第 10 卷 第 1 期
1986 年 1 月

高能物理与核物理
PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS

Vol. 10, No. 1
Jan., 1986

$SO(n) \supset SO(n-1)$ 张量表示和旋量表示的分支公式[1)]

吴 华
(苏 州 大 学)

摘　　要

本文从 Murnaghan《群表示理论》[1]一书所给 $O(n) \supset O(n-1)$ 的约化分支律出发，首先推导了 $SO(n) \supset SO(n-1)$ 张量表示的分支公式，又用 Kronecker 乘积方法把所得的公式推广到了旋量表示，从而给出了 $SO(n) \supset SO(n-1)$ 的完整分支公式.

一、引　　言

在把群论应用到实际物理问题的时候，约化分支律是十分重要的. 它是群表示理论的基本问题之一，在粒子物理和核理论中都经常用到. 尽管求 $SO(n) \supset SO(n-1)$ 约化分支律的工作早有不少方法和表格可循，但从实际应用来讲，公式化的表述可能是最方便的，它对于获得解析结果来说也最为有利. 本文的结论曾由 I. M. Gel'fand[2] 给出过证明，但证明过于简略，所以通过较直接的途径对这组约化公式作出证明仍是有益的.

二、$SO(n) \supset SO(n-1)$ 张量表示的分支公式

文献 [1] (9.73) 指出，当把 $O(n)$ 的特征标限制到 $O(n-1)$ 上时:

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_j)_{O(n)} = (1-\xi_1)^{-1}(1-\xi_2)^{-1}\cdots(1-\xi_j)^{-1}(\lambda_1\cdots\lambda_j)_{O(n-1)}, \tag{2.1}$$

其中: $j = 1, 2, \cdots, k$, $k = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

上式中，ξ_i 是一个算符，它的作用是:

$$\xi_i(\lambda_1\cdots\lambda_i\cdots\lambda_j) = (\lambda_1\cdots, \lambda_i - 1, \cdots, \lambda_j). \tag{2.2}$$

若 $(l_1\cdots l_k)$ 指不可约表示，那它应取正规分割形式:

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_k \geqslant 0. \tag{2.3}$$

如果这一条件不满足，那么应当应用关系

$$(\cdots a, b\cdots) = -(\cdots b-1, a+1\cdots), \tag{2.4}$$

本文 1984 年 1 月 26 日收到.
1) 中国科学院科学基金资助的课题.

去设法排成正规分割. 如果这种努力不可实现，那么 $(l_1\cdots l_k)=0$. 根据这一点及(2.2)，可把(2.1)改写成:

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{O(n)}=\sum_{l_1=-\infty}^{\lambda_1}\cdots\sum_{l_k=-\infty}^{\lambda_k}(l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}. \tag{2.5}$$

很明显，尽管(2.1)或(2.5)具有解析形式，但由于条件(2.3)不是自然实现的，所以使用起来仍不方便. 下面设法利用(2.4)把(2.5)中所有为零的项去掉，得到使(2.3)式自动满足的表式.

考虑到(2.3)，(2.4)，很容易得到:

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{O(n)}=\sum_{l_1=-(k-1)}^{\lambda_1}\cdots\sum_{l_{k-1}=-1}^{\lambda_{k-1}}\sum_{l_k=0}^{\lambda_k}(l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}. \tag{2.6}$$

在 $k=1$ 的情况下，就是:

$$(\lambda_1)_{O(3)}=\sum_{l_1=0}^{\lambda_1}(l_1)_{O(2)}. \tag{2.7}$$

假设一般地有:

$$(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)_{O(n)}=\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\sum_{l_2=\lambda_3}^{\lambda_2}\cdots\sum_{l_k=0}^{\lambda_k}(l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}, \tag{2.8}$$

如果它对于 k 成立，那么可证它对于 $k+1$ 也成立: 令 $(\lambda_1\cdots\lambda_k\lambda_{k+1})_{O(n)}=(\mu_0;\mu_1\cdots\mu_k)_{O(n)}$，由(2.6)知:

$$(\mu_0;\mu_1\cdots\mu_k)_{O(n)}=\sum_{l_0=-k}^{\mu_0}\left[\sum_{l_1=-(k-1)}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_0;l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}\right]. \tag{2.9}$$

可以证明，在假设(2.8)下:

$$\sum_{l_1=-(k-1)}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_0;l_1\cdots l_k)=\sum_{l_1=\mu_2}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_0;l_1\cdots l_k), \tag{2.10}$$

