第8卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol. 8, No. 3
1984年5月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　May, 1984

$SO(12)$ 大统一模型

查 朝 征
（新 疆 大 学）

摘　　要

在 $SO(12)$ 的 32 维旋量表示及其共轭表示中填入了两个“双代”费米子，考虑了其质量谱和 Cabibbo 角，并简单讨论了在 $SO(12)$ 群下不重复填充而容纳四代费米子的可能性.

一、引　　言

现在已经有了很多大统一模型，但是从目前的实验来判定哪个更为优越还有困难.最简单的模型如 $SU(5)$ 模型[1]，一次填充可以容纳一代费米子．要容纳多代费米子，就必须重复填充．要考虑水平对称性，而不重复填充，就要扩大规范群[2]．除了么正群之外，还可以用其它规范群，例如正交群．以正交群作为规范群，可以在大统一能量标度下，恢复左右对称性．用么正群作规范群时，要对费米子填充的表示作特殊的选择以消去反常，而正交群（除了 $SO(6)$ 外）却是无反常的．以正交群为规范群的大统一模型已见于不少文献中：如文献 [3] 用 $O(10)$ 讨论了 t-夸克质量和中间能标问题，文献 [4] 中用 $SO(14)$ 讨论了代的大统一问题.关于 $SO(12)$ 大统一模型的讨论，文献[5]把 $SO(12)$ 作为 $SO(N)$ 群的一个例子讨论了 $SO(12)$ Higg 势与渐近自由要求的本征值条件的关系，文献 [6] 讨论了 $SO(12)$ 群的费米子填充、玻色子谱和自发破缺问题.

我们这里利用与 [6] 不同的破缺机制，引入了一个分立对称性 D，以避免由于存活假设使所有费米子以 10^{15} GeV 大统一质量出现；考虑了两个“双代”费米子的填充，和两个“双代”之间的耦合，以得出 Cabibbo 角；最后我们简单地讨论了 $SO(12)$ 群下用旋张量表示扩大填充的费米子数，以期不重复填充而容纳四代费米子的问题.

二、费米子的填充

在 $SO(12)$ 大统一规范群下，不可约旋量表示是 32 维表示，其 Cartan 子代数的生成元有

$$T_3^c=\frac{1}{\sqrt{2}}(I_{56}+I_{78}),\qquad T_8^c=\frac{1}{\sqrt{6}}(-I_{56}+I_{78}+2I_{9\bar{0}}),$$

本文 1983 年 1 月 31 日收到.

$$T_5^c = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_{56} - I_{78} + I_{9\bar{0}}) \tag{2.1}$$

$$T_3^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} + I_{34}), \quad T_3^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} - I_{34})$$

$$T^U = \frac{1}{\sqrt{2}} I\sqrt{2}.$$

其中 $I_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, 9, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2})$ 为 $SO(12)$ 群的生成元(见附录). 电荷算符为

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} T_3^L + \frac{1}{\sqrt{2}} T_3^R + \frac{1}{\sqrt{3}} T_5^c, \tag{2.2}$$

又超荷为

$$Y = Q - \frac{1}{\sqrt{2}} T_3^L \tag{2.3}$$

现在我们把费米子按下列方式填充:

$$\psi_L^+ = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix}_R \tag{2.4}$$

$$\tilde{\psi}^+ = (\tilde{\psi}_u, \tilde{\psi}_d, \tilde{\psi}_{u^c}, \tilde{\psi}_{d^c}, \tilde{\psi}_{u'^c}, \tilde{\psi}_{d'^c}, \tilde{\psi}_{u'}, \tilde{\psi}_{d'}) \tag{2.5}$$

$$\tilde{\psi}^- = (\tilde{\psi}_{c^c}, \tilde{\psi}_{S^c}, -\tilde{\psi}_c, -\tilde{\psi}_S, -\tilde{\psi}_{c'}, -\tilde{\psi}_{S'}, \tilde{\psi}_{c'^c}, \tilde{\psi}_{S'^c}),$$

