第 10 卷 第 4 期　　高能物理与核物理　　Vol. 10, No. 4
1986 年 7 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1986

Kerr-Newman 度规中带电 Bose 子束缚态

李元杰　张端明
（华 中 工 学 院）

摘　　要

本文指出，无质量 Bose 子和 Kerr-Newman 黑洞不形成束缚态. 有质量的 Bose 子，在 $0 < a < \sqrt{M^2 - Q^2}$ 的情况下，若 $E \neq \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}$ 则无束缚态；若 $E = \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}$ 则非束缚态存在的必要条件是(22)和(24)式. 在 $a = \sqrt{M^2 - Q^2}$ 的情况，束缚态的能量 $E = \frac{m\sqrt{M^2 - Q^2} + eQM}{2M^2 - Q^2}$，当 $Q = 0$ 或者 $e = 0$ 时，本文结论与 de Felic[1] 和章世伟、苏汝铿[2]的结果相符.

一、引　　言

黑洞周围的量子束缚态，特别是裸奇点周围的量子束缚态是一个未受到应有重视的问题，尽管人们对这类问题有过一些探讨. 最近，我们继 Cohen[6] 的讨论，用泛函分析方法对这类问题试作全面的研究，得到裸奇点周围能隙 $(-\mu, \mu)$ 中可能出现粒子的束缚态，此外，黑洞周围也有这种类似情况. 这一结果对基本粒子理论和早期宇宙学都将会带来许多新的物理效应. 本文就是这一研究工作中的一部分.

二、弯曲时空中的 Klein-Gordon 方程

首先将弯曲时空中的 Klein-Gordon 方程变换成需要的形式.

1. 对于 $\mu = 0$ 的情况

K-N 度规下 K-G 方程有形式

$$\Big\{\partial_r\Delta\partial_r - \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi + ieQr]^2 + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \Big(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi + a\sin\theta\partial_t\Big)^2\Big\}\phi = 0, \tag{1}$$

本文 1984 年 12 月 25 日收到.

其中，

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 = (r - r_+)(r - r_-)$$
$$r_\pm = M \pm (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}$$

且已取

$$A_t = -Qr/r^2 + a^2\cos^2\theta,\ A_r = A_\theta = 0,$$
$$A_\varphi = Qr a\sin^2\theta/r^2 + a^2\cos^2\theta,$$ [3]

这里，Q是黑洞电量，e是 Bose 子电量，a是黑洞单位质量的角动量，A_σ是 4 维势. 对(1)式分离变量

$$\phi = e^{i(m\varphi - Et)}\chi(\theta)\psi(r),$$

并引入变换

$$du = -dr/\Delta \tag{2}$$

得径向方程

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \{[E(r^2 + a^2) - am - eQr]^2 - \Delta K\}\psi = 0. \tag{3}$$

积分(2)得

$$u = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right). \tag{4}$$

其中，

$$\alpha = r_+ - r_-,\quad \chi = r - r_+, \tag{5}$$

于是有

$$1 + \alpha/x = e^{\alpha u},\ dx/du = -(x^2 + \alpha x). \tag{6}$$

利用(5)、(6)式将(3)式写成：

$$\frac{d^2\psi(x)}{du^2} + \left\{\left[E(x^2 + \alpha x) + (2ME - eQ)x + (2Mr_+ - Q^2)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(E - \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2 - (x^2 + \alpha x)K\right\}\psi(x) = 0, \tag{7a}$$

或者

$$(x^2 + \alpha x)^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2x + \alpha)(x^2 + \alpha x)\frac{d\psi}{dx} + \left\{\left[E(x^2 + \alpha x)\right.\right.$$
$$\left. + (2ME - eQ)x + (2Mr_+ - Q^2)\left(E - \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2$$
$$\left. - (x^2 + \alpha x)K\right\}\psi = 0. \tag{7b}$$

2. 对于 $\mu \neq 0$ 的情况

类似上面的处理容易得到：

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left\{\left[E(x^2 + \alpha x) + (2ME - eQ)x + (2Mr_+ - Q)^2\right.\right.$$
$$\left.\times\left(E - \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2 - (x^2 + \alpha x)[\mu^2x^2 + 2r_+\mu^2x$$

$$+\mu^2 r_+^2 + K_\mu]\Big\}\phi = 0, \tag{8a}$$

或者

$$(x^2+\alpha x)^2\frac{d^2\phi}{dx^2} + (2x+\alpha)(x^2+\alpha x)\frac{d\phi}{dx} + \left\{\left[E(x^2+\alpha x) + (2ME - eQ)x \right.\right.$$
$$\left.+ (2Mr_+ - Q^2)\left(E - \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2 - (x^2-\alpha x)(\mu^2 x^2 + 2r_+\mu^2 x$$
$$\left. + \mu^2 r_+^2 + K_\mu\right\}\phi = 0. \tag{8b}$$

