第8卷 第2期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 8, No. 2
1984年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1984

关于 Wess-Zumino-Witten 有效作用量的规范不变性

周光召 郭汉英 吴 可
(中国科学院理论物理研究所)

宋行长
(北 京 大 学)

摘 要

本文指出，为了引入规范不变的 Wess-Zumino-Witten 有效作用量，$SU(3)_L\times SU(3)_R$ 的规范子群必须满足一个大范围的无反常条件. 这个条件要求规范子群的左手与右手的 Chern-Simons 与形式必须彼此相等，在局部意义上，这个条件等价于通常微扰论意义下的无反常条件. 本文运用一种系统的方法导出这个条件并构造规范不变的有效作用量. 对于非阿贝尔规范群，这里给出的有效作用量所含的项比 Witten 的要少. 本文还讨论了纯规范的情形.

最近，Witten[1] 提出了一种新的表述以讨论 Wess-Zumino[2] 手征有效作用量的大范围性质，得到了一些颇有兴趣的结果.

本文将进而指出，为了规范作用量的整体对称性 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 的任一子群 $H\subseteq SU(3)_L\times SU(3)_R$，规范子群$H$必须满足一大范围的无反常条件. 这个条件要求群$H$的左手和右手 Chern-Simons 5 形式必须彼此相等，向在局部的意义上，该条件等价于夸克水平上微扰论计算得到的无反常条件. 代替 Witten 所采用的试探方法，本文提出了一种系统的方法来求规范作用量的对称性. 并导出上述无反常条件. 对于非阿贝尔情形，我们得到的规范不变的有效作用量所包含的项比 Witten 的少. 虽然这两种有效作用的差别仅涉及一些极罕见的过程，然而在原则上找出区别这两种有效作用的方式将是有意义的. 本文还讨论了纯规范的情形，显然，这与有效作用理论的真空性质有密切的关系.

Witten 在 Wess-Zumino 工作的基础上，建议引入如下的有效作用来描述强作用的低能极限1):

$$I(U)=-\frac{F_\pi^2}{16}\int d^4x\mathrm{Tr}\,\partial_\mu U\partial_\mu U^{-1}+n\Gamma(U) \tag{1}$$

$$\Gamma(U):=+\frac{1}{240\pi^2}\int_Q d\Sigma^{ijklm}\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_i UU^{-1}\partial_j UU^{-1}\partial_k UU^{-1}\partial_l UU^{-1}\partial_m U) \tag{2}$$

本文1983年8月12日收到.

1) 为方便起见，我们将尽量采用 Witten[1] 的记号和约定.

其中 $F_\pi \cong 190$ MeV，$U(x)$ 是 $SU(3)$ 的元素，其无穷小形式描述 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称自发破缺到对角 $SU(3)$ 的 Goldstone 玻色场。n 是一拓扑量子数，Q 是 5 维盘，紧致化的欧氏 4-时空 $M \sim S^4$ 是 Q 的边界。

已知在规范群 $H_L \times H_R \subseteq SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的作用下，场量 $U(t)$ 的变换性质为

$$U(x) \to U'(x) = L(x)U(x)R^{-1}(x), \quad L(R) \in H_{L(R)} \tag{3}$$

问题是在什么物理条件下可以找到与 $I(U)$ 相应的规范不变的作用量，同时如何去寻找这种作用量。显然，规范不变的有效作用量应有如下形式

$$\tilde{I}(A_\mu, U) = -\frac{F_\pi^2}{16}\int d^4x \mathrm{Tr} D_\mu U D_\mu U^{-1} + n\tilde{\Gamma}(A_\mu, U) \tag{4}$$

其中 $D_\mu U$ 是 U 的规范协变导数

$$D_\mu U = \partial_\mu U + A_{\mu L}U - UA_{\mu R}, \quad A_{\mu L(R)} = A^a_{\mu L(R)}T^a_{L(R)}. \tag{5}$$

$\tilde{\Gamma}$ 包含 $\Gamma(U)$ 项及其它最少量的、定义在 $M^4 \sim S^4$ 上的项，$\tilde{\Gamma}$ 本身应是规范不变的。这样，问题就转化为在什么物理条件下可以找到，以及如何寻找规范不变的 $\tilde{\Gamma}$ 项。

