第 10 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 10, No. 1
1986 年 1 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Jan., 1986

介子交换流的球面波展开

吴慧芳
(中国科学院高能物理研究所)

摘　　要

本文利用球面波展开在非相对论近似下推导了介子交换流公式，它们将便于计算介子交换流算符对核电磁矩阵元的修正.

如果考虑原子核内只包括 n、p 自由度,核的电磁流算符将由核内质子和中子的电磁流算符组成. 在冲量近似假定下，核和光子的电磁作用或者核的弱作用只要考虑核内单个核子的电磁作用或者弱作用不相干之和. 长期以来，冲量近似理论和实验之间存在有许多矛盾,即使在静态极限下(即转移动量 $q^2 \to 0$)，冲量近似也只能预言[1]: (a) 93.5% 的 H^3, He^3 核的实验磁矩，(b) 90% 的热中子俘获截面，(c) 95% 的 β 衰变的 Gamow-Teller 矩阵元. 而且随着 q^2 的增加,冲量近似和实验之间的矛盾愈明显[2].

介子交换流 (MEC) 是改进冲量近似理论和实验之间矛盾的重要途径之一[1-3]. 我们知道,核内除了 n、p 自由度外,还包括介子自由度、核力通过核子间的虚介子而传递,这些介子具有电荷,它们在核子间的传递就有电流,由介子所产生的电流称之为介子交换流,显然它是两体算符. 按照 Siegert 假设[4] (此假设在非相对论近似下成立),核内核子间的相互作用不影响电荷密度，只影响电流密度. 故这儿只考虑由于介子交换流所引起的电流算符的修正.

通常得到介子交换流算符的方法是利用 S 矩阵理论算出各种交换流图形的 S 矩阵元，从而得到介子交换流算符[5]. 将交换流算符代入到核矩阵元就可给出介子交换流的贡献. 我们知道,原子核是具有一定角动量本征态的状态,因此需要对交换流算符进行多极展开,展开成不可约张量之和，然后在某些近似下，获得介子交换流算符的核矩阵元. 在具体计算中这并不方便. 一个自然的想法是直接用球面波展开的 S 矩阵方法来推导介子交换流的公式. 本文将给出介子交换流算符的球面波展开式.

首先给出场量的球面波展开式,在标量场情况下,我们有

$$\varphi(x) = \sum_{lm} \int dk \frac{1}{\sqrt{2w_k}} [\alpha_{lm}(k) \varphi_{lm}(k, \boldsymbol{x}) e^{-i\omega t} + \alpha^{+}_{lm}(k) \varphi^{*}_{lm}(k, \boldsymbol{x}) e^{i\omega t}], \tag{1}$$

其中 $\varphi_{lm}(k, \boldsymbol{x})$ 是具有一定角动量的本征函数,

$$\varphi_{lm}(k, \boldsymbol{x}) = g_l(kx) Y_{lm}(\hat{x}), \tag{1a}$$

本文 1985 年 6 月 4 日收到.

$$g_l(kx) = i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k j_l(kx), \tag{1b}$$

$$\hat{\chi} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{1c}$$

对于旋量场，因为只考虑正粒子参与的过程，所以我们只给出正粒子部分的球面波展开式，

$$\psi_{正}(x) = \sum_{jlm} \int dp\, a_{jlm}(p) \psi_{jlm}(p, \boldsymbol{x}) e^{-iEt}, \tag{2}$$

其中

$$\psi_{jlm}(p, \boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(p, \boldsymbol{x}) \\ -\dfrac{p}{E+M}\varphi_{jl'm}(p, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}_{l'=2j-l}, \tag{2a}$$

$$\varphi_{jlm}(p, \boldsymbol{x}) = g_l(p, \boldsymbol{x})(Y_l(\hat{x})\chi_{1/2})_{jm}. \tag{2b}$$

对于矢量场,其展开式为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{jlm}\int dq \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} [C_{qjlm}\boldsymbol{A}_{qjlm}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} + C^+_{qjlm}\boldsymbol{A}^*_{qjlm}(\boldsymbol{x})e^{i\omega t}], \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{qjlm}(\boldsymbol{x}) = g_l(qx)\boldsymbol{Y}^m_{jl1}(\hat{\chi}), \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{Y}^m_{jl1}(\hat{x}) = \sum_{\alpha} C^{jm}_{lm-\alpha 1\alpha} Y_{lm-\alpha}(\hat{x})\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}. \tag{3b}$$

下面我们仅以 π 介子流和 π 对流为例,给出它们的球面波展开式.