三、$0<a<\sqrt{M^2-Q^2}$ 的情况

对于 $\mu = 0$ 的 Bose 子

1. 当 $E \neq (am + eQr_+)/(2Mr_+ - Q^2)$ 时，在 $x\to 0$ 附近，即视界附近，方程(7a)有渐近形式：

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \left[(2Mr_+ - Q^2)\left(E - \frac{am+eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2\phi = 0, \tag{9}$$

令

$$\gamma = (2Mr_+ - Q^2)\left(E - \frac{am + eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)$$

方程(9)有解

$$\begin{aligned}\phi &= c_0 e^{\pm i\gamma u}\\ &= c_0 e^{\pm i(\gamma/\alpha)\ln(1+\alpha/x)}.\end{aligned} \tag{10}$$

解(10)是具有无限多节点的共振态，于是，ϕ 在 $x\to 0$ 处非正则．故无束缚态存在．

2. 当 $E = (am + eQr_+)/(2Mr_+ - Q^2)$ 时，在 $x\to\infty$ 处，方程(7b)有渐近形式

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + E^2\phi = 0, \tag{11}$$

其解为

$$\phi = c_\infty e^{\pm iEx}. \tag{12}$$

于是，在 $x\to\infty$ 处，解(12)非 0 且非正则．故亦无束缚态存在．

对于 $\mu \neq 0$ 的 Bose 子

1. 当 $E \neq (am + eQr_+)/(2Mr_+ - Q^2)$，在 $x\to 0$ 处，方程(8a)有渐近形式：

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \left[(2Mr_+ - Q^2)\left(E - \frac{am+eQr_+}{2Mr_+ - Q^2}\right)\right]^2\phi = 0. \tag{13}$$

(13)式与(9)式完全一样，所以有相同的结论．

2. 当 $E = (am + eQr_+)/(2Mr_+ - Q^2)$，在 $x\to 0$ 处，方程(8b)有渐近形式：

$$\alpha^2 x^2\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha^2 x\frac{d\phi}{dx} - \alpha(\mu^2 r_+^2 + K_\mu)x\phi = 0 \tag{14}$$

(14)式可简化为

$$x\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d\phi}{dx}-L^2\phi=0, \tag{15}$$

其中，$L^2=(\mu^2r_+^2+K_\mu)/\alpha$,令 $y=\sqrt{x}$,(15)式有形式

$$\frac{d^2\phi}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{d\phi}{dy}-4L^2\phi=0. \tag{16}$$

(16)式是零阶虚宗量 Bessel 方程[4],其独立解为:

$$\phi=\begin{cases}I_0\,(2L\sqrt{x})\\K_0\,(2L\sqrt{x})\end{cases}$$

因 $K_0(0)\to-\infty$，所以束缚态解只可能取 $I_0(2L\sqrt{x})$，又 $I_0(0)=1$，且 $I_0(2L\sqrt{x}>0)>1$ 于是,在 $x=0$ 的邻域，$\phi(x)$ 是增函数,然而,束缚态要求 $\phi(\infty)\to0$，这表明 $0<x<\infty$ 区间中,至少存在某一个 x_0，使 $\phi(x_0)$ 有极大值. 换言之，对于束缚态,必满足条件:

$$\phi'(x_0)=0,\quad \phi''(x_0)<0,$$

否则，ϕ 便是非束缚态.

由方程(8b)，并考虑到 $\phi'(x_0)=0$ 及 $E=\dfrac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2}$ 我们得到:

$$\phi''(x_0)=-J/(x_0^2+\alpha x_0)^2, \tag{17}$$

其中，

$$\begin{aligned}J=\{&[E(x_0^2+\alpha x_0)+(2ME-eQ)x_0]^2\\&-(x_0^2+\alpha x_0)(\mu^2x_0^2+2r_+\mu^2x_0+\mu^2r_+^2+K_\mu)\}\end{aligned}$$

按 x_0 的降幂排列,将 J 整理为:

$$J=b_4x_0^4+b_3x_0^3+b_2x_0^2+b_1x_0. \tag{18}$$

其中，

$$\begin{aligned}b_4&=E^2-\mu^2,\\b_3&=2(2M+\alpha)E^2-2eQE-2r_+\mu^2-\alpha\mu^2,\\b_2&=[(2M+\alpha)E-eQ]^2-(\mu^2r_+^2+K_\mu+2\alpha r_+\mu^2),\\b_1&=-(\mu^2r_+^2+K_\mu)\alpha.\end{aligned}$$

这里,显然有 $b_1<0$，又束缚态要求 $E<\mu$，则 $b_4<0$，所以，若 $b_2<0$，$b_3<0$ 成立,那么必有

$$\phi''(x_0)=-J/(x_0^2+\alpha x_0)^2>0$$

此与 $\phi(x_0)$ 有极大值矛盾. 因此,当 $b_2<0$，$b_3<0$ 必无束缚态存在.