其中

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}_u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\nu}_e), \quad \tilde{\psi}_d = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, \tilde{e}), \\
&\tilde{\psi}_{u^c} = (\tilde{u}_1^c, \tilde{u}_2^c, \tilde{u}_3^c, \tilde{N}_u^c), \quad \tilde{\psi}_{d^c} = (\tilde{d}_1^c, \tilde{d}_2^c, \tilde{d}_3^c, \tilde{e}^+), \\
&\tilde{\psi}_{u'^c} = (\tilde{u}_1'^c, \tilde{u}_2'^c, \tilde{u}_3'^c, \tilde{\nu}_{e'}^c), \quad \tilde{\psi}_{d'^c} = (\tilde{d}_1'^c, \tilde{d}_2'^c, \tilde{d}_3'^c, \tilde{e}'^+), \\
&\tilde{\psi}_{u'} = (\tilde{u}_1', \tilde{u}_2', \tilde{u}_3', \tilde{\nu}_e'), \quad \tilde{\psi}_{d'} = (\tilde{d}_1', \tilde{d}_2', \tilde{d}_3', \tilde{e}'), \\
&\tilde{\psi}_{c^c} = (\tilde{c}_1^c, \tilde{c}_2^c, \tilde{c}_3^c, \tilde{\nu}_\mu^c), \quad \tilde{\psi}_{S^c} = (\tilde{S}_1^c, \tilde{S}_2^c, \tilde{S}_3^c, \tilde{\mu}^+), \\
&\tilde{\psi}_c = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{N}_c), \quad \tilde{\psi}_S = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{\mu}), \\
&\tilde{\psi}_{c'} = (\tilde{c}_1', \tilde{c}_2', \tilde{c}_3', \tilde{\nu}_{\mu'}), \quad \tilde{\psi}_{S'} = (\tilde{S}_1', \tilde{S}_2', \tilde{S}_3', \tilde{\mu}'), \\
&\tilde{\psi}_{c'^c} = (\tilde{c}_1'^c, \tilde{c}_2'^c, \tilde{c}_3'^c, \tilde{\nu}_\mu'^c), \quad \tilde{\psi}_{S'^c} = (\tilde{S}_1'^c, \tilde{S}_2'^c, \tilde{S}_3'^c, \tilde{\mu}'^c).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里 u, d, s, c 表示上、下、奇、粲夸克, e、μ 为电子和 μ 子, ν_e 和 ν_μ 是它们的中微子;下标数字为色指标,上标 c 表示电荷共轭场. 另外还要加入两个 $SO(12)$ 单态中性轻子场

$$N_{uR}^c, N_{cL}. \tag{2.7}$$

我们把两个"双代分别填入不可约表示 ψ^+ 及其共轭表示 ψ^- 中是为了求得 (u, c) 和 (d, s) 之间的混合,使它们具有一定的 Cabibbo 角. 为使"轻"夸克 u, d, c, s 和"重"夸克 u', d', c', s' 分别获得正确的质量, ψ^+ 和 ψ^- 必须分别以左手场和右手场填入.

三、Higgs 机 制

$SO(12)$ 的旋量表示是实表示, 因此对 $SO(12)$ 的任何子群, 例如对其标准模型子群 $G_S = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 自然也是实表示. 在高能时恢复了左右对称性, 因此必然存在与"轻"费米子手征相反的重费米子 $u_R', d_R', u_R'^c, d_R'^c, \nu_R', e_R', \nu_R'^c, e_R'^+$. 既然存在这

样的粒子，在拉氏函数中就可以引入以下的质量项[7]

$$m_1(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\begin{pmatrix} u'_R \\ d'_R \end{pmatrix} + m_2\bar{u}'_L u_R + m_3\bar{d}'_L d_R + \cdots\cdots, \tag{3.1}$$

它们在 $SO(12)$，因而在 $G_S = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ 下是不变的．除了树图质量之外，引进的 Higgs 场在高圈图的辐射修正中也会产生质量．例如最简单的单圈图就有这样的因子（见图 1）

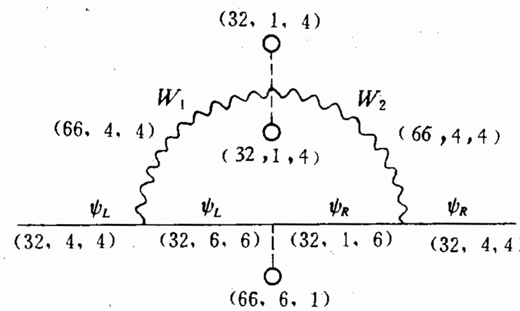

图 1 单圈图质量因子．其中 (n_1, n_2, n_3) 表示在 $SO(12)$, $SU(4)$ 和 $SU(4)'$ 中的维数，小圈表示真空期望值．

其对质量矩阵的贡献为[8]

$$M_p \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) M \ln\frac{M^2_{W_1}}{M^2_{W_2}} \sim \frac{\alpha}{\pi} M \sim 10^{13}\text{GeV}. \tag{3.2}$$