为此，首先注意到:

$$[(l_1\cdots l_k)=0]\Rightarrow[(l_0;l_1\cdots l_k)=0], \tag{2.11}$$

接着考察(2.8)式，它实际上就是:

$$\sum_{l_1=-(k-1)}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_1\cdots l_k)=\sum_{l_1=\mu_2}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_1\cdots l_k). \tag{2.8'}$$

结合(2.8′)和(2.11)即可证明(2.10)，而有了(2.10)、(2.9)就可写为:

$$\begin{aligned}(\mu_0;\mu_1\cdots\mu_k)_{O(n)}=&\sum_{l_0=\mu_1}^{\mu_0}\sum_{l_1=\mu_2}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_0l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}\\&+\sum_{l_0=-k}^{\mu_1-1}\sum_{l_1=\mu_2}^{\mu_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{\mu_k}(l_0l_1\cdots l_k)_{O(n-1)}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

上式的第二部分可以再应用归纳法，证得为零. 于是(2.12)就是(2.8)在 $k+1$ 时的情形，所以我们证明了(2.8)对任意 k 成立.

这样，对于不可约表示，就有

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{O(2k+1)}=\bigoplus_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\bigoplus_{l_2=\lambda_3}^{\lambda_2}\cdots\bigoplus_{l_k=0}^{\lambda_k}(l_1\cdots l_k)_{O(2k)}, \tag{2.13}$$

式中的等号指约化过程中的等价关系。

若 $n=2k$，则 $O(n-1)$ 的不可约表示只用 $k-1$ 个指标表达，根据文献[1]给出的特征标缩减规则

$(l_1\cdots l_{k-1},0)\to(l_1\cdots l_{k-1})$；$(l_1\cdots l_{k-1},1)\to(l_1\cdots l_{k-1})^*$；$(l_1\cdots l_{k-1},l_k\geqslant 2)\to 0$，可得：

$$(\lambda_1\cdots\lambda_{k-1},0)_{O(2k)}=\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=\lambda_k}^{\lambda_{k-1}}\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{O(2k-1)},\tag{2.14}$$

$$(\lambda_1\cdots\lambda_{k-1},\lambda_k\neq 0)_{O(2k)}=\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=\lambda_k}^{\lambda_{k-1}}[(l_1\cdots l_{k-1})_{O(2k-1)}\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{O(2k-1)}{}^*].\tag{2.15}$$

将以上二式的两边都约化到转动群，就有：

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{SO(2k+1)}=\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\oplus\sum_{l_2=\lambda_3}^{\lambda_2}\oplus\cdots\sum_{l_k=-\lambda_k}^{\lambda_k}\oplus(l_1\cdots l_k)_{SO(2k)},\tag{2.16}$$

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{SO(2k)}=\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\oplus\sum_{l_2=\lambda_3}^{\lambda_2}\oplus\sum_{l_{k-1}=|\lambda_k|}^{\lambda_{k-1}}\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}.\tag{2.17}$$

三、$SO(n)\supset SO(n-1)$ 旋量表示的分支公式

$SO(n)$的旋量表示可以通过张量表示与基本旋表示的乘积得到，它们有下列关系[3]：

$$(\lambda_1\cdots\lambda_k)_{SO(2k+1)}\otimes\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k+1)}=\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\oplus\cdots\sum_{S_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\oplus(S_1\cdots S_k)_{SO(2k+1)},\tag{3.1}$$

$$(\lambda_1\cdots\lambda_{k-1},0)_{SO(2k)}\otimes\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}=\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_{k-1}\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\oplus\cdots\sum_{S_{k-1}=\lambda_{k-1}-\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\oplus\cdot\left(S_1\cdots S_{k-1},\ \frac{1}{2}\varepsilon\right)_{SO(2k)},$$

$$\text{其中：}\ \varepsilon=(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1}(s_i-\lambda_i-\frac{1}{2})}\tag{3.2}$$

$$(\lambda_1\cdots,\lambda_k>0)_{SO(2k)}\otimes\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}=\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}\\ \sum_{i=1}^{k}(s_i-\lambda_i-\frac{1}{2})=even}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\oplus\cdots\sum_{S_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\oplus(S_1\cdots S_k)_{SO(2k)},\tag{3.3a}$$

$$(\lambda_1\cdots,\lambda_k>0)_{SO(2k)}\otimes\left(\frac{1}{2}\cdots,-\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}$$

$$= \sum_{\substack{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \cdots \sum_{\substack{s_k=\lambda_k-\frac{1}{2} \\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_k\geqslant\frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^{k}(s_i-\lambda_i-\frac{1}{2})=odd}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\!\!\oplus (S_1\cdots S_k)_{SO(2k)}. \tag{3.3b}$$

