第 8 卷 第 4 期　　高能物理与核物理　　Vol. 8, No. 4
1984 年 7 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1984

Ernst 方程的主手征形式与自对偶 Yang-Mills 场方程

吴詠时　　葛墨林　　罗春荣
（理论物理研究所）　（兰州大学）　（西北工业大学）

摘　　要

指出 Ernst 方程可以化为主手征形式，讨论了轴对称自对偶杨-Mills 场 (SDYM) 与 Ernst 方程以及主手征形式的关系．并对 H-变换在 Ernst 方程中的对应作了讨论．

一、引　　言

自从 1968 年 F. Ernst 将稳态轴对称 Einstein 方程化为 Ernst 方程以来[1]，在处理引力问题中获得了巨大的成功． 以后发现静态轴对称的自对偶杨-Mills 场 (SDYM) 在 R-gauge 下的杨-方程通过 L. Witten 提出的代换变为 Ernst 方程[2]．近年来又发现 Ernst 方程可以通过测地投影表示为球坐标的径角 θ 与纬角 φ 的方程[3-5]．由于近来手征场理论以及自对偶 Yang-Mills 场理论的迅速发展[6]，人们对于 Ernst 方程、手征模型与自对偶 Yang-Mills 场方程间的联系有越来越大的兴趣．由于引入 SDYM 场方程的 J-形式，使处理 SDYM 场的问题获得更简洁的形式[7]，同时 J-形式的 H-变换[8]导致了 $G\otimes C(t)$ 代数结构[9-11]． 显然通过代换将轴对称的 SDYM 场方程化为 Ernst 方程的方式并不是唯一的．还能否存在其它形式的代换达到这一目的？ 在完成这一代换后相应的 J-形式与主手征模型有什么关系？ H-变换相应的 Ernst 方程中的势 f 与扭势 ϕ 作何种相应的无穷小变换？这些都是尚不清楚的问题．

本文的目的在于讨论 Ernst 方程与主手征模型形式的关系，通过引入代换将轴对称 SDYM 场方程化为 Ernst 方程，将这种情况下的 J-形式与手征模型相比较，证明如果单位矢量的组合选择适当，两者是完全一致的． 最后讨论与 H-变换相应的 Ernst 势的变分所满足的方程．

二、Ernst 方程的主手征形式

如所熟知，Ernst 方程相应于作用量 L 取极值[1] $\delta L=0$，其中

本文 1982 年 8 月 24 日收到．

$$L = \int \frac{\nabla\xi \cdot \nabla\xi^*}{(1-\xi\xi^*)} d^2V. \tag{1}$$

作双曲测地投影 [3]

$$\xi = \frac{n^1 + in^2}{1 + n^3}, \tag{2}$$

其中 n^1, n^2, n^3 满足

$$(n^3)^2 - (n^2)^2 - (n^1)^2 = 1 \tag{3}$$

将 (2)式与(3)式代入(1) 式可得到

$$L = -\frac{1}{4}\int d^2V \eta_{ab} \nabla n^a \cdot \nabla n^b, \tag{4}$$

其中

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

为了将 L 写成标准的主手征模型形式，引入

$$G = \begin{bmatrix} n^3 - n^1 & n^2 \\ n^2 & n^3 + n^1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

显然 $G \in SL(2, R)$.

由于

$$2\eta_{ab}\nabla n^a \cdot \nabla n^b = \mathrm{Tr}(\nabla G \cdot \nabla G^{-1}) \tag{6}$$

故得，

$$L = -\frac{1}{2}\int d^2V\, \mathrm{Tr}\,(\nabla G \cdot \nabla G^{-1}). \tag{7}$$

如令：

$$\boldsymbol{n} = -(\mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi,\ \mathrm{sh}\,\theta\sin\varphi,\ \mathrm{ch}\,\theta) \tag{8}$$

