$

此截面只相当于弱相互作用的量级, 无疑是较小的。这主要是由于该反应过程的阈能使得 B-S 波函数的峰值区域已位于物理区域之外, 而 B-S 波函数的归一化系数又非常小, 从而导致了反应截面的压低。从物理上来说, 两个自由粒子要形成束缚态, 它们之间的相对动量要求较小。即在 $\mathbf{p}_0 = 0$ 参考系中, 只有当动量 \mathbf{p}_π 也很小时, 形成 $(\pi^+\Omega^-)$ 原子的几率才较大。但根据四动量守恒条件, 在该过程中要使得 $p \rightarrow n + \pi^+$, 则所产生的 π 介子的动量就不可能很小。

尽管过程 (3.1) 的产生截面较小, 但该反应的一个特点是所形成的 $(\pi^+\Omega^-)$ 原子集中在某一较小的立体角内, 不论是引出或探测均较容易, 并且其它构成“背景”的反应道均较小, 因此在实验上只要能设法增加 Ω^- 粒子的产额, 仍有可能观察到 $(\pi^+\Omega^-)$ 原子。

最后指出, 所得的计算结果 (3.15) 与工作 [2] 中估计的 $\pi^+ + n \rightarrow (\pi^+\pi^-) + p$ 过程反应截面的数量级是相同的, 这在物理上分析是合理的, 因为这两个过程的物理机制是基本相同的。

作者对何祚庠和庆承瑞同志提供的许多宝贵意见和帮助, 表示衷心的感谢。

附录 A: 标量函数 f_1 、 f_2 所满足的联立方程

将 $\chi_{PS}^1(p)$ 的一般表示式 (2.21) 代入 B-S 方程 (2.15) 后, 利用条件 $\gamma_\nu \mu_a^5(P) = 0$, $P_\mu \mu_a^5(P) = 0$ 及 (2.22) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[f_1(p, P) + f_2(p, P) \frac{i\hat{p}}{M} \right] (iP - M) \\ &= \frac{1}{18} I \left\{ (\mu_b \hat{p} - \hat{p} + im_b) \left[3\delta_{\lambda\mu} - \gamma_\lambda \gamma_\mu - \frac{i}{m_b} \gamma_\lambda \hat{p}_\mu - \frac{i}{m_b} \gamma_\mu (\mu_b P - p)_\lambda \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{m_b^2} (\mu_b P - p)_\lambda p_\mu \left[(2\mu_a \hat{P} + \hat{p} + \hat{p}') \left[f_1(p', P) + f_2(p', P) \frac{i\hat{p}'}{M} \right] \right. \\
& \left. \cdot (i\hat{p} - M) \left[3\delta_{\mu\lambda} - \gamma_\mu \gamma_\lambda + \frac{i}{M} (\gamma_\mu p_\lambda - \gamma_\lambda p_\mu) + \frac{2}{M^2} p_\mu p_\lambda \right] \right]. \quad (A1)
\end{aligned}$$

对 (A1) 式两边进行求迹, 同样对 (A1) 式两边左乘 $i\hat{p}$ 后再求迹, 完成较长的求迹运算和整理后, 即可得到 f_1 、 f_2 所满足的联立方程 (2.23) 式, 其中 A 、 B 、 C 、 D 的具体表达式为