根据基本旋表示的维数和自乘约化[3]，容易求出其约化分支为:

$$\left(\frac{1}{2}\cdots\pm\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)} = \left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k+1)} \tag{3.4}$$

及
$$\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k+1)} = \left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)} \oplus \left(\frac{1}{2}\cdots,\ -\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}. \tag{3.5}$$

有了以上的准备工作，就可以讨论一般旋表示的约化了.

A. $SO(2k)\supset SO(2k-1)$

将(3.2)式的左边约化到 $SO(2k-1)$:

$$\sum_{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \cdots \sum_{\substack{s_{k-1}=\lambda_{k-1}-\frac{1}{2} \\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_{k-1}\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \left(S_1\cdots S_{k-1},\ \frac{1}{2}\varepsilon\right)_{SO(2k)}$$

$$= \sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\!\!\oplus \cdots \sum_{l_{k-1}=0}^{\lambda_{k-1}}\!\!\oplus \sum_{s_1=l_1-\frac{1}{2}}^{l_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \cdots \sum_{\substack{s_{k-1}=l_{k-1}-\frac{1}{2} \\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_{k-1}\geqslant\frac{1}{2}}}^{l_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus (S_1\cdots S_{k-1})_{SO(2k-1)}. \tag{3.6}$$

在进行了适当的变换后，可以得到:

$$\sum_{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \cdots \sum_{\substack{s_{k-1}=\lambda_{k-1}-\frac{1}{2} \\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_{k-1}\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \left(S_1\cdots S_{k-1},\ \frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}$$

$$= \sum_{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \cdots \sum_{\substack{s_{k-1}=\lambda_{k-1}-\frac{1}{2} \\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_{k-1}\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus \left\{\sum_{l_1=s_2}^{s_1}\!\!\oplus \cdots \sum_{l_{k-1}=\frac{1}{2}}^{s_{k-1}}\!\!\oplus (l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}\right\}. \tag{3.7}$$

考虑到 $\left(S_1\cdots S_{k-1},\ \pm\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}$ 到 $SO(2k-1)$ 的分支一样，ε 已略去.

如果 $\left(S_1\cdots S_{k-1},\ S_k=\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)} = \sum_{l_1=s_2}^{s_1}\!\!\oplus \cdots \sum_{l_{k-1}=\frac{1}{2}}^{s_{k-1}}\!\!\oplus (l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}$, (3.8)

那么(3.7)就自然成立. 但反过来我们只要反复地把(3.7)运用若干次，并在最后注意到 $\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}$ 满足(3.8)，就可证明(3.8)式确实成立.

对于 $|S_k|>\frac{1}{2}$ 的情况. 从(3.3)式出发，考虑到

$$(\lambda_1\cdots,\lambda_k>0)_{SO(2k)}\otimes\left[\left(\frac{1}{2}\cdots,+\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}\oplus\left(\frac{1}{2}\cdots,-\frac{1}{2}\right)_{SO(2k)}\right]=(3.3a)\oplus(3.3b)$$

及 (3.4)，就有：

$$\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\cdots\sum_{S_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\!\!\oplus(S_1\cdots S_k)_{SO(2k)}$$

$$=2\sum_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\!\!\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=\lambda_k}^{\lambda_{k-1}}\!\!\oplus\sum_{\substack{S_1=l_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{l_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\cdots\sum_{S_{k-1}=l_{k-1}-\frac{1}{2}}^{l_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus(S_1\cdots S_{k-1})_{SO(2k-1)},\tag{3.9}$$

适当变换后就得：

$$(3.9)\text{ 式}=2\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\cdots\sum_{S_{k-1}=\lambda_{k-1}-\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\sum_{l_1=S_2}^{S_1}\!\!\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=S_{k-1}-(\lambda_{k-1}-\lambda_k)}^{S_{k-1}}\!\!\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}.$$

