第 10 卷 第 1 期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 1
1986 年 1 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1986

# 格点规范理论的解析研究

陈德芳 宋永燊
(宁波师范学院) (四川大学)
陈天崙 郑希特
(南开大学) (成都科技大学)
何翔皓 冼鼎昌
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论了格点规范理论中鞍点法和作用量变分法的关系．阐明在热力学极限下，采用平均场试探作用量，变分法能给出鞍点法平均场及其各级修正．把试探作用量中部分链变量改作方块的改进方法，也可以用鞍点法表述．改进的变分法可望系统地求出变分法的各级修正．

## 一、引 言

$SU(2)\otimes U(1)$ 规范场论在统一弱电作用上已取得显著成效，在强作用理论中量子色动力学又能给出与深度非弹实验符合的渐近自由特性，这使得非 Abel 规范场论已经成为粒子物理中的重要理论研究方面．但是，诸如夸克囚禁、强子质谱等非微扰效应已经超出了标准场论方法的研究范畴． K. Wilson[1] 提出的格点规范场论把规范体系和统计物理中熟知的自旋系统对应起来，可望成为研究规范场论非微扰效应的有力工具．

然而，在计算规范体系的配分函数时，由于规范群结构的加入，高重群积分的出现，无疑增加了借用统计力学中各种方法的困难．若要编入 Fermi 子，尚需计及 Grassmann 代数，会使问题更加复杂．虽然 Monte Carlo 方法已经取得不少令人振奋的数值结果[2]，但作为一种完善的理论，必须发展新的行之有效的解析方法．

把一个方向的格距取为零，可以由作用量变分法[3]导出哈密顿变分法． 在讨论纯规范场或规范一标量体系时，作用量变分法和鞍点法[4]的关系不是十分清楚的． 有人曾经提到过它们之间的差异[5]，但从实际使用上看，它们几乎是平行的． 它们之间的关系如何？又应当如何改进？就是本文要讨论的内容．

我们在 §2 中叙述鞍点法平均场论，在 §3 中介绍作用量变分法，在 §4 讨论试探作用量的改进，在 §5 中介绍改进的变分法，而把结论放到 §6 中．通过本文的讨论，我们阐明，

本文 1985 年 5 月 8 日收到．

在热力学极限下，变分法能给出鞍点法平均场及其各级修正，并且在各阶的修正计算中，有着很大的潜力．为了记号的简洁，我们只讨论了纯规范场，只要加入定义在格点上的 Higgs 场变量，这些讨论完全可以搬到规范一标量体系上去．

## 二、鞍点法平均场论

在格点规范理论中，纯规范场的作用量 $S(\{U_l\})$ 是定义在链 $l$ 上的规范场变量 $U_l$ 的组态 $\{U_l\}$ 的函数．若以 $d\mu(U)$ 标记规范群的 Haar 测度，则体系的配分函数写为高重群积分的形式

$$Z=\int\prod_l d\mu(U_l)\exp[S(\{U_l\})] \tag{2.1}$$

$$=\int\prod_l d\mu(U_l)\exp[S(\{U_{l1},U_{l2}\})]. \tag{2.2}$$

这里我们明显写出了复矩阵 $U_l$ 的实部 $U_{l1}$ 和虚部 $U_{l2}$．利用

$$\begin{aligned}f(\{U_{l1},U_{l2}\})&=\int\prod_l[dV_{l1}dV_{l2}]f(\{V_{l1},V_{l2}\})\\&\quad\times\prod_l[\delta(U_{l1}-V_{l1})\delta(U_{l2}-V_{l2})]\\&\propto\int\prod_l[dV_{l1}dV_{l2}dA_{l1}dA_{l2}]f(\{V_{l1},V_{l2}\})\\&\quad\times\exp\left[i\sum_l\mathrm{Tr}\,(A_{l1}U_{l1}+A_{l2}U_{l2}-A_{l1}V_{l1}-A_{l2}V_{l2})\right],\end{aligned} \tag{2.3}$$

得到体系的配分函数 $Z$ 的表达式为

$$\begin{aligned}Z\propto\int\prod_l[dV_{l1}dV_{l2}dA_{l1}dA_{l2}]\exp[S(\{V_{l1},V_{l2}\})\\+u(\{A_{l1},A_{l2}\})-i\sum_l\mathrm{Tr}(A_{l1}V_{l1}+A_{l2}V_{l2})].\end{aligned} \tag{2.4}$$