(1) π 介子流的球面波展开

图 1 给出了 π 介子流的 Feynman 图，从图 1 的 S 矩阵元，我们可以抽出交换流 $j_\nu^{[\pi-流]}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$，它与 S 矩阵元的关系如下:

$$\langle f|S^{(3)}|i\rangle \equiv 2\pi_i j_\nu^{[\pi-流]} \cdot \xi_\nu^{(\eta)*} \sqrt{\frac{1}{2\omega_q}}\, \delta(E_{p_3} + E_{p_4} + \omega_q - E_{p_1} - E_{p_2}), \tag{4}$$

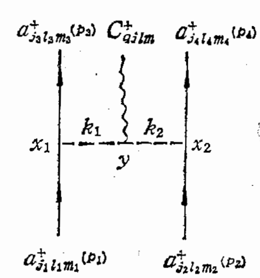

图 1　π 介子流

其中 $\xi_\nu^{(\eta)}$ 是光子的极化矢量，$|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 分别是两核子 j-j 耦合反对称化的初态和末态波函数，它们耦合成的总角动量分别是 J_iM_i 和 J_fM_f,其球面波展开式是

$$\mathscr{A}(\Psi_{j_1l_1m_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi_{j_2l_2m_2}(\boldsymbol{r}_2))_{JM} = \int dp_1 dp_2 B^{l_1}_{p_1} B^{l_2}_{p_2} |(a^+_{j_1l_1m_1}(p_1)a^+_{j_2l_2m_2}(p_2))_{JM}\rangle, \tag{5}$$

其中 B^l_p 是和单粒子波函数 $\Psi_{jlm}(r)$ 的径向部分 $u_l(r)$ 有关的一个积分.

$$B^l_p = \int r^2 u_l(r) g^*_l(pr) dr, \tag{5a}$$

按 S 矩阵理论，我们有

$$\langle f|S^{(3)}|i\rangle = \frac{(-i)^3}{3!}\int d^4x_1 d^4y d^4x_2$$

$$\cdot\langle f|T[\mathscr{H}_i(x_1)\mathscr{H}_i(y)\mathscr{H}_i(x_2)|i\rangle. \qquad (6)$$

将(6)中 $\mathscr{H}$ 量的场量以及波函数用球面波展开式(1)—(3)以及(5)代入，并作非相对论近似，经过较冗长的计算就得到

$$j^{[\pi-流]} = -\frac{e}{\sqrt{4\pi}}\cdot\left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi}\right)^2[\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2]_3 C^{J_iM_i}_{jmJ_fM_f}$$

$$\cdot\sum_{\lambda_1\lambda_2}\int dk_1dk_2\frac{1}{k_1^2+m_\pi^2}\cdot\frac{1}{k_2^2+m_\pi^2}\cdot F^{p_3l_3j_3}_{p_1l_1j_1}(k_1\lambda_1)\cdot F^{p_4l_4j_4}_{p_2l_2j_2}(k_2\lambda_2)$$

$$\cdot B_{\lambda_1\lambda_2lj}(k_1qk_2)(-)^{\lambda_1+j}\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{j}\hat{J}_f$$

$$U\begin{pmatrix} j_3 & j_1 & \lambda_1\\ j_4 & j_2 & \lambda_2\\ J_f & J_i & j\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(\eta)}, \qquad (7)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_1$，$\boldsymbol{\tau}_2$ 分别是第一，二个核子的同位旋，$f_{\pi NN}$ 是 πNN 顶角耦合常数.

$$F^{p_3l_3j_3}_{p_1l_1j_1}(k_1\lambda_1) = p_1\cdot G_{l_3\lambda_1l_1'}(p_3kp_1)\cdot\left\langle l_3\frac{1}{2}j_3\|Y_{\lambda_1}\|l_1'\frac{1}{2}j_1\right\rangle_{l_1'=2j_1-l_1}$$

$$-p_3\cdot G_{l_3'\lambda_1l_1}(p_3kp_1)\cdot\left\langle l_3'\frac{1}{2}j_3\|Y_{\lambda_1}\|l_1\frac{1}{2}j_1\right\rangle_{l_3'=2j_3-l_3}, \qquad (7a)$$

$$B_{\lambda_1\lambda_2lj}(k_1qk_2) = \sum_\lambda\hat{\lambda}\cdot[k_2\cdot G_{\lambda_1l\lambda}(k_1qk_2)\cdot C^{\lambda0}_{\lambda_2010}\cdot C^{l0}_{\lambda_10\lambda0}\cdot w(\lambda_1\lambda_2l_1;j\lambda)$$

$$+(-)^{l+j+1}k_1\cdot G_{\lambda l\lambda_2}(k_1qk_2)\cdot C^{\lambda0}_{\lambda_1010}\cdot C^{l0}_{\lambda_20\lambda0}\cdot w(\lambda_2\lambda_1l_1;j\lambda)], \qquad (7b)$$

$$G_{l_3\lambda_1l_1'}(p_3kp_1) = \int r^2drg^*_{l_3}(p_3r)g_{\lambda_1}(k_1r)g_{l_1'}(p_1r). \qquad (7c)$$

(2) π-对流的球面波展开

π-对流相应的 Feyman 图如图 2 所示.