以及

$$n = n^1 i\sigma_1 + n^2 i\sigma_2 + n^3\sigma_3. \tag{9}$$

则由(2)式易知，它相应存在以下变换[5]

$$\xi = \coth\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi} \tag{10}$$

以及

$$n = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\theta & i\,\mathrm{sh}\,\theta e^{-i\varphi} \\ i\,\mathrm{sh}\,\theta e^{i\varphi} & -\mathrm{ch}\,\theta \end{bmatrix}. \tag{11}$$

相应地：

$$G = -\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\theta - \mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi & \mathrm{sh}\,\theta\sin\varphi \\ \mathrm{sh}\,\theta\sin\varphi & \mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{12}$$

另一方面由 (10)式易算出[5]

$$f = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi},\ \phi = \frac{\mathrm{sh}\,\theta\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi}. \tag{13}$$

于是得

$$G = -\frac{1}{f}\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ -\phi & f^2+\phi^2 \end{bmatrix},\quad G^{-1} = \frac{1}{f}\begin{bmatrix} -(f^2+\phi^2) & \phi \\ -\phi & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

定义

$$\mathscr{A}_i = G^{-1}\partial_i G. \tag{15}$$

则可证明方程

$$\partial_i \mathscr{A}_i = 0. \tag{16}$$

等价于 Ernst 方程

$$f\nabla^2 f = \nabla f\cdot\nabla f - \nabla\phi\cdot\nabla\phi, \tag{17}$$

$$f\nabla^2\phi = 2\nabla f\cdot\nabla\phi. \tag{18}$$

在柱坐标中，(16) 式变为:

$$\partial_z(\rho\mathscr{A}_z) + \partial_\rho(\rho\mathscr{A}_z) = 0, \tag{19}$$

其中 ρ, z 为通常柱坐标.
另一方面，如果定义

$$A_i = n\partial_i n \quad 且\ n^2 = 1, \tag{20}$$

则由(11)式可知

$$\partial_i A_i = 0, \tag{21}$$

等价于[6]

$$2\,\mathrm{ch}\,\theta\nabla\theta\cdot\nabla\varphi + \mathrm{sh}\,\theta\Delta\varphi = 0, \tag{22}$$

$$\Delta\theta - \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta(\nabla\varphi)^2 = 0. \tag{23}$$

由 (15)与(18) 式我们可以看到，Ernst 方程可以表示为主手征场的形式．由于现在是柱坐标，所以用 ρ, z 为变量时，ρ 就是其坐标的雅可比行列式．如果变换到其它坐标系，ρ 应换成 $\alpha=\sqrt{g}$，在形式上与 Belinskli-Zakharov 的形式类似[12]，但不同的是在这里 $\det G=1$．因此即使变换了坐标系，其相应的雅可比行列式 $\sqrt{\alpha}$ 也不是 G 的行列式．所以这里的 G 只是主手征形式，而不是度规．但它可通过 (14) 式与度规相联系．此外我们将指出，这里的 G 本质上就是轴对称稳态 SDYM 场中的 J 矩阵(仅差一简单的常因子变换)．

三、Ernst 方程与 SDYM 场方程的联系

由自对偶条件，在 R-gauge 下，杨-方程可以写为[13]

$$\phi\partial_\mu\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \partial_\mu\sigma\partial_\mu\bar\sigma + i\left\{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\frac{\partial\bar\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial\bar\sigma}{\partial x^1}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^3}\frac{\partial\bar\sigma}{\partial x^4} - \frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\frac{\partial\bar\sigma}{\partial x^3}\right)\right\} = 0$$

$$\phi\partial_\mu\partial_\mu\sigma - 2\partial_\mu\sigma\partial_\mu\phi - 2i\left\{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial x^4} - \frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right\} = 0 \tag{24}$$

$$\phi\partial_\mu\partial_\mu\bar{\sigma} - 2\partial_\mu\bar{\sigma}\partial_\mu\phi + 2i\left\{\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right) - \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial x^4} - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x^4}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right\} = 0$$

在轴对称情况下，可以通过某些代换使(24)式变为 Ernst 方程．例如

(1) L. Witten 的代换[2]