这里高重群积分已经退耦为单链积分

$$u(\{A_{l1},A_{l2}\})=\sum_l u_l(A_{l1},A_{l2}) \tag{2.5}$$

$$u_l(A_{l1},A_{l2})=\ln\int d\mu(U_l)\exp[i\,\mathrm{Tr}(A_{l1}U_{l1}+A_{l2}U_{l2})]. \tag{2.6}$$

若把式(2.4)中的函数

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{eff}}(\{V_{l1},V_{l2},A_{l1},A_{l2}\})\equiv S(\{V_{l1},V_{l2}\})\\+\sum_l u_l(A_{l1},A_{l2})-i\sum_l\mathrm{Tr}\,(A_{l1}V_{l1}+A_{l2}V_{l2})\end{aligned} \tag{2.7}$$

看作一个广义坐标为 $\{V_{l1},V_{l2},A_{l1},A_{l2}\}$ 的新体系的作用量，其配分函数随耦合常数的变化与待研究的规范体系等效．群拘束已收入单链积分中，式(2.4)的测度是平直的．因此可以采用统计力学中的 Darwin-Fowler 方法[6]来处理．注意到 $S_{\mathrm{eff}}$ 为复量，应把诸 $V_{l1}$，$V_{l2}$，$A_{l1}$，$A_{l2}$ 延拓至各自的复平面上寻求鞍点，这需要解方程组

$$\frac{\partial S(\{V_{l1}, V_{l2}\})}{\partial V_{l1}^T} = iA_{l1} \qquad \frac{\partial u_l(A_{l1}, A_{l2})}{\partial A_{l1}^T} = iV_{l1}$$

$$\frac{\partial S(\{V_{l1}, V_{l2}\})}{\partial V_{l2}^T} = iA_{l2} \qquad \frac{\partial u_l(A_{l1}, A_{l2})}{\partial A_{l2}^T} = iV_{l2}. \tag{2.8}$$

这里 $T$ 表示取转置矩阵，而对矩阵的微分按其元素定义作

$$\left[\frac{\partial}{\partial A} f(A)\right]_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{ij}} f(A). \tag{2.9}$$

由平移不变性，可取 $U_l$ 为实，则 $V_l$ 为实． $S$ 的厄米性表明鞍点方程组的非平凡解在诸变量 $A_{l1}$ 的虚轴上． 记

$$J_l \equiv iA_{l1} \tag{2.10}$$

$$\omega(\{J_l\}) \equiv u(\{-iJ_l, 0\}) = \sum_l \omega_l(J_l), \tag{2.11}$$

则

$$\omega_l(J_l) = u_l(-iJ_l, 0) = \ln \int d\mu(U_l) \exp[\mathrm{Tr}\, J_l U_l]. \tag{2.12}$$

鞍点方程组变为平均场方程

$$\frac{\partial S(\{U_l\})}{\partial U_l^T} = J_l \qquad \frac{\partial \omega_l(J_l)}{\partial J_l} = U_l. \tag{2.13}$$

它的解 $J_l^{(0)}$ 正是与链 $l$ 相互作用的平均场，$U_l^{(0)}$ 则是在平均场近似下的平均链变量． 若以鞍点处的优势贡献代替积分值，可得零级近似的自由能

$$F^{(0)} = S(\{U_l^{(0)}\}) + \sum_l \omega_l(J_l^{(0)}) - \sum_l \mathrm{Tr}\, J_l^{(0)} U_l^{(0)}. \tag{2.14}$$

在计算修正时，应计及沿最陡下降线上鞍点附近对积分的贡献．当

$$\frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^{T2}} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \omega_l(J_l^{(0)})}{\partial J_l^{T2}} > 0$$

时，应取 $U_l = U_l^{(0)} + U_l^{(1)}$，$J_l = J_l^{(0)} + iJ_l^{(1)}$．而当

$$\frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^{T2}} > 0, \qquad \frac{\partial^2 \omega_l(J_l^{(0)})}{\partial J_l^{T2}} < 0$$