这里由于 SU_4 对称性 $M_{W_1} \sim M_{W_2}$，使 $\ln\dfrac{M^2_{W_1}}{M^2_{W_2}} \sim 1$，也就是所有的费米子都将获得大质量．这就是大统一的存活假设：低质量费米子或粒子一般应是那些不能获得 G_S 不变质量的粒子[9]．因此，上述费米子在 $SO(12)$ 中应具有大统一能量标度的质量．这与实验不符．

文献[6]认为由于 μ 和 β 衰变速率的实验限制使右手带电流相互作用的上限为 10%，这样，右手中间玻色子的质量下限就是 300 GeV．这种理论可以用中子-反中子振荡来鉴定．如果中子-反中子振荡时间在 10^{16}—10^9 秒之间，则意味着在 10^2—10^6GeV 之间有新的物理．这样就改变了 10^2—10^{15} GeV 之间呈现“沙漠”的局面．然而，这种方案如不能排除由于存活假设而致使所有费米子以大统一能量标度的质量出现的可能性，是有困难的．

为了解决这个问题，我们在大统一能量标度上第一次 Higgs 破缺时引入一个分立对称性 D[10]：

$$\begin{aligned} &\psi_L \to i\psi_L, \quad \psi_R \to -i\psi_R \\ &\chi \to \chi, \qquad \hat{\phi}_1^{(2)} \to \hat{\phi}_1^{(2)} \\ &N^c_{uR} \to iN^c_{uR}, \quad N_{cL} \to -iN_{cL} \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 ψ_L、ψ_R 为手征费米子场，χ 为 32 维 Higgs 旋量场，$\hat{\phi}_1^{(2)}$ 为二阶反对称 Higgs 张量场．这样只有 $SU(4)_c$ 色单态费米子 N^c_u、N_c 在第一次破缺时获得 10^{15} GeV 的质量．为此引入如下的 Yukawa 耦合

$$a_1\bar{N}^c_{uR}\chi\psi^+_L + b_1\bar{N}_{cL}\chi\psi^-_R \tag{3.4}$$

这样 ν_e 的质量矩阵就是

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \nu_{eL} & N^c_{uL} & N^c_{uR} \\
\nu_{eL} & 0 & m & 0 \\
N^c_{uL} & m & 0 & M \\
N^c_{uR} & 0 & M & 0
\end{array}
$$

因此 ν_e 的质量在树图下为零,同理 ν_μ 质量也为零.

在第一次破缺时,取下列不为零的 Higgs 场真空期望值[11]:

$$
\begin{aligned}
&\langle\hat{\phi}_1^{(2)}\rangle = a(I_{12} - I_{34}) + b(I_{56} - I_{78} + I_{9\overline{0}}) + cI_{\overline{1}\overline{2}} \\
&\langle\chi_{\overline{2}}\rangle = d
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

其中

$$
a,\ b,\ c,\ d \sim 10^{15}\,\mathrm{GeV} \tag{3.6}
$$

这样就使 $SO(12)$ 破缺到 G_S,

$$
SO(12) \times D \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times D \tag{3.7}
$$

在第二次破缺时,引进新的 Higgs 张量场 $\hat{\phi}_2^{(2)}$、$\hat{\phi}^{(5)}$,它们在 D 下的变换为

$$
\hat{\phi}_2^{(2)} \to -\hat{\phi}_2^{(2)},\quad \langle\hat{\phi}^{(5)}\rangle \to -\hat{\phi}^{(5)} \tag{3.8}
$$

其中

$$
\hat{\phi}^{(k)} = \frac{1}{k!}\,\phi^{(k)}_{i_1}\cdots{}_{i_k}\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k} \tag{3.9}
$$

这里我们取下列不为零的 Higgs 场真空期望值

$$
\begin{aligned}
&\langle\phi^{(2)}_{3\overline{1}}\rangle = U_{3\overline{1}},\quad \langle\phi^{(2)}_{3\overline{2}}\rangle = U_{3\overline{2}} \\
&\langle\phi^{(2)}_{4\overline{1}}\rangle = U_{4\overline{1}}\quad \langle\phi^{(2)}_{4\overline{2}}\rangle = U_{4\overline{2}} \\
&\langle\phi^{(5)}_{124\overline{1}\overline{2}}\rangle = U_{124\overline{1}\overline{2}}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

而

$$
U_{3\overline{1}},\ U_{3\overline{2}}、U_{4\overline{1}}、U_{4\overline{2}}、U_{124\overline{1}\overline{2}} \sim 10^2\,\mathrm{GeV} \tag{3.11}
$$

这样使 G_S 破缺到 $SU(3)_c \times U(1)_{EM}$.