在稳态情况下，引入代换

$$\phi = f(\rho, z), \quad \sigma = e^{i\alpha}\psi(\rho, z). \tag{25}$$

其中 σ 为任意实常数．

将(24)式代入(25)式可得到 Ernst 方程(17)(18)式．

(2) Takeno 等人的作法[5]

设 $\sigma, \bar{\sigma}, \phi$ 均仅通过某个标量函数 Ψ 依赖于 x^1、x^2、x^3、x^4 诸变量，采用 Aasatz 使满足方程(22)，然后求解(23)式得到 Soliton 解．

(3) 另一种考虑是限于一种特殊解的形式[14]

设 $\phi, \sigma, \bar{\sigma}$ 均仅为 ρ 与 u 的函数，其中

$$u = x^3 - vt, \quad v\text{一常数} \tag{26}$$

而

$$\phi = \phi(\rho, u), \quad \sigma = \sigma(\rho, u), \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\rho, u) \tag{27}$$

利用(26)和(27)式，(25)式可化为：

$$\begin{gathered}\phi\partial_\mu\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \partial_\mu\sigma\partial_\mu\bar{\sigma} = 0, \\ \phi\partial_\mu\partial_\mu\sigma - 2\partial_\mu\sigma\partial_\mu\phi = 0, \quad \phi\partial_\mu\partial_\mu\bar{\sigma} - 2\partial_\mu\bar{\sigma}\partial_\mu\phi = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

再利用(26)(27)两式(28)式可化为：

$$\begin{gathered}\phi\nabla^2\phi - \nabla\phi\cdot\nabla\phi + \nabla\sigma\cdot\nabla\bar{\sigma} = 0, \\ \phi\nabla^2\sigma - 2\nabla\sigma\cdot\nabla\phi = 0, \quad \phi\nabla^2\bar{\sigma} - 2\nabla\bar{\sigma}\cdot\nabla\phi = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

其中

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{30}$$

$$z = \frac{x^3 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{31}$$

引入代换[14]

$$\phi = \rho^n f(\rho, z), \quad \sigma = (\sqrt{2}\bar{y})^n\psi(\rho, z), \quad \bar{\sigma} = (\sqrt{2}y)^n\bar{\psi}(\rho, z). \tag{32}$$

则(29)式变为 Ernst 方程．但应注意微分算子如(30)所示，z 与原来坐标 x^3 不同．

由于在 R-gauge 下的杨-方程的 J 形式为[7]

$$(J^{-1}J_{,y})_{,\bar{y}} + (J^{-1}J_{,z})_{\bar{z}} = 0, \tag{33}$$

其中“,”表示普通微商，J 矩阵为：

$$J=\frac{1}{\phi}\begin{bmatrix}1 & \bar{\sigma}\\ \sigma & \phi^2+\sigma\bar{\sigma}\end{bmatrix}. \tag{34}$$

我们注意到一个有趣的事实，在 Witten 代换下(34)式变为

$$J=\frac{1}{f}\begin{bmatrix}1 & e^{-i\alpha}\phi\\ e^{i\alpha}\phi & f^2+\phi^2\end{bmatrix}, \tag{35}$$

将上式与 (14) 式比较，由于在方程中矩阵前面的负号没有什么本质意义($\pm G$ 均满足方程)，我们可以看到 G 与 J 之间仅差一个简单的常矩阵变换.

如令

$$G'=-G$$

则有

$$U^{-1}G'U=J, \tag{36}$$

其中

$$U=\begin{bmatrix}-e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}}\end{bmatrix},\ \alpha \text{ 为任意实常数} \tag{37}$$

由此我们可以看到，轴对称稳态的 SDYM 实质上可以简化为主手征模型.