$$\begin{aligned}
A(p, p', P) = & 36\mu_a\mu_b M^2 + 18(\mu_a - \mu_b)(pP) - 18\mu_b(p'P) + \left(9 + 12\frac{\mu_a}{\mu_b}\right) p^2 + 9(pp') \\
& + 12\mu_a \frac{(pP)^2}{m_b M} + 2\left(\mu_b - \frac{m_b}{M}\right) \frac{(pP)(p'P)}{m_b M} + 2\left(\mu_b - \frac{m_b}{M}\right) \frac{(pP)p^2}{m_b^2} \\
& + 2\frac{(pP)(pp')}{m_b M} - 6\frac{(p'P)p^2}{m_b M} + 2\frac{p^4}{m_b^2} + 2\frac{p^2(pp')}{m_b^2} + 4(\mu_a - \mu_b) \frac{(pP)^3}{m_b^2 M^2} \\
& - 4\frac{(pP)^2(p'P)}{m_b M^3} + 2\frac{(pP)^2 p^2}{m_b^2 M^2} + 2\frac{(pP)^2(pp')}{m_b^2 M^2}. \quad (A2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(p, p', P) = & 36\mu_a\mu_b(p'P) + 18(pp') + 18\mu_b p'^2 + 36\mu_a \frac{(pP)(p'P)}{M^2} + 4\mu_a \frac{(pP)(pp')}{m_b M} \\
& + 9\frac{(pP)p^2}{M^2} + (12\mu_a + 9\mu_b) \frac{(p'P)p^2}{m_b M} + (4\mu_a + 6\mu_b) \frac{(pp')p^2}{m_b^2} \\
& + 6\frac{p^2 p'^2}{m_b M} + 16\mu_a \frac{(pP)^2(p'P)}{m_b M^3} + 4\frac{(pP)^2(pp')}{m_b^2 M^2} + 6\frac{(pP)^2 p'^2}{m_b M^3} \\
& + (8\mu_a + 2\mu_b) \frac{(pP)(p'P)p^2}{m_b^2 M^2} + 8\mu_a \frac{(pP)^3(p'P)}{m_b^2 M^4} + 2\frac{(p'P)p^4}{m_b^2 M^2} \\
& + 2\frac{(pP)p^2 p'^2}{m_b^2 M^2} + 2\frac{(pP)(p'P)p^2}{m_b^2 M^4} + 2\frac{(pP)^3 p'^2}{m_b^2 M^4}. \quad (A3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(p, p', P) = & 36\mu_a\mu_b(pP) - 18\mu_a p^2 + 5\left(\frac{m_b}{M} - \mu_b\right)(pp') - (2\mu_a + 18\mu_b) \frac{(pP)^2}{M^2} \\
& - 18\frac{(pP)(p'P)}{M^2} + (8\mu_a + 12\mu_b) \frac{(pP)p^2}{m_b M} + 3\frac{(pP)(pp')}{M^2} \\
& + 9\frac{(p'P)p^2}{M^2} + (8\mu_a + 4\mu_b) \frac{(pP)^3}{m_b M^3} - 2\frac{(pp')p^2}{m_b M} - (4\mu_a + 2\mu_b) \frac{p^4}{m_b^2} \\
& + 4\frac{(pP)^2(p'P)}{M^4} + 2\left(\frac{m_b}{M} - \mu_b\right) \frac{(pP)^2(pp')}{m_b^2 M^2} - (4\mu_a + 6\mu_b) \frac{(pP)^2 p^2}{m_b^2 M^2} \\
& - 6\frac{(pP)(p'P)p^2}{m_b M^3} - 4\frac{(pP)^4}{m_b M^5} - 4\frac{(pP)^3(p'P)}{m_b M^5} + 2\frac{(pP)p^4}{m_b^2 M^2} \\
& + 2\frac{(p'P)p^4}{m_b^2 M^2} + 2\frac{(pP)^3 p^2}{m_b^2 M^4} + 2\frac{(pP)^2(p'P)p^2}{m_b^2 M^4}. \quad (A4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(p, p', P) = & 10\mu_a \left(\frac{m_b}{M} - \mu_b\right)(pp') + 36\mu_a\mu_b \frac{(pP)(p'P)}{M^2} + (6\mu_a + 18\mu_b) \frac{(pP)(pp')}{M^2} \\
& + 18\mu_b \frac{(pP)p'^2}{M^2} - 18\mu_a \frac{(p'P)p^2}{M^2} + 4\mu_a \frac{(pP)^2(p'P)}{M^4} - 4\frac{(pP)^2(pp')}{M^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(pP)^2 p'^2}{M^4} - (4\mu_a + 9\mu_b) \frac{(pP')p^2}{m_b M} + 9 \frac{p^2 p'^2}{M^2} + (4\mu_a + 3\mu_b) \\
& \times \frac{(pP)(p'P)p^2}{m_b M^3} + 8\mu_a \frac{(pP)^3(p'P)}{m_b M^5} + 4 \frac{(pP)^3(pP')}{m_b M^5} + 4 \frac{(pP)^3 p'^2}{m_b M^5} \\
& + 6 \frac{(pP)(pP')p^2}{m_b M^3} + 4 \frac{(pP)p^2 p'^2}{m_b M^3} - (4\mu_a + 2\mu_b) \frac{(p'P)p^4}{m_b^2 M^2} \\
& - 4\mu_a \frac{(pP)^2(p'P)p^2}{m_b^2 M^4} - 2 \frac{(pP)^2(pP')p^2}{m_b^2 M^4} - 2 \frac{(pP)^2 p^2 p'^2}{m_b^2 M^4} \\
& - 2 \frac{(pP')p^4}{m_b^2 M^2} - 2 \frac{p'^2 p^4}{m_b^2 M^2}. \tag{A5}
\end{aligned}$$

A、B、C、D 中各项前的系数已利用近似 $m_a \approx \mu_a M$, $m_b \approx \mu_b M$ 而作了合并。

参 考 文 献

- [1] N. Nakanishi, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, 43(1969), 1.
- [2] 何炬, 张肇西, 何祚麻, *高能物理与核物理*, 3 (1979), 297.
- [3] Ching Cheng-rui, Ho Tsu-hsiu, Chang Chao-hsi, *Phys. Lett.*, B98(1981), 456.
- [4] 何炬, 张肇西, 何祚麻, *高能物理与核物理*, 3 (1979), 688.
- [5] Song Xiaotong, Ching Cheng-rui, Ho Tsu-hsiu, *Commun. in Theor. Phys.*, 2(1983), 935.
- [6] 张肇西, 何炬, 何祚麻, *中国科学*, 6 (1976), 572.

THE BETHE-SALPETER EQUATION FOR SPIN (0-3/2) ELECTROMAGNETIC BOUND SYSTEM AND ITS APPROXIMATE SOLUTION

DAI YOU-SHAN SONG XIAO-TONG
(Hangzhou University)

ABSTRACT

In this paper, the Bethe-Salpeter equation for spin (0-3/2) electromagnetic bound system is derived. Under the ladder approximation the approximate B-S wave function with accuracy up to order $O(\alpha)$ for this system is obtained. Utilizing this wave function, we estimated the cross section for producing $(\pi^+\Omega^-)$ in Ω^- -p collision process.