第 9 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 5
1985 年 9 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1985

一个基于 Hölder 积分不等式的格点规范场论变分方法

何翔皓 冼鼎昌 宋永燊
(中国科学院高能物理研究所) (四川大学)

摘 要

用 Hölder 积分不等式使出现在格点模型配分函数中的高重群积分退耦，并以不等式中的任意参数作为变分参数，可以求出体系元格自由能的下限. 我们计算了 Wilson 作用量的四维 Z_2, $U(1)$、$SU(2)$ 纯规范格点模型的内能曲线. Z_2 的一级相变点在 $\beta=0.4$—0.45 处是非常明显的. 但不能发现 $U(1)$, $SU(2)$、的高于一级的相变点.

在格点规范理论中，变分法计算[1]是一种方法简单的解析的近似方法，在相图结构. 能谱计算上，被广泛地应用，常用的变分方法有哈氏量变分法[2]. 作用量变分法[3]等，本文提出一种新的基于 Hölder 积分不等式的变分方法，并将之应用到 Z_2, $U(1)$, $SU(2)$ 规范场元格能量的计算.

设给定的纯规范场格点模型的作用量为

$$S=\frac{\beta}{2N}\sum_{p}\operatorname{tr}(U_p+U_p^+), \tag{1}$$

式中，$U_p=U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^+(n+\hat{\nu})U_\nu^+(n)$ (图 1)，$\sum\limits_p$ 表示对四维时空中的所有元格求和. $U_\mu(n)$ 属于规范群 G. N 是群 G 的阶. 配分函数定义为

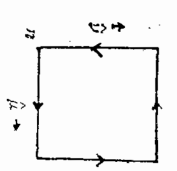

图 1

$$Z=\int[dU]e^{S}, \tag{2}$$

式中 $[dU]=\prod\limits_{l} dU_l$. l 表示链. dU_l 是群 G 的 Haar 测度. 元格自由能定义为

$$W=\frac{1}{N_p}\ln Z, \tag{3}$$

其中，N_p 是元格总数目. 它与格点数目 N_s 的关系为 $N_p=\frac{d(d-1)}{2}N_s$. 元格能量 E 定义为

本文 1984 年 11 月 28 日收到.

$$E = \left\langle 1 - \frac{1}{N} R e \, \mathrm{tr} U_p \right\rangle = 1 - \frac{\partial W}{\partial \beta}. \tag{4}$$

求元格能量的关键在于求配分函数. 除了极少数几个特例外,严格地求解 Z,给出解析表达式是不可能的.

作用量(1)中对 p 的求和包括对所有元格求和. 在四维空间中,元格共有 (x, y),$(y, z)\cdots$ 等六个方位,我们用 p_{xy}, $p_{yz}\cdots$ 表示位于 $(x, y)(y, z)$ 等方位的元格,对 p 的求和可以分写成对每种方位的元格的求和:

$$\sum_{p} = \sum_{p_{xt}} + \sum_{p_{yt}} + \sum_{p_{zt}} + \sum_{p_{xy}} + \sum_{p_{yz}} + \sum_{p_{zx}}, \tag{5}$$

于是作用量(1)可写成三部分之和:

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \tag{6}$$

其中:

$$S_1 = \frac{\beta}{2N} \left\{ \sum_{p_{xt}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{xt}} + \mathrm{h.c.}) + \sum_{p_{yt}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{yt}} + \mathrm{h.c.}) + \sum_{p_{zt}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{zt}} + \mathrm{h.c.}) \right\}, \tag{7}$$

$$S_2 = \frac{\beta}{2N} \left\{ \sum_{p_{xy}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{xy}} + h.c.) + \sum_{p_{yz}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{yz}} + \mathrm{h.c.}) \right\}, \tag{8}$$

$$S_3 = \frac{\beta}{2N} \sum_{p_{zx}} \mathrm{tr}\,(U_{p_{zx}} + \mathrm{h.c.}), \tag{9}$$

相应地配分函数 Z 可以写成

$$Z = \int [dU] e^{S_1} e^{S_2} e^{S_3}. \tag{10}$$

应用 Hölder 不等式[4]

$$\int f \cdot g[dV] \leqslant \left(\int f^K [dV] \right)^{1/K} \left(\int g^{\frac{K}{K-1}} [dV] \right)^{\frac{K-1}{K}}, \tag{11}$$