下面讨论 $b_2<0$，$b_3<0$ 成立的条件,实际上，b_2 可写成:

$$\begin{aligned}b_2=&(m^2a^2/r_+^2-K_\mu)+(3r_+^2-2a^2-2Q^2-a^4/r_+^2)(E^2-\mu^2)\\&+2Q^2E^2-2eQE(r_+^2-a^2)/r_+-a^4\mu^2/r_+^2,\end{aligned} \tag{19}$$

由于

$$\begin{cases} m^2a^2/r_+^2 < K_\mu, \\ E < \mu, \\ 3r_+^2 - 2a^2 - 2Q^2 - a^4/r_+^2 > 0, \end{cases} \tag{20}$$

则 $b_2 < 0$，即表示为更强的条件

$$2Q^2E^2 - 2eQE(r_+^2 - a^2)/r_+ - a^4\mu^2/r_+^2 < 0, \tag{21}$$

(21)式有解

$$\omega^+ > E > \omega^-, \tag{22}$$

其中，

$$\omega^\pm = \frac{e(r_+^2 - a^2)}{2Qr_+} \pm \sqrt{\frac{e^2(r_+^2 - a^2)^2}{4Q^2r_+^2} + \frac{a^4\mu^2}{2Q^2r_+^2}}$$

另外，$b_3 < 0$，能写成

$$2(2M + \alpha)E^2 - 2eQE - (2r_+ + \alpha)\mu^2 < 0, \tag{23}$$

(23)式有解为

$$E_+ > E > E_-, \tag{24}$$

其中

$$E_\pm = \frac{eQ}{2\alpha + 4M} \pm \frac{\sqrt{e^2Q^2 + (2r_+ + \alpha)(2\alpha + 4M)\mu^2}}{2\alpha + 4M},$$

利用关系式

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4M &= 4\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} + 4M \\ &= 4r_+, \\ 2r_+ + \alpha &= 3r_+ - r_-, \end{aligned}$$

得

$$E_\pm = \frac{eQ \pm \sqrt{e^2Q^2 + (12r_+^2 - 4a^2 - 4Q^2)\mu^2}}{4r_+},$$

条件(22)和(24)称为非束缚态条件.

当 $Q = 0$ 时，由(19)式可看出 $b_2 < 0$ 自然满足，非束缚态条件只剩下(24)式，且有简单形式

$$\sqrt{3r_+^2 - a^2}\,\mu/2r_+ > E > -\sqrt{3r_+^2 - a^2}\,\mu/2r_+,$$

或者

$$E^2 < \frac{M + 2\sqrt{M^2 - a^2}}{2(M + \sqrt{M^2 - a^2})}\mu^2. \tag{25}$$

(25)式与文献[2]的结果是完全一致的.

四、$a=\sqrt{M^2-Q^2}$ 的情况

对于极端 Kerr-Newman 黑洞，采用同样步骤讨论.

$\mu=0$ 的情形

1. 当 $E\neq(m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM)/(2M^2-Q^2)$ 时，在 $x\to 0$ 处，方程(7a)有渐近解

$$\phi\to\exp\pm i(2M^2-Q^2)\left(E-\frac{m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM}{2M^2-Q^2}\right)\Big/x. \tag{26}$$

解(26)是无限节点共振态，故无束缚态存在.

2. 当 $E=\dfrac{m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM}{2M^2-Q^2}$ 时，在 $x\to\infty$ 处，方程(7b)有渐近解

$$\phi\to e^{\pm iEx}. \tag{27}$$

亦无束缚态存在.

$\mu\neq 0$ 的情形

1. 当 $E\neq(m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM)/(2M^2-Q^2)$ 时，在 $x\to 0$ 处，方程(8a)有渐近解

$$\phi\to\exp\{\pm i(2M^2-Q^2)[E-(m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM)/(2M^2-Q^2)]/x\}. \tag{28}$$

与(26)式完全相同，故无束缚态存在.

2. 当 $E=(m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM)/(2M^2-Q^2)$ 时，方程(8b)有形式

$$x^4\frac{d^2\phi}{dx^2}+2x^3\frac{d\phi}{dx}+\{(E^2-\mu^2)x^4+[2E(2ME-eQ)-2\mu^2M]x^3$$
$$-[K_\mu+\mu^2M^2-(2ME-eQ)^2]x^2\}\phi=0, \tag{29}$$

(29)式可改写为

$$\phi''+\frac{2}{x}\phi'-\left\{\frac{L^*}{x^2}-\left[-(\mu^2-E^2)+\frac{4ME^2-2eQE-2\mu^2M}{x}\right]\right\}\phi$$
$$=0, \tag{30}$$

其中，

$$L^*=K_\mu+\mu^2M^2-(2ME-eQ)^2,$$

令 $\rho=2\sqrt{\mu^2-E^2}\,x$，$\phi=\rho^Ae^{-\rho/2}W$，$A=(\sqrt{1+4L^*}-1)/2$($A$ 是方程 $A^2+A-L=0$ 的正根).