利用代换 (32) 可将杨-方程的 J 形式表为:

$$(J^{-1}J_{,z})_{,z}+\rho^{-1}(\rho J^{-1}J_{,\rho})_{,\rho}$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{f\nabla^2 f-\nabla f\cdot\nabla f+\nabla\phi\nabla\phi}{f^2}-\dfrac{\phi(f\nabla^2 f-2\nabla f\nabla\phi)}{f^3}, \\ (\sqrt{2}\,y)^{n}\left\{\dfrac{f^2-\phi^2}{f^3}[f\nabla^2 f-2\nabla f\nabla\phi]-\dfrac{2\phi}{f^2}[f\nabla^2 f-\nabla f\nabla f+\nabla\phi\nabla\phi]\right\} \\ (\sqrt{2}\,y)^{-n}\dfrac{f^2\nabla\phi-2\nabla f\nabla\phi}{f^3},\ \dfrac{f\nabla^2 f-\nabla f\nabla f+\nabla\phi\nabla\phi}{f^2} \\ +\dfrac{\phi}{f^3}(f\nabla^2\phi-2\nabla f\nabla\phi)\end{bmatrix} \tag{38}$$

至于 SDYM 场方程的解到解的变换与 Ernst 方程解到解的变换的某些对应关系在另文中讨论，不再赘述.

四、H-变换在 Ernst 方程中的对应

在文献 [8] 中，讨论了 SDYM 中的 H-变换，它是一个包含无穷小参数 α 的局域变换.

$$\delta J=-J\Lambda(x)=-JU(x)TU(x)^{-1}, \tag{39}$$

其中 $T=T_a\alpha^a$，α^a 为无穷小变换参数，函数矩阵 $U(x)$ 满足 L-A 对:

$$\partial_{\bar{y}}U=-\lambda(\partial_z+B_z)U, \tag{40}$$

$$\partial_{\bar{z}}U=\lambda(\partial_y+B_y)U. \tag{41}$$

其中:

$$B_y=J^{-1}J_{,y},\ B_{\bar{y}}=JJ^{-1}_{,\bar{y}};\ B_z=J^{-1}J_{,z},\ B_{\bar{z}}=JJ^{-1}_{,\bar{z}}. \tag{42}$$

将(40)—(42)诸式代入(39)式，可得 H-变换的具体形式:

$$\delta B_y = -D_y\Lambda = -\frac{1}{\lambda}\partial_{\bar z}\Lambda, \quad \delta B_z = -D_z\Lambda = -\frac{1}{\lambda}\partial_{\bar y}\Lambda. \tag{43}$$

其中：
$$D_y = \partial_y + [B_y, \ ], \tag{44}$$

我们从(43)与(44)看到，由于 J 矩阵可以用 $\sigma, \bar\sigma, \phi$ 表达，则有

$$B_z = J^{-1}J_z = \frac{1}{\phi^2}\begin{bmatrix} -(\phi\phi_{,z} + \bar\sigma\sigma_{,z}) & \phi^2\bar\sigma_{,z} - 2\phi\bar\sigma\phi_{,z} - \bar\sigma^2\sigma_z \\ \sigma_{,z} & \bar\sigma\sigma_z + \phi\phi_{,z} \end{bmatrix}, \tag{45}$$

$$J^{-1}\delta J = \frac{1}{\phi^2}\begin{bmatrix} -\phi(\delta\phi - \bar\sigma\delta\sigma) & \phi^2\delta\bar\sigma - 2\phi\bar\sigma\delta\phi - \bar\sigma^2\delta\sigma \\ \delta\sigma & \bar\sigma\delta\sigma + \phi\delta\phi \end{bmatrix}. \tag{46}$$

H-变换构成了从已知 $\phi, \sigma, \bar\sigma$ 求解 $\delta\phi, \delta\bar\sigma, \delta\sigma$ 的方程，例如与(43)式相应的有：

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\delta\bar\Phi - \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\delta\bar\Phi = 2\mu\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\rho}\frac{\delta f}{f}, \tag{47}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\delta\phi + \frac{2}{f}\mu\frac{\partial f}{\partial\rho}\delta\phi = 2\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\delta f}{f}, \tag{48}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\delta f + \frac{1}{f}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta\bar\Phi - \mu\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\rho}\delta\phi\right)$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)\frac{\delta f}{f} = 0, \tag{49}$$