时，则应取 $U_l = U_l^{(0)} + iU_l^{(1)}$，$J_l = J_l^{(0)} + J_l^{(1)}$．其中 $J_l^{(1)}$、$U_l^{(1)}$ 为小量．在 $(\{U_l^{(0)}, J_l^{(0)}\})$ 处 Taylar 展开 $S_{\mathrm{eff}}$ 至二级小量，完成 Gauss 型积分，可得二级近似的自由能

$$F^{(2)} = F^{(0)} - \frac{1}{2} \sum_l \ln\left[1 - \mathrm{Tr}\, \frac{\partial^2 \omega_l(J_l^{(0)})}{\partial J_l^{T2}} \frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^{T2}}\right]. \tag{2.15}$$

以上是鞍点近似的标准方法．

## 三、作用量变分法

若取一个可积分模型作为试探体系，其作用量 $S_J(\{U_l\})$ 中含有一组参数 $J$，则其配分函数和自由能为

$$Z_J = \int \prod_l d\mu(U_l) \exp[S_J(\{U_l\})] \tag{3.1}$$

$$F_J = \ln Z_J \tag{3.2}$$

$S_J(\{U_l\})$ 的选择通常是使(3.1)有解析的表达式．在该试探体系中，物理量 $G$ 的平均值为

$$\langle G \rangle = Z_J^{-1} \int \prod_l d\mu(U_l) G(\{U_l\}) \exp[S_J(\{U_l\})]. \tag{3.3}$$

于是规范体系的配分函数可以改写为

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_l d\mu(U_l) \exp[S(\{U_l\}) - S_J(\{U_l\})] \exp[S_J(\{U_l\})] \\ &= Z_J \langle \exp[S(\{U_l\}) - S_J(\{U_l\})] \rangle_J. \end{aligned} \tag{3.4}$$

利用 Jensen 不等式得知规范体系的自由能满足

$$F \geqslant F(J) \equiv F_J + \langle S(\{U_l\}) - S_J(\{U_l\}) \rangle_J. \tag{3.5}$$

参数 $J$ 的个数和 $S_J(\{U_l\})$ 作为 $J$ 的函数形式可以任意选取，只要试探体系接近于待研究的规范模型，则可通过求极大的办法用

$$\overline{F(J)} = \max_J [F(J)] \tag{3.6}$$

作为对 $F$ 的较好近似．这就是作用量变分法计算的出发点．

为了使计算 $\langle G \rangle_J$ 时的高重群积分退耦，通常采用平均场试探作用量，取

$$S_J(\{U_l\}) = \sum_l \mathrm{Tr}\, J_l U_l \tag{3.7}$$

可使记号简洁．记

$$\omega_l(J_l) = \ln \int d\mu(U_l) \exp[\mathrm{Tr}\, J_l U_l] \tag{3.8}$$

则

$$\langle U_l \rangle_J = \frac{\partial \omega_l(J_l)}{\partial J_l^T} \tag{3.9}$$

$$\langle G(\{U_l\}) \rangle_J = Z_J^{-1} G\left(\left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}\right) Z_J. \tag{3.10}$$

将式(3.7)—(3.10)代入 (3.5)，得

$$F(J) = \sum_l \omega_l(J_l) + Z_J^{-1} S\left(\left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}\right) Z_J - \sum_l \mathrm{Tr}\, J_l \frac{\partial \omega_l(J_l)}{\partial J_l^T}. \tag{3.11}$$

注意到 $S(\{U_l\})$ 不依赖于参数 $J$，$F(J)$ 的极值条件写为

$$\mathrm{Tr}\, J_l \frac{\bar{\partial}}{\partial J_l^T} \frac{\partial}{\partial J_l^T} \omega_l(J_l) = S\left(\left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial J_l^T} \omega_l(J_l) \tag{3.12}$$

记号 $\dfrac{\bar{\partial}}{\partial J_l^T}$ 表示只作矩阵微分运算，不参加求迹运算．

当且仅当

$$\langle S(\{U_l\}) \rangle_J = S(\{\langle U_l \rangle_J\}), \tag{3.13}$$

即 $S(\{U_l\})$ 是线性的或作线性近似时，则极值条件变为

$$J_l = \frac{\partial S(\{U_l\})}{\partial U_l^T}. \tag{3.14}$$

它与(3.8)联立就是鞍点方程组．若其解为 $\{J_l^{(0)}, U_l^{(0)}\}$，所得的近似自由能为

$$F^{(0)}=\sum_l \omega_l(J_l^{(0)})+S(\{U_l^{(0)}\})-\sum_l \mathrm{Tr}\, J_l^{(0)}U_l^{(0)}, \tag{3.15}$$

与(2.14)相同. 可见只用 $\langle S(\{U_l\})\rangle_J$ 的线性主部，作用量变分法就给出了鞍点法平均场论的结果.