我们得到的结果是：

在规范群的左、右手 Chern-Simons 5 形式 π^L 与 π^R 相等

$$\pi^L = \pi^R \tag{6}$$

的充要条件下，表达式

$$\tilde{\Gamma}(A_\mu, U) = \Gamma(U) + \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{7}$$

是在规范变换 (3) 下不变的，因而由公式 (4) 定义的 $\tilde{I}$ 是规范不变的有效作用量。这里，Chern-Simons 5 形式的系数定义为

$$\pi_{ijklm} = -\frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}\left(F_{ij}F_{kl}A_m - \frac{1}{2}F_{ij}A_kA_lA_m + \frac{1}{10}A_iA_jA_kA_lA_m\right) \tag{8}$$

A_i 是定义在 5 维盘 Q 上的规范势，F_{ij} 是相应的规范场强；而且

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\Big\{&[(-A_{\mu L}U_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L} + \partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L} + A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}U_{\beta L}) + (L \to R)] \\
&+ \partial_\mu A_{\nu L}UA_{\alpha R}U^{-1}U_{\beta L} + U\partial_\mu A_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}U_{\beta L} \\
&- \frac{1}{2}[A_{\mu L}U_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L} - (L \to R)] \\
&+ A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}U_{\alpha L}U_{\beta L} - UA_{\mu R}U^{-1}A_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L} \\
&- A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1} - \partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1} + A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U \\
&+ \partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U + A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}U_{\beta L} + A_{\mu R}U^{-1}A_{\nu L}UA_{\alpha R}U_{\beta R} \\
&+ [A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L} + (L \to R)] - A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1} \\
&+ A_{\mu R}A_{\nu R}A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U - \frac{1}{2}A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1}\Big\}
\end{aligned} \tag{9}$$

$U_{\mu L(R)}$ 定义为

$$U_{\nu L} = \partial_\nu U \cdot U^{-1}, \quad U_{\nu R} = U^{-1}\partial_\nu U.$$

如果条件 (6) 不能得到满足，那么在规范变换 (3) 下 $\tilde{\Gamma}$ 的改变量便成为

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\Gamma} &= \Gamma(L) - \Gamma(R) \\ &\quad - \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left\{A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}L^{-1}\partial_\beta L + \frac{1}{2}A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}L^{-1}\partial_\beta L\right. \\ &\quad + \frac{1}{2}A_{\mu L}A_{\nu L}L^{-1}\partial_\alpha L L^{-1}\partial_\beta L + \frac{1}{4}A_{\mu L}L^{-1}\partial\nu L A_{\alpha L}L^{-1}\partial_\beta L \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}A_{\mu L}L^{-1}\partial_\nu L L^{-1}\partial_\alpha L L^{-1}\partial_\beta L - (L \to R)\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

这里 $\Gamma(L)$ 与 $\Gamma(R)$ 的定义和 $\Gamma(U)$ 的定义 (2) 一样，只要分别将 U 代之以 L 与 R. 如果规范变换 (3) 取无穷小形式

$$L = 1 + \varepsilon_L, \quad R = 1 + \varepsilon_R, \quad \varepsilon_{L(R)} = \varepsilon^a_{L(R)}T^a_{L(R)} \tag{11}$$

改变量 $\Delta\tilde{\Gamma}$ 也变为无穷小形式

$$\delta\tilde{\Gamma} = \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left\{\varepsilon_L\left(\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L} + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L})\right) - (L \to R)\right\} \tag{12}$$

这就是 Witten 的结果，并与在夸克水平上无穷小规范变换下有效作用的反常改变量的微扰论计算的结果一致.

这个一致性表明，条件 (6) 事实上是通常微扰论意义下无反常条件的大范围推广. 因此称为大范围的无反常条件.