四、夸克质量

第二次对称破缺是引入二阶反对称 Higgs 张量 $\hat{\phi}_2^{(2)}$ 来完成的. 为了使 (u, c) 和 (d, s) 有一定的混合,还要引入五阶 Higgs 张量场 $\hat{\phi}^{(5)}$. 这时 Yukawa 耦合为

$$
\begin{aligned}
&A_1\tilde{\psi}_L^+ C^{-1}B^{-1}\hat{\phi}_2^{(2)}\psi_L^+ + A_2\tilde{\psi}_R^- C^{-1}B^{-1}\hat{\phi}_2^{(2)}\psi_R^- \\
&\quad + A_3(\bar{\psi}_L^+\hat{\phi}^{(5)}\psi_R^- + \bar{\psi}_R^-\hat{\phi}^{(5)}\psi_L^+) + h.c.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

其中 $A_1 = c_1 + ic_2$, $A_2 = c_3 + ic_4$. 在适当地选取 $U_{3\overline{1}}$, $U_{3\overline{2}}$. $U_{4\overline{1}}$, $U_{4\overline{2}}$ 和 $U_{124\overline{1}\overline{2}}$ 以及耦合常数 A_1、A_2 和 A_3 之后可以得到正确的夸克质量和 Cabibbo 角,而 u', d'、c'、s'、e', μ' 的质量则甚大于目前实验所能达到的能量标度:

$$
m_u = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_3 - \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2^2}\right)
$$

$$
m_c = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_3 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2^2}\right)
$$

$$m_d = \frac{1}{2}\left(m_4 + m_5 - \sqrt{(m_4 - m_5)^2 + 4m_2^2}\right)$$

$$m_s = \frac{1}{2}\left(m_4 + m_5 + \sqrt{(m_4 - m_5)^2 + 4m_2^2}\right) \tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= 2[c_1(U_{3\bar{2}} + U_{4\bar{1}}) + c_2(U_{3\bar{1}} - U_{4\bar{2}})], \\ m_3 &= 2[c_3(U_{3\bar{2}} - U_{4\bar{1}}) + c_4(U_{3\bar{1}} + U_{4\bar{2}})], \\ m_2 &= 2A_3U_{123\bar{1}\bar{2}} \\ m_4 &= 2[c_1(U_{3\bar{2}} - U_{4\bar{1}}) + c_2(U_{3\bar{1}} - U_{4\bar{2}})], \\ m_5 &= 2[c_3(U_{3\bar{2}} + U_{4\bar{1}}) + c_4(U_{3\bar{1}} + U_{4\bar{2}})]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Cabibbo 角满足

$$\begin{aligned} \sin\theta_c = &\frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{4m_2^2}{m_d^2 + m_d m_s + m_s^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\left[1 + \left(1 - \frac{4m_2^2}{m_u^2 + m_u m_c + m_c^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\ &- \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{4m_2^2}{m_d^2 + m_d m_s + m_s^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\ &\times \left[1 - \left(1 - \frac{4m_2^2}{m_u^2 + m_u m_c + m_c^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

如果取 $m_u = 5\,\mathrm{MeV}$, $m_d = 10\,\mathrm{MeV}$, $m_s = 200\,\mathrm{MeV}$. $m_c = 1.3\,\mathrm{GeV}$, $m_2 \cong 53\,\mathrm{MeV}$, 则 $\sin\theta_c = 0.228$, 与实验一致. 又 Weinberg 角满足

$$\sin^2\theta_W = \frac{e^2}{g^2} = \frac{3}{8} \tag{4.5}$$

五、讨　　论

以上我们把两代已知的"轻"费米子和两代未知的"重"费米子填入了 $SO(12)$ 群的 32 维旋量表示及其共轭表示中. 这与目前认为可能有的四代"轻"费米子尚有距离. 在 $SO(12)$ 规范群的范围内要扩大费米子填充数,除了进行重复填充外,还有一种办法,就是采用更复杂的 $SO(12)$ 表示,如 352 维不可约旋张量表示. 352 维旋张量在 $SU(6)$ 中可分解为

$$\begin{aligned} (100010)\underline{352} = &2(10000)\underline{6} + 2(00001)\underline{6}^* + (00100)\underline{20} \\ &+ (11000)\underline{70} + (00011)\underline{70}^* + (10010)\underline{84} \\ &+ (00011)\underline{84}^*. \end{aligned} \tag{5.1}$$