在 $(\{U_l^{(0)}\})$ 处展开 $S(\{U_l\})$ 至二级，有

$$\begin{aligned}\langle S(\{U_l\})\rangle_J &\cong S(\{U_l^{(0)}\})+\frac{1}{2}\sum_{ll'}\mathrm{Tr}\Big[\langle(U_l-U_l^{(0)})\\ &\quad\times(U_{l'}-U_{l'}^{(0)})\rangle_J\,\frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^T\partial U_{l'}^T}\Big]\\ &=S(\{U_l^{(0)}\})+\frac{1}{2}\sum_l \frac{\partial^2\omega_l(J_l^{(0)})}{\partial J_l^{T2}}\,\frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^{T2}},\end{aligned} \tag{3.16}$$

就考虑到了 $U_l$ 的涨落，并得到自由能的近似表达式

$$F^{(2)}=F^{(0)}+\frac{1}{2}\sum_l \frac{\partial^2\omega_l(J_l^{(0)})}{\partial J_l^{T2}}\,\frac{\partial^2 S(\{U_l^{(0)}\})}{\partial U_l^{T2}} \tag{3.17}$$

在修正可以视为小量时，它与式(2.15)一致. 注意到在热力学极限下，应在多个鞍点中选取最高的鞍点，正好相应于式(3.6)的右端取最大值，使上述与鞍点法的对应关系更加准确.

除了用 $\overline{F(J)}$ 代替 $F$ 所引起的误差外，变分法的计算是严格的. 实际使用变分法时，是数值选出 $\overline{F(J)}$，这就包含了 $S(\{U_l\})$ 展式的充分高次项. 以上讨论表明，只需采用平均场试探作用量，变分法已囊括了鞍点法的各级修正. 鞍点法平均场论只相当于变分法的线性主部，用来讨论需计算单链积分 $n$ 阶导数的模型时，则会过分粗糙地处理为平均链变量的 $n$ 次幂. 以致在讨论基础一伴随表示混合模型时，和 Monte Carlo 结果存在定性的差异，必须加入修正才能扭转[7]. 而变分法极易得到比较满意的结果[8].

此外，只要能够算出 $F(J)$ 的解析表达式，变分法允许选用非平均场作用量[9]，这就有着更为广泛的应用前景.

## 四、变分法计算中试探作用量的改进

作用量变分法中试探作用量可以任意选取，但希望尽量接近于待研究的规范体系的作用量. 由式(3.5)、(3.6)看出，如果用新选用的含参数 $J'$ 的作用量 $S_{J'}(\{U_l\})$ 计算出的 $\overline{F(J')}$ 满足

$$\overline{F(J')}>\overline{F(J)} \tag{4.1}$$

则比用 $S_J(\{U_l\})$ 算出的 $\overline{F(J)}$ 更接近于物理的 $F$，且差值越大，效果越好. 但是要算出 $F(J)$，又必须使 $Z_J$ 易于计算，因此常选用平均场试探作用量.

注意到对于固定的群元素 $U$，群积分的测度不变性给出

$$\int d\mu(U_1)\exp[\mathrm{Tr}\,U_1U]=\int d\mu(U_1)\exp[\mathrm{Tr}\,U_1], \tag{4.2}$$

可以把式(3.7)的试探作用量中部分链变量改作方块变量[10]，并不显著增加计算上的困难而可望取出部分高级修正. 例如把链 $U_1$ 改为基本方块

$$U_p = U_1U_2U_3^+U_4^+ \tag{4.3}$$

则

$$S_{J'} = \mathrm{Tr}\, J_1U_p + \sum_l{}' \mathrm{Tr}\, J_lU_l \tag{4.4}$$

式中 $\sum\limits_l{}'$ 表示对不为 1 的 $l$ 求和．可以把 $J_1$ 看作是与方块变量 $U_p$ 相互作用的平均场，这也是一个平均场型的试探作用量．由式 (4.2) 知

$$Z_{J'} = Z_J,\quad F_{J'} = F_J,\quad \langle S_{J'}\rangle_{J'} = \langle S_J\rangle_J. \tag{4.5}$$