对于规范群 $H = U(1)$，即电磁规范群的情形，有效作用量 $\tilde{I}$ 的表达式 (4) 以及表达式 (7) 与 (9) 自动给出与 Witten 相同的结果，即我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{em}(A_\mu, U) &= \Gamma(U) + \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,\{-A_\mu\hat{Q}(U_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L} + U_{\nu R}U_{\alpha R}U_{\beta R}) \\ &\quad + 2F_{\mu\nu}A_\alpha(\hat{Q}^2U_{\beta L} + \hat{Q}^2U_{\beta R} + \hat{Q}U\hat{Q}U^{-1}U_{\beta L})\}\end{aligned} \tag{13}$$

然而，对于非阿贝尔的情形，表达式 (9) 与 Witten 相应的表达式相比包含的项要少，因而这里给出的有效作用 $\tilde{I}$ 所含的项也就比 Witten 所给出的要少. 不过，二者之差在规范变换 (3) 下是不变的[1].

对于纯规范的情形，无反常条件 (6) 变为

$$\Gamma(L) = \Gamma(R) \tag{14}$$

表达式 (7) 与 (9) 变为

$$\tilde{\Gamma}^{(0)}(A^{(0)}_\mu, U) = \Gamma(U) + \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{W}^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{W}^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\,&\Big\{-[A^{(0)}_{\mu L}U_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L} + (L \to R)] - [A^{(0)}_{\mu L}U_{\nu L}A^{(0)}_{\alpha L}U_{\beta L} - (L \to R)] \\ &+ A^{(0)}_{\mu L}UA^{(0)}_{\nu R}U^{-1}U_{\alpha L}U_{\beta L} - UA^{(0)}_{\mu R}U^{-1}A^{(0)}_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L} \\ &+ A^{(0)}_{\mu L}UA^{(0)}_{\nu R}U^{-1}A^{(0)}_{\alpha L}U_{\beta L} + A^{(0)}_{\mu R}U^{-1}A^{(0)}_{\nu L}UA^{(0)}_{\alpha R}U_{\beta R} \\ &- [A^{(0)}_{\mu L}A^{(0)}_{\nu L}A^{(0)}_{\alpha L}U_{\beta L} + (L \to R)] - A^{(0)}_{\mu L}A^{(0)}_{\nu L}A^{(0)}_{\alpha L}UA^{(0)}_{\beta R}U^{-1} \\ &+ A^{(0)}_{\mu R}A^{(0)}_{\nu R}A^{(0)}_{\alpha R}U^{-1}A^{(0)}_{\beta L}U + \frac{1}{2}A^{(0)}_{\mu L}UA^{(0)}_{\nu R}U^{-1}A^{(0)}_{\alpha L}UA^{(0)}_{\beta R}U^{-1} \\ &+ A^{(0)}_{\mu L}U_{\nu L}UA^{(0)}_{\alpha R}A^{(0)}_{\beta R}U^{-1} + UA^{(0)}_{\mu R}U^{-1}U_{\nu L}A^{(0)}_{\alpha L}A^{(0)}_{\beta L}\Big\}\end{aligned} \tag{16}$$

1) 文[1]的结果有笔误，要作相应改正.

上标 (0) 表示与纯规范相应的量. 反常改变量 (10) 与 (12) 也有相应的表达式. 显然，这些结果与有效作用理论的真空性质有关. 这一点，我们留待以后进一步讨论.

现在，我们来阐明如何得到这些结果.

首先，按照从整体对称性到局域对称性的标准方法，容易写出有效作用量 (1) 的如下规范不变推广

$$\hat{I} = -\frac{F_\pi^2}{16}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\, D_\mu U D_\mu U^{-1} + n\hat{\Gamma}(A_i, U) \tag{17}$$

$$\hat{\Gamma}(A_i, U) := +\frac{1}{240\pi^2}\int_Q d\Sigma^{ijklm}\, \mathrm{Tr}\,(U^{-1}D_iUU^{-1}D_jUU^{-1}D_kUU^{-1}D_lUU^{-1}D_mU). \tag{18}$$

这就是直接把 I 中的 U 的导数分别用 4 维时空 $M \sim S^4$ 和 5 维盘 Q 上 U 的协变导数代替而得到的. 不过，尽管 $\hat{I}$ 是明显规范不变的，但它并不能直接用来作为物理的规范不变有效作用量，这是因为 $\hat{\Gamma}$ 不能全部约化为定义在物理时空上，即 $M \sim S^4 = \partial Q$ 上的量.