在进一步破缺到 $SU(5)$ 时

$$\begin{aligned} \underline{352} = &4 \times \underline{1} + 4 \times \underline{5} + 4 \times \underline{5}^* + 3 \times \underline{10} + 3 \times \underline{10}^* + \underline{15} \\ &+ \underline{15}^* + 2 \times \underline{24} + \underline{40} + \underline{40}^* + \underline{45} + \underline{45}^* \end{aligned} \tag{5.2}$$

考虑到 $\underline{24}$ 和 $\underline{45}$ 在破缺到 $G_s = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 时所产生的分量. 它可以容纳四代费米子. 然而,由于费米子太多,可能将破坏渐近自由[7],这要用适当的机制加以解决.

作者特别感谢朱洪元先生的关心，和杜东生、马中骐、周咸建、东方晓、薛丕友、吴丹迪、黄 涛、李铁忠和江向东同志的有益的讨论和帮助.

附录 $SO(12)$ 群的 γ 矩阵及 Cartan 子代数生成元

γ 矩阵

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
γ_1	x	1	y	x	1	1
γ_2	y	z	x	y	1	1
γ_3	x	1	y	z	1	1
γ_4	y	z	y	1	1	1
γ_5	x	1	1	y	y	z
γ_6	y	z	z	y	y	1
γ_7	x	1	1	y	y	x
γ_8	y	z	z	y	x	y
γ_9	x	1	1	y	1	y
$\gamma_{\bar{0}}$	y	z	z	y	z	y
$\gamma_{\bar{1}}$	y	x	1	1	1	1
$\gamma_{\bar{2}}$	y	y	1	1	1	1

Cartan 子代数生成元及 B、γ_x

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
I_{12}	z	z	z	z	1	1
I_{34}	z	z	1	z	1	1
I_{56}	z	z	z	1	1	z
I_{78}	z	z	z	1	z	z
$I_{9\bar{0}}$	z	z	z	1	z	1
$I_{\bar{1}\bar{2}}$	1	z	1	1	1	1
B	z	y	z	1	1	1
γ_x	z	1	1	1	1	1

参 考 文 献

[1] H. Georgi, S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 451.
[2] H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B156**(1979), 126.
[3] H. Georgi, D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys.* **B155**(1979), 52.
[4] 马中骐、杜东生、周咸建、薛丕友，高能物理与核物理，**5**(1981), 664.
[5] N P. Chang, J. Perez-Morcador, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 4721.
[6] S. Rajpcot, P. Sithikong, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 1649.
[7] P. Langacker, *Phys. Rev.*, **72C**(1981), 185.
[8] R. Barbieri, D. V. Nanopoulos, G. Morchio, F. Strocchi, *Phys. Lett.*, **90B**(1980), 91; C. Itzykson, J. Zuber, Quarturn Field Theory (ecl. Mc Grau-Hill, 1980), p334.
[9] R. Barbieri, D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.*, **91B**(1980), 369.
[10] 章义朋、周咸建、薛丕发，中国科学，**A1**(1983), 48; F. X. Dong. T. S. Tu, P. Y. Xue, X. J. Zhou, BIHEPTH-1982-7.
[11] D. D. Wu, *Nucl. Phys.*, **B199**(1982), 523; L. F. Li, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 1723.

AN *SO* (12) GRAND UNIFLIED MODEL

ZHA CHAO-ZHENG
(*Xinjiang University*)

ABSTRACT

Assignment of the two "twins" generations of fermions in a $SO(12)$ 32-dimensional spinor representation and its conjugate representation is given. Mass spectrum of fermions and their Cabibbo angles are discussed. The assignment of the four generations of fermions in a 352-dimensional spinor-tensor representaion of $SO(12)$ Without repetiton is briefly discussed.