若待研究的规范体系的作用量为 $S(U_1, \{U_l\}')$，其中 $\{U_l\}'$ 是 $l \neq 1$ 的 $U_l$ 的集合，在采用 $S_{J'}$ 作试探作用量时，应换用 $S(U_pU_4U_3U_2^+, \{U_l\}')$．于是

$$\langle S_J\rangle_J = Z_J^{-1}S\left(\frac{\partial}{\partial J_1^T}, \left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}'\right) \tag{4.6}$$

$$\langle S_{J'}\rangle_{J'} = Z_J^{-1}S\left(\frac{\partial}{\partial J_1^T}\frac{\partial}{\partial J_4^T}\frac{\partial}{\partial J_3^T}\frac{\partial}{\partial J_2^{+T}}, \left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}'\right)Z_J \tag{4.7}$$

因此采用链改方块优劣的判据是

$$\begin{aligned}\langle S_{J'}\rangle_{J'} - \langle S_J\rangle_J = Z_J^{-1}\Bigg[&S\left(\frac{\partial}{\partial J_1^T}\frac{\partial}{\partial J_4^T}\frac{\partial}{\partial J_3^T}\frac{\partial}{\partial J_2^{+T}}, \left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}'\right)\\ &- S\left(\frac{\partial}{\partial J_1^T}, \left\{\frac{\partial}{\partial J_l^T}\right\}'\right)\Bigg]Z_J\end{aligned} \tag{4.8}$$

的值是否大于零．

试探作用量的这种改进也可以用鞍点法表述．利用

$$\begin{aligned}f(U_1, \{U_l\}') &= f(U_pU_4U_3U_2^+, \{U_l\}')\\ &= \int\prod_l dV_l f(V_1V_4V_3V_2^+, \{V_l\}')\delta(U_p - V_1)\prod_l{}'\delta(U_l - V_l)\end{aligned} \tag{4.9}$$

改写配分函数，仿照 §2 进行讨论，也能得到相应的结论．可以认为，鞍点法平均场论及其修正是采用平均场型试探作用量的变分法的另一种诠释．

## 五、改进的变分法

如前所述，鞍点法平均场论及其修正都包括在有平均场型试探作用量的变分法结果中．无论使用什么形式的改进作用量，变分法总是用 $\overline{F(J)}$ 近似地代替物理体系的自由能 $F$．由于使用了 Jensen 不等式，恒大于零的差

$$\Delta(J) = F - \overline{F(J)} \tag{5.1}$$

是无法估计的．要系统地计算变分法的逐级修正，必须另辟新径．

为此，我们把规范体系的配分函数写为

$$\begin{aligned}Z &= \int\prod_l d\mu_l e^S = e^{\langle S-S_J\rangle_J}\int\prod_l d\mu_l e^{S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J}e^{S_J}\\ &= Z_Je^{\langle S-S_J\rangle_J}\langle e^{S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J}\rangle_J\end{aligned} \tag{5.2}$$

得自由能

$$F = F_J + \langle S - S_J\rangle_J + \ln\langle e^{S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J}\rangle_J. \tag{5.3}$$

迴避了使用难以估计误差的不等式后,得知

$$\Delta(J) = \ln\langle e^{S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J}\rangle_J \tag{5.4}$$

为 $J$ 的正值有界函数.

然而,严格计算 $\Delta(J)$, 实际上就是计算原初的 $F$, 而这是我们所不能的. 为此,我们引入

$$\Delta(\lambda,J) = \ln\langle e^{\lambda(S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J)}\rangle_J \tag{5.5}$$

对于足够小的 $\lambda$, 可以展开为 Taylor 级数

$$\Delta(\lambda, J) = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} M_n \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
&M_1 = M_2 = 0\\
&M_2 = \langle(S - S_J - \langle S - S_J\rangle_J)^2\rangle\\
&M_3 = \langle(S - S_J - \langle S - S_J\rangle_J)^3\rangle\\
&M_4 = \langle(S - S_J - \langle S - S_J\rangle_J)^4\rangle - 3\langle(S - S_J - \langle S - S_J\rangle_J)^2\rangle_J^2
\end{aligned} \tag{5.7}$$

这相当于统计物理中熟知的对 $\langle e^{\lambda(S-S_J-\langle S-S_J\rangle_J)}\rangle_J$ 的累积量展开[11]. 因 $\langle G - \langle G\rangle_J\rangle_J = 0$, 由式 (5.7) 知, 只有连通图形才对 $M_n$ 作出非零贡献. 因此在格点规范理论中, 可以用图形展开技术求得 $M_n$ 的解析表达式[12], 采用有界函数逼近方法[13]扩大收敛域到 $\lambda \geqslant 1$ 后, 有

$$\Delta(J) = \Delta(1, J).$$

就得到逐次近似的 $\Delta(J)$, 系统地给出了变分法的逐级修正.