则(30)式有形式：

$$\rho W''_\rho+(2A+2-\rho)W'_\rho-(A+1-B)W=0, \tag{31}$$

其中，

$$B=(2ME^2-eQE-\mu^2M)/\sqrt{\mu^2-E^2}$$

(31)式的解为一汇合超几何级数[5]，为确保束缚态，必须要求 $\phi(\infty)\to e^{-\rho/2}\to 0$，$W(\rho)$ 应退化为多项式，即要求 $B-A-1=$ 非负整数，或者

$$2(B-A-1)+1=N\ (N\text{ 为奇整数})$$

代入 B, A 得

$$\frac{4ME^2-2eQE-2\mu^2M}{\sqrt{\mu^2-E^2}}-\sqrt{1+4L^*}=N, \tag{32}$$

(32)式成立的前提条件是

$$\mu>E>\frac{eQ+\sqrt{e^2Q^2+8\mu^2M^2}}{4M}, \tag{33}$$

当 $Q=0$ 时,(33)式简化为

$$\mu>E>\frac{\sqrt{2}}{2}\mu, \tag{34}$$

(34)式与文献[2]的结果相符.

现将 $E=(m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM)/(2M^2-Q^2)$ 代入(33)式中,则得

$$\frac{\mu(2M^2-Q^2)-eQM}{\sqrt{M^2-Q^2}}>m>\frac{\sqrt{2M^2-Q^2}E_+^*-eQM}{\sqrt{M^2-Q^2}}, \tag{35}$$

其中,$E_\pm^*$ 为 $4ME^2-2eQE-2\mu^2M=0$ 的根.

令

$$\beta^2=(\mu^2-E^2)/(\mu^2-E_+^{*2}).$$

显然有

$$1>\beta>0 \tag{36}$$

将(36)式代入(32)式得

$$\frac{(m-m_+)(m-m_-)}{\frac{(2M^2-Q^2)^2}{4M(M^2-Q^2)}\sqrt{\mu^2-E_+^{*2}}\beta}=N+\sqrt{1+4L^*}, \tag{37}$$

其中,

$$m_\pm=\frac{(2M^2-Q^2)E_\pm^*-eQM}{\sqrt{M^2-Q^2}}$$

由(36)式不难看出(37)式成立的条件为

$$(m-m_+)(m-m_-)<(N+\sqrt{1+4L^*})\frac{(2M^2-Q^2)^2}{4M(M^2-Q^2)}\sqrt{\mu^2-E_+^{*2}}. \tag{38}$$

适当选取 N, L^* 及 m, (38)式是可以满足的. 因此,对于 $\mu\neq 0$, $a=\sqrt{M^2-Q^2}$,且

$$E=\frac{m\sqrt{M^2-Q^2}+eQM}{2M^2-Q^2}$$

的情况,只要 N, L^* 足够大,适当选取 m, 则总有可能存在束缚态.

参 考 文 献

[1] F. deFelic, *Phys. Rev.*, D **19** (1979), 451.
[2] 章世伟、苏汝铿,«物理学报» V**31**, N**3** (1982. 3), 311.
[3] 刘 辽,«广义相对论讲义(下册)» 170 北师大 (1980).
[4] 郭敦仁著,«数学物理方法»人民教育出版社 (1978).
[5] Landau Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergaman Press (1977).
[6] J. M. Cohen and R. T. Powers, *Commun. Math. Phys.*, **86**(1982), 69.

CHARGED BOSON BOUND STATES IN THE KERR-NEWMAN METRIC

LI YUAN-JIE　　ZHANG DUAN-MING
(*Hua Zhong University of Science and Technology*)

ABSTRACT

Charged boson bound states in Kerr-Newman metric are discussed. It is found that massless boson cannot be attracted by Kerr-Newman black hole to form bound states. For the massive boson, the condition of the nonbound states when $0 < a < \sqrt{M^2 - Q^2}$ and both the condition ane wave functions of the bound states when $a = \sqrt{M^2 - Q^2}$ are obtained. The energy mode of the bound states is single, $E = \dfrac{m\sqrt{M^2 - Q^2} + eQM}{2M^2 - Q^2}$. When $Q = 0$ or $e = 0$, the conclusion is in agreement with that of Zhang Shi-wei and Su Ru-keng.