其中
$$\mu = \lambda e^{i\varphi}$$

以及与(43)式相应的另一组方程式

我们从(47)—(49)式清楚地看到，由于 SDYM 中的 J 形式的 H-变换 (39)是一个复变换 $(SL(N, C))$，此时与变换(33)相应的变换应为

$$\phi = \rho^n f(\rho, z), \quad \sigma = (\sqrt{2}y)^n\phi(\rho, z), \quad \bar\sigma = (\sqrt{2}\bar y)^n\bar\Phi(\rho, z). \tag{50}$$

需要指出的是，只有相应的 SDYM 中的H变换是实变换的时候，(50)中的 $\phi = \bar\Phi$. 在目前 $SL(N, C)$ 范畴内，只能得到复化的(47)—(49)式所示的 Bäcklund 变换.

五、结 论

本文中我们得到如下结论：

1. Ernst 方程在一定意义下等价于一个主手征理论.

2. 轴对称的 SDYM 方程可以通过多种形式的代换变为 Ernst 方程. 其本质就是此时 J 形式的杨-方程转化为主手征形式.

3. 通过变换可以讨论与 SDYM 中的 H-变换相应的轴对称稳定引力问题解间的 Bäcklund 变换性质.

4. 由 (19) 式所示的主手征场的性质与 Beskli-Zakharov 的理论在实质上有很大的不同，尽管它们的形式很相似. 进一步讨论上述主手征场的守恒流与代数性质是个有兴趣的问题. 此外，如何将厄米化的 J-形式的 H-变换应用于 Bäcklund 变换的讨论也是值得考虑的问题[15].

感谢在兰州举行"广义相对论精确解工作会议"期间，F. Ernst 教授、段一士教授，郭

汉英等同志的帮助和有益的讨论，是郭汉英首先提醒作者注意 Heisenberg 模型与 Ernst 方程的联系．

参　考　文　献

[1] F. J. Frnst, *Phys. Rev.,* **167** (1968), 1175.
[2] L. Witten, *Phys. Rev.,* **D19** (1979), 718.
[3] M. Hirayawa et al., *Phys. Lett.,* **66A** (1978), 354.
[4] S. Takeno and S. Homma, *Prog. Theor. Phys.,* **64** (1980), 1193.
[5] S. Takeno, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981), 1250.
[6] L.-L. Chau Wang，广州粒子物理会议文集 (1980)。
[7] M. K. Prasad, A. Sinha and L.-L. Chau Wang, *Phys. Rev. Lett.,* **43** (1979), 750.
[8] B. Y. Hou, M. L. Ge, and Y. S. Wu, *Phys. Rev.,* **D24** (1981), 2238.
[9] M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Lett.,* **108B** (1982), 411.
[10] L.-L. Chau, M. L. Ge and Y. S. Wu, *Phys. Rev.,* **D24** (1981), 1086.
[11] 乔玲丽，吴詠时，侯伯宇、葛墨林，中国科学，(A)**25**(1982), 49.
[12] V. A. Belinskil and V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP,* **48** (6), 1978.
[13] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.,* **38** (1977), 1377.
[14] L.-L. Chau Wang, Lecture delivered at the 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland, Febyuary 18-March 4, 1981.
[15] Y. S. Wu, Insritute for Advanced Study Preprint, 1982.

THE PRINCIPAL CHIRAL MODEL FORMULATION OF ERNST EQUATION AND SDYM EQUATION

Wu Young-shi

(Institute of Theoretical Physics)

Ge Mo-lin

(Lanzhou University)

Luo Chun-rong

(Northwest Industrial University)

Abstract

In this paper we point out that the Ernst equation can be reduced to the principal chiral model. We discuss the relations for axially symmetric SDYM and Ernst equation as well as principal chiral model. The correspondens in the Ernst equation presented in SDYM is also discussed.