把对 S_{k-1} 的求和明确写出：

$$(3.9)\text{式}=\sum_{\text{其它求和}}\!\!\oplus\left\{\sum_{l_{k-1}=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}-\frac{1}{2}}\!\!\oplus\;\oplus\sum_{l_{k-1}=\lambda_k+\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\;\oplus\sum_{l_{k-1}=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}-\frac{1}{2}}\!\!\oplus\;\oplus\sum_{l_{k-1}=\lambda_k+\frac{1}{2}}^{\lambda_{k-1}+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\right\}(l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}.$$

把第三部分中 $l_{k-1}=\lambda_k-\frac{1}{2}$ 的那一小部分补给第二部分，就可把这四部分写成对 $S_{k-1}=\lambda_{k-1}\pm\frac{1}{2}$，$S_k=\lambda_k\pm\frac{1}{2}$ 的求和，所以：

$$\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\cdots\sum_{S_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\!\!\oplus(S_1\cdots S_k)_{SO(2k)}$$

$$=\sum_{\substack{S_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ S_1\geqslant\cdots\geqslant S_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\cdots\sum_{S_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\!\!\oplus\left[\sum_{l_1=S_2}^{S_1}\!\!\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=S_k}^{S_{k-1}}\!\!\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k)}\right].\tag{3.10}$$

作和(3.7)下面的类似讨论，可得，

$$(S_1\cdots S_k)_{SO(2k)}=\sum_{l_1=S_2}^{S_1}\!\!\oplus\cdots\sum_{l_{k-1}=|S_k|}^{S_{k-1}}\!\!\oplus(l_1\cdots l_{k-1})_{SO(2k-1)}.\tag{3.11}$$

B. $SO(2k+1)\supset SO(2k)$

将 (3.1) 的左边约化到 $SO(2k)$：

$$\bigoplus_{\substack{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\cdots\bigoplus_{s_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}(S_1\cdots S_k)_{SO(2k+1)}$$

$$=\bigoplus_{l_1=\lambda_2}^{\lambda_1}\cdots\bigoplus_{l_k=0}^{\lambda_k}\bigoplus_{\substack{s_1=l_1-\frac{1}{2}\\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{l_1+\frac{1}{2}}\cdots\bigoplus_{s_k=l_k-\frac{1}{2}}^{l_k+\frac{1}{2}}[(S_1\cdots S_k)_{SO(2k)}\oplus(S_1\cdots,-S_k)_{SO(2k)}]. \tag{3.12}$$

和前面类似，经过适当变换后得出:

$$\bigoplus_{\substack{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_k\geqslant\frac{1}{2}}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\cdots\bigoplus_{s_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}(S_1\cdots S_k)_{SO(2k+1)}$$

$$=\bigoplus_{s_1=\lambda_1-\frac{1}{2}}^{\lambda_1+\frac{1}{2}}\cdots\bigoplus_{s_k=\lambda_k-\frac{1}{2}}^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\left[\bigoplus_{l_1=S_2}^{s_1}\cdots\bigoplus_{l_k=-S_k}^{s_k}(l_1\cdots l_k)_{SO(2k)}\right], \tag{3.13}$$

从而

$$(S_1\cdots S_k)_{SO(2k+1)}=\bigoplus_{l_1=S_2}^{s_1}\cdots\bigoplus_{l_k=-S_k}^{s_k}(l_1\cdots l_k)_{SO(2k)}. \tag{3.14}$$

四、结 论

$SO(n)\supset SO(n-1)$ 的约化分支公式是(2.16)、(2.17)式或(3.11)、(3.14)式，不管所论的表示是奇还是偶.

本文在周孝谦教授指导下完成，作者在此表示感谢.

参 考 文 献

[1] F. D. Murnaghan, Theory of Group Representations, (Johns Hopkins Press, Baltimore 1938).
[2] I. M. Gel'fand et al., Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications, (Pargamon Press 1963) p. 353—564.
[3] Mark Fischler, *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 637.

BRANCHING FORMULAS FOR $SO(n)$ $SO(n-1)$ TENSOR AND SPINOR REPRESENTATIONS

Wu Hua

(Suzhou University)

Abstract

Branching formulas for $SO(n)\supset SO(n-1)$ tensor representations are given from the branching rules for $O(n)\supset O(n-1)$ which described in F. D. Murnaghan's. Furthermore, these formulas are extended to the spinor representations by using the method of kronecker products. In this way a pair of complete branching formulas for $SO(n)\supset SO(n-1)$ is give in this paper.