由于规范体系的自由能 $F$ 与试探作用量中参数 $J$ 的值无关, 式 (5.1) 表明, 在作用量变分法求得 $\overline{F(J)}$ 对应的 $J$ 值处, $\Delta(J)$ 最小, 在低级近似下就可能求得较为满意的结果.

在改进的变分法中, 迴避了在 Grassmann 代数中不成立的 Jensen 不等式, 还可能应用到包含有 Fermi 子的体系上去.

## 六、结　论

从以上的讨论看出, 在热力学极限下, 如果选用平均场型试探作用量, 变分法囊括了鞍点法平均场论及其各级修正的结果. 鞍点近似仅相应于变分法的线性主部. 鞍点法不过是平均场型试探作用量的变分法的另一种解释. 同样的问题不必采用两种不同的方法讨论. 变分法还允许采用非平均场型试探作用量, 变分法优于鞍点法.

利用改进的变分法可以系统地计算作用量变分法的逐级修正, 并可望处理有 Fermi 子自由度的体系.

作者感谢与于渌、郝柏林及郭硕鸿等同志的讨论.

## 参　考　文　献


[1] K. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
[2] M. Creutz, L. Jacobs, and C. Rebbi, *Phys. Reports,* 95(1983), 201.
[3] R. P. Feynman, and A. R. Hibbs "Quantum Mechanics and Path Integrals", chap. 11, (New York, McGraw-Hill, 1965).
[4] J. M. Drouffe, *Nucl. Phys.*, **B170** [FS1] (1980), 211; E. Brézin, and J. M. Drouffe, *Nucl. Phys.*, **B200**[FS4] (1982), 93.
[5] J. M. Drouffe, and J. B. Zuber, *Phys. Reports,* **102**(1983), 1.
[6] K. Huang, "Statistical Mechanics", Chap. 9, (Cambridge, Massachusetts, 1963).
[7] V. Alessandrini, V. Hakim, and A. Krzywicki, *Nucl. Phys.*, **B215**(FS7) (1983), 109; J. M. Alberty, H. Flyvbjerg, and B. Lautrup, *Nucl. Phys.*, 8200 [FS8] (1983), 61.
[8] Chen. T.-1., C. -I. Tan, and Zheng X.-t., *Phys. Lett.*, **109B**(1982), 383; Zheng X.-t., C.-I. Tan and Chen T.-l., *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
[9] C.-I. Tan and Zheng X.-t., *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 3141.
[10] S.-H. Guo, Q.-z. Chen, and J.-m. Liu, *Comm. Theor. Phys.*, (Bejing) **6**(1983), 346.
[11] L. E. Reichl, "A Modern Course in Statistical Physics", Chap. 5, (University of Texas Press, Austin, 1980).
[12] X. T. Zheng, T. L. Chen and T. C. Hsien, *Phys. Letts.* **154B**(1985), 166; X. H. He, Y. X. song and T. C. Hsien, *Phys. Letts.*, **153B**(1985), 417.


# ON THE ANALYTICAL STUDY IN LATTICE GAUGE FIELD THEORY


CHEN DE-FANG
*(Ningbo College of Education)*

SONG YONG-XIN
*(Sichuan University)*

CHEN TIAN-LUN
*(Nankai University)*

ZHENG XI-TE
*(Chengdu University of Science and Technology)*

HE XIANG-HAO　XIAN DING-CHANG
*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*



ABSTRACT

The relation between the saddle point approximation and the action variational method in the lattice gauge field theory is discussed. It is expounded that in the thermodynamical limit, by using a trial action composed of mean fields, the variational approach leads to the results as well as the higher order corrections obtained in the saddle point approximation. It is also pointed out that order by order corrections to the variational approach can be worked out systematically in an improved variational approach.