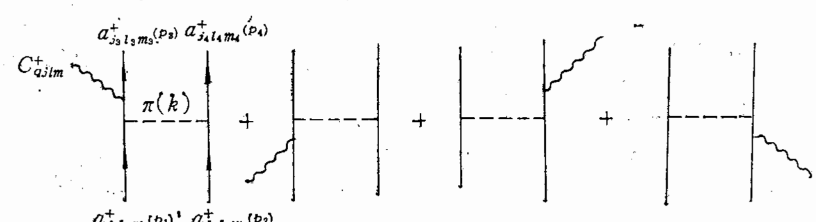

图 2 π-对流

类似于 π 介子流的推导，并作非相对论近似也可以得到

$$j^{[\pi-对流]} = -\frac{3}{8\pi}e\left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi}\right)^2[\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2]_3\cdot C^{J_iM_i}_{jmJ_fM_f}$$

$$\cdot\sum_{JJ_1\lambda}\int dk\frac{1}{k^2+m_\pi^2}(-)^{1+j+\lambda}\hat{l}\hat{j}\hat{\lambda}\hat{J}_f\hat{J}_1\hat{J}^2\cdot C^{j10}_{l0\lambda0}\cdot w(j1\lambda J_1;lJ)$$

$$
\cdot\left\{(-)^{j_1+j_3}\hat{l}_1\hat{j}_1\hat{j}_3\cdot C^{l_3 0}_{J_1 0 l_1 0}\cdot U\begin{pmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ J_1 & 1 & J \end{pmatrix}\right.
$$

$$
\cdot U\begin{pmatrix} j_3 & j_1 & J \\ j_4 & j_2 & \lambda \\ J_f & J_i & j \end{pmatrix}\cdot F^{p_4 l_4 j_4}_{p_2 l_2 j_2}(k\lambda)\cdot H_{l_3 l_1 l\lambda}(p_3 p_1 q k)
$$

$$
+(-)^{j_2+j_4}\hat{l}_2\hat{j}_2\hat{j}_4\cdot C^{l_4 0}_{J_1 0 l_2 0}\cdot U\begin{pmatrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ J_1 & 1 & J \end{pmatrix}
$$

$$
\left.\cdot U\begin{pmatrix} j_4 & j_2 & J \\ j_3 & j_1 & \lambda \\ J_f & J_i & j \end{pmatrix}\cdot F^{p_3 l_3 j_3}_{p_1 l_1 j_1}(k\lambda)\cdot H_{l_4 l_2 l\lambda}(p_4 p_2 q k)\right\}\cdot \xi^{(\eta)}, \tag{8}
$$

其中

$$
H_{l_3 l_1 l\lambda}(p_3 p_1 q k)=\int r^2 dr g^*_{l_3}(p_3 r) g_{l_1}(p_1 r) g_l(q r) g_\lambda(k r). \tag{8a}
$$

我们可以看到，(7)和(8)式是在非相对论近似下用多极展开形式较严格地得到的结果．它们明显地和原子核的初末态角动量有关，因此用它们来讨论具有一定角动量状态的原子核的电磁作用或弱作用有可能更方便，也更直接．

感谢郭子斯教授（SUNY at Stony Brook, U. S. A）以及张宗烨、余友文副研究员有益的讨论．

参　考　文　献

[1] L. L. Foldy and J. A. Lock, "Meson in Nuclei" VII, 467.
[2] H. Arenhövel, "Proceedings of the Ninth International Conference on High Energy Physics and Nuclear Structure", (1981), 521C.
[3] A. Arima, "Nuclear Physics with Electromagnetic Interactions", 9; I. S. Towner and F. C. Khanna, *Nucl. Phys.*, A399 (1983), 334; W. Strueve, CH. Hajduk and P. V. Saver, *Nucl. Phys.*, **A405** (1983), 620.
[4] A. J. F. SIEGZRT, *Phys. Rev.*, **52**(1937), 787.
[5] J. Dubach, J. H. Koch, T. W. Donnelly, *Nucl. Phys.*, **A271**(1976), 279.

THE SPHERICAL WAVE EXPANSION FOR THE PION EXCHANGE CURRENT

Wu Hui-fang
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

Abstract

Formulae for the meson exchange are deduced by using the spherical wave expansion in the nonrelativistic approximation. They will be convenient for calculating the corrections to the nuclear electromagnetic matrix elements of the meson exchange current operator.