然而，深入的考查表明，$\hat{\Gamma}$ 项可以分解为两部分

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(A_i, U) = \tilde{\Gamma}(A_\mu, U) &+ \int_Q d\Sigma^{ijklm}(\pi^L_{ijklm} - \pi^R_{ijklm})\\ &- \frac{1}{48\pi^2}\int_Q d\Sigma^{ijklm}\, \mathrm{Tr}\,(F^L_{ij}D_kUU^{-1}D_lUU^{-1}D_mUU^{-1} - 2F^L_{ij}F^L_{kl}D_mUU^{-1}\\ &- F^L_{ij}D_kUF^R_{lm}U^{-1} + F^R_{ij}U^{-1}D_kUU^{-1}D_lUU^{-1}D_mU - 2F^R_{ij}F^R_{kl}U^{-1}D_mU\\ &- F^R_{ij}U^{-1}D_kUU^{-1}F^L_{lm}U).\end{aligned} \tag{19}$$

对于阿贝尔规范群的情形，也有相应的表达式

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{e.m.}(A_i, U) = \tilde{\Gamma}^{e.m.}(A_\mu, U)&\\ - \frac{1}{48\pi^2}\int_Q d\Sigma^{ijklm}\, &\mathrm{Tr}\,\{F_{ij}\hat{Q}(D_kUU^{-1}D_lUU^{-1}D_mUU^{-1}\\ &+ U^{-1}D_kUU^{-1}D_lUU^{-1}D_mU)\\ &- 2F_{ij}F_{kl}(\hat{Q}^2D_mUU^{-1} + \hat{Q}^2U^{-1}D_mU + \hat{Q}U\hat{Q}U^{-1}D_mUU^{-1})\}\end{aligned} \tag{20}$$

这里，$D_iU = \partial_iU + A_i[Q, U]$，$A_i \in u(1)$，$\hat{Q}$ 是电荷矩阵[1]. $\hat{\Gamma}$ 的第一部分由 $\tilde{\Gamma}$ 的表达式和左、右 Chern-Simons 5 形式之差的积分组成 (对于 $U(1)$ 情形，Chern-Simons 5 形式自动为零)，$\hat{\Gamma}$ 的第二部分完全由 Q 上的规范不变量组成. 于是，我们可以当且仅当左右 Chern-Simons 5 形式之差为零时，利用 $\tilde{\Gamma}$ 定义物理的规范不变有效作用量 $\tilde{I}$，而前者就是必要且充分的大范围无反常条件.

一般说来，$\tilde{\Gamma}$ 的形式不是唯一的. 任意添加定义在 $M \sim S^4$ 上的规范不变项都将改变 $\tilde{\Gamma}$. 不过，我们关于 $\tilde{\Gamma}$ 的构造在一定意义下是唯一的：在对 Γ 引入最小耦合后，再从 $\hat{\Gamma}$ 中最大限度地扣去 Q 上的规范不变项. 这样得到的 $\tilde{\Gamma}$ 项所包含的项数比 Witten 的结果要少.

参　考　文　献

[1] E. Witten "Global Aspects of Current Algebra", Princeton Preprint (1983).
[2] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37B**(1971), 95.

ON THE GAUGE INVARIANCE OF WESS-ZUMINO-WITTEN EFFECTIVE ACTION

CHOU KUANG-CHAO GUO HAN-YING WU KE
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

SONG XING-CHANG
(*Peking University*)

ABSTRACT

It is shown that in order to introduce the gauge invariant Wess-Zumino-Witten effective action a global anomalyfree condition should be satisfied by the gauged subgroup of $SU(3)_L \times SU(3)_R$. The condition requires that the left handed and the right handed Chern-Simons 5-forms with respect to the gauge group be equal to each other and it turns out in the local sense to be the usual perturbative anomaly-free condition. It is also constructed a gauge invariant effective action under the anomaly-free condition by means of a systematic method rather than the trial and error Noether method. In the non-abelian case, the gauge invariant effective action presented here contains less terms than the one obtained by Witten. The case of pure gauge is discussed in the present note as well.