式中, f, g 恒为正. $[dV]$ 是所有积分变量的测度, K 是任意大于 1 的实数,我们有

$$\begin{aligned} Z &\leqslant \left(\int [dU] e^{xS_1} \right)^{\frac{1}{x}} \left(\int [dU] e^{\frac{x}{x-1}(S_2+S_3)} \right)^{\frac{x-1}{x}} \\ &\leqslant \left(\int [dU] e^{xS_1} \right)^{\frac{1}{x}} \left(\int [dU] e^{\frac{xy}{x-1}S_2} \right)^{\frac{x-1}{xy}} \left(\int [dU] e^{\frac{xy}{(x-1)(y-1)}S_3} \right)^{\frac{(x-1)(y-1)}{xy}}, \end{aligned} \tag{12}$$

式中, $x > 1$, $y > 1$. 记

$$Z_1(x) = \int [dU] e^{xS_1}, \tag{13}$$

$$Z_2\left(\frac{xy}{x-1}\right) = \int [dU] e^{\frac{xy}{x-1}S_2}, \tag{14}$$

$$Z_3\left(\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\right) = \int [dU] e^{\frac{xy}{(x-1)(y-1)}S_3}, \tag{15}$$

$$Z(x, y) = [Z_1(x)]^{\frac{1}{x}} \cdot \left[Z_2\left(\frac{xy}{x-1}\right) \right]^{\frac{x-1}{xy}} \left[Z_3\left(\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\right) \right]^{\frac{(x-1)(y-1)}{xy}}. \tag{16a}$$

$$W(x, y) = \frac{1}{N_p} \ln Z(x, y), \tag{16b}$$

我们将 x, y 作为变分参数,求得 $W(x, y)$ 的最小值,作为W的近似值,即

$$W \approx \min_{x,y}\{W(x, y)\}. \tag{17}$$

为此,我们求 Z_1, Z_2, Z_3 的解析表达式. 因为 S_1, S_2, S_3 是定域规范不变的,所以,我们可以在任何一个规范中计算 Z_1, Z_2, Z_3. 对 Z_1,我们在时间轴规范($U_t(n)$ = 单位矩阵的规范)中进行计算. 此时

$$U_{p_{xt}}(n) = U_x(n)U_t(n+\hat{x})U_x^+(n+\hat{t})U_t^+(n) = U_x(n)U_x^+(n+\hat{t}), \tag{18}$$

$$U_{p_{yt}}(n) = U_y(n)U_t(n+\hat{y})U_y^+(n+\hat{t})U_t^+(n) = U_y(n)U_y^+(n+\hat{t}), \tag{19}$$

$$U_{p_{zt}}(n) = U_z(n)U_t(n+\hat{z})U_z^+(n+\hat{t})U_t^+(n) = U_z(n)U_z^+(n+\hat{t}), \tag{20}$$

由此,我们有

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= \int \prod_n dU_t(n)dU_x(n)dU_y(n)dU_z(n) \\ &\cdot e^{\frac{x\beta}{2N}\left\{\sum_n \mathrm{tr}(U_x(n)U_x^+(n+\hat{t})+h.c.)+\sum_n \mathrm{tr}(U_y(n)U_y^+(n+\hat{t})+h.c.)+\sum_n \mathrm{tr}(U_z(n)U_z^+(n+\hat{t})+h.c.)\right\}} \\ &= \left\{\int \prod_n dU_x(n) e^{\frac{x\beta}{2N}\sum_n \mathrm{tr}(U_x(n)U_x^+(n+\hat{t})+h.c.)}\right\}^3 \\ &= \left\{\prod_{\boldsymbol{n}} \int \prod_{n_t} dU_x(\boldsymbol{n}, n_t) e^{\frac{x\beta}{2N}\sum_{n_t} \mathrm{tr}(U_x(\boldsymbol{n},n_t)U_x^+(\boldsymbol{n},n_t+\hat{t})+h.c.)}\right\}^3. \end{aligned} \tag{21}$$

因为群积分是测度不变的. 对上式作测度变换后得

$$Z_1(x) = \left\{\int dU e^{\frac{x\beta}{2N}\mathrm{tr}(U+U^+)}\right\}^{3N_s}, \tag{22}$$

式中 N_s 是格点数目, $N_s = \dfrac{2}{d(d-1)} N_p = \dfrac{N_p}{6}$. 记单链配分函数为

$$f(z) = \int dU e^{z\,\mathrm{tr}(U+U^+)}, \tag{23}$$

则 $Z_1(x)$ 可以写成

$$Z_1(x) = \left[f\left(\frac{x\beta}{2N}\right)\right]^{N_p/2}. \tag{24}$$

根据 S_2, S_3 也是定域规范不变这一性质,对 Z_2 在 y 轴规范中进行计算,对 Z_3 在 x 轴或 z 轴规范中进行计算,同样可得:

$$Z_2\left(\frac{xy}{x-1}\right) = \left[f\left(\frac{xy\beta}{2N(x-1)}\right)\right]^{N_p/3}, \tag{25}$$

$$Z_3\left(\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\right) = \left[f\left(\frac{xy\beta}{2N(x-1)(y-1)}\right)\right]^{N_p/6}, \tag{26}$$

将(24)(25)(26)代入(16)式,得

$$W(x,y)=\frac{1}{2x}\ln f\left(\frac{x\beta}{2N}\right)+\frac{x-1}{3xy}\ln f\left(\frac{xy\beta}{2N(x-1)}\right)$$
$$+\frac{(x-1)(y-1)}{6xy}\ln f\left(\frac{xy\beta}{2N(x-1)(y-1)}\right),\qquad(27)$$

假定 $x=x_0$, $y=y_0$ 时，$W(x_0,y_0)=\min\{W(x,y)\}$，则元格能量 E 近似为

$$E=1-\frac{\partial W(x_0,y_0)}{\partial\beta}.\qquad(28)$$

下面我们讨论一些具体的规范群.

在规范群为 Z_2 群的情形. 单链配分函数为

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{U=\pm1}e^{z(U+U^+)}=\mathrm{ch}\,(2z),\qquad(29)$$

自由能上界为

$$W(x,y)=\frac{1}{2x}\ln\mathrm{ch}\,(x\beta)+\frac{x-1}{3xy}\ln\mathrm{ch}\left(\frac{xy\beta}{x-1}\right)$$
$$+\frac{(x-1)(y-1)}{6xy}\ln\mathrm{ch}\left(\frac{xy\beta}{(x-1)(y-1)}\right),\qquad(30)$$

能量近似值为

$$E\simeq1-\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,(x_0\beta)-\frac{1}{3}\,\mathrm{th}\left(\frac{x_0y_0\beta}{x_0-1}\right)$$
$$-\frac{1}{6}\,\mathrm{th}\left(\frac{x_0y_0\beta}{(x_0-1)(y_0-1)}\right).\qquad(31)$$

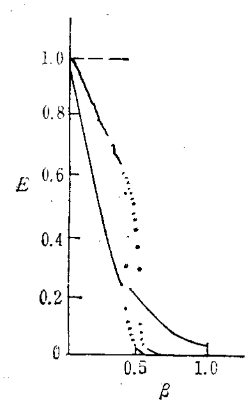

图 2 Z 群的内能曲线

······ Monte Carlo计算结果

——积分不等式变分法计算结果

----作用量变分法和平均场方法计算结果

图 2 中给出了 Z_2 规范群时，我们的计算结果，作用量变分结果和 Monte Carlo[5] 结果的比较.

在规范群为 $U(1)$ 群的情形，单链配分函数为:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta e^{2z\cos\theta}=I_0(2z),\qquad(32)$$

其中 $I_i(x)$ 为 i 阶修正 Bessel 函数. 自由能的上界为

$$W(x,y)=\frac{1}{2x}\ln I_0(x\beta)+\frac{x-1}{3xy}\ln I_0\left(\frac{xy\beta}{x-1}\right)+\frac{(x-1)(y-1)}{6xy}$$
$$\times\ln I_0\left(\frac{xy\beta}{(x-1)(y-1)}\right),\qquad(33)$$

能量近似值为:

$$E\simeq1-\frac{1}{2}\frac{I_1(x_0\beta)}{I_0(x_0\beta)}-\frac{1}{3}\frac{I_1\left(\frac{x_0y_0\beta}{x_0-1}\right)}{I_0\left(\frac{x_0y_0\beta}{x_0-1}\right)}-\frac{1}{6}\frac{I_1\left(\frac{x_0y_0\beta}{(x_0-1)(y_0-1)}\right)}{I_0\left(\frac{x_0y_0\beta}{(x_0-1)(y_0-1)}\right)}.\qquad(34)$$

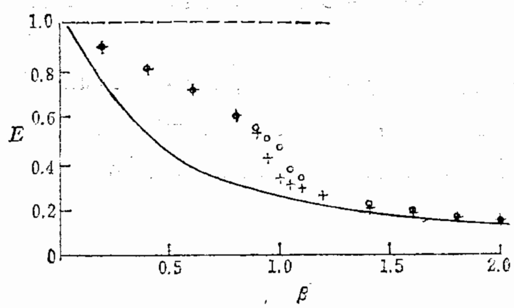

图 3　$U(1)$ 群时的内能曲线

○ + Monte Carlo 计算结果

——积分不等式变分法计算结果

---作用量变分法和平均方法计算结果

图 3 中给出了 $U(1)$ 规范群时，积分不等式变分法结果，作用量变分法和平均场方法的结果与 Monte Carlo 结果的比较.

在规范群为 $SU(2)$ 群的情形．单链配分函数为

$$f(z)=\int_{SU(2)} dU e^{Z\operatorname{tr}(U+U^{+})}$$

$$=\frac{I_1(4z)}{2z}, \tag{35}$$

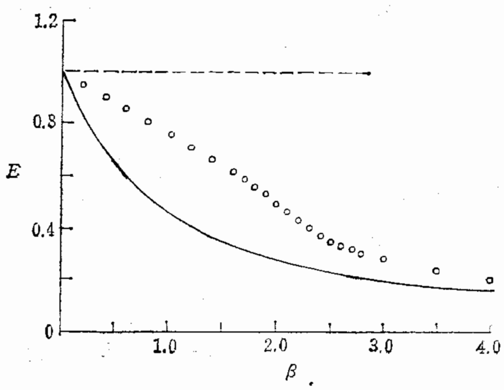

图 4　$SU(2)$ 群时的内能曲线

○ Monte Carlo 计算结果

——积分不等式变分法计算结果

---作用量变分法和平均场方法计算结果

自由能上界为：

$$W(x,y)=\frac{1}{2x}\ln\frac{2I_1(x\beta)}{x\beta}+\frac{x-1}{3xy}\ln\frac{2I_1\left(\frac{xy\beta}{x-1}\right)}{\left(\frac{xy\beta}{x-1}\right)}+\frac{(x-1)(y-1)}{6xy}\ln\frac{2I_1\left(\frac{xy\beta}{(x-1)(y-1)}\right)}{\left(\frac{xy\beta}{(x-1)(y-1)}\right)}, \tag{36}$$

能量近似值为：

$$E\simeq 1-\frac{1}{2}\frac{I_2(x_0\beta)}{I_1(x_0\beta)}-\frac{1}{3}\frac{I_2\left(\frac{x_0y_0\beta}{x_0-1}\right)}{I_1\left(\frac{x_0y_0\beta}{x_0-1}\right)}-\frac{1}{6}\frac{I_2\left(\frac{x_0y_0\beta}{(x_0-1)(y_0-1)}\right)}{I_1\left(\frac{x_0y_0\beta}{(x_0-1)(y_0-1)}\right)}. \tag{37}$$

图 4 中给出 $SU(2)$ 规范群时的结果.

这里给出的方法与常用的作用量变分法[3]不同．作用量变分法求得的是 Z 的下界．这里给出的是 Z 的上界．两种方法得到的都是近似值，这两种方法给出的结果可以相互

对照和补充. 需要指出的是在积分不等式变分法中,变分参数的引入在于 Hölder 不等式本身.

规范群给出正确的一级相变点 $\beta = 0.4$—0.45 这与 Monte Carlo 的计算结果是一致的[5]. 在 $U(1)$ $SU(2)$ 规范群情形，没有发现高于一级的相变点. 由于已知一级修正是很重要的[6]，故考察一级修正是否得到与通常变分法修正后的结果相似的结果是很有兴趣的课题.

感谢吴济民同志的讨论.

参 考 文 献

[1] J. M. Drouffe, *Phys. Rep.*, **102** (1983), 1—119.
[2] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 659.
J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775.
[3] T. L. Chen, C. I. Tan and X. T. Zheng, *Phys. Rev.*, D**26** (1983), 2843.
[4] C. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya "Inequalities" Cambridge University Press (1952).
[5] M. Creutz, L. Jacob and C. Rebbi, *Phys. Rep* **95** (1983), 201.
[6] X. H. He, T. C. Hsien and Y. X. Song, *Phys. Letts.*, **153B**(1985), 417

A VARIATIONAL METHOD IN LATTICE GAUGE THEORY BASED ON HÖLDER INTEGRAL INEQUALITY

HE XIANG-HAO XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics Academia Simica)

SONG YOU-XIN

(Sichuan University)

ABSTRACT

A variational method based on Hölder integral inequality is presented. Taking the parameters in integral inequality as variational parameters, we can calculate the free energy in lattice gauge system. The plaquatte energy of Z_2, $U(1)$, $SU(2)$ gauge system with Wilson action is evaluated. The first order phase transition for Z_2 gauge systems is found and consistent with that given by Monte Carlo method. But, the higher phase transitions for $U(1)$, $SU(2)$ gauge systems are not found.