第 8 卷 第 1 期　高能物理与核物理　Vol. 8, No. 1
1984 年 1 月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　Jan., 1984

放射性衰变曲线的分析（I）

二组份衰变曲线并介绍一个非经典的分析方法

冯锡璋　刘年庆　韩俊英
（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

本文提出了一个非经典的分析二组份衰变曲线的方法（“λ”法）. 用衰变曲线的表观衰变常数 $\lambda(t)$ 随时间 t 的变化关系式进行拟合，区别于用放射性总强度 $A(t)$ 随时间的变化关系式进行拟合的经典法（“A”法）. 在一般的情况下，两法所得结果相差不大. 在“λ”法中有三个未知量而在“A”法中有四个未知量，因此前者略简于后者.

二组份衰变曲线的分析，一般采用最小二乘拟合，得出两个组份的衰变常数 λ_1 与 λ_2，它们的寿期 τ_1 与 τ_2，和它们在起始时刻 t_0（设为零）时的各自的放射性强度 a_0 与 b_0。但是，当 λ_1 与 λ_2 之比值比较接近于 1 和 a_0 与 b_0 相差较大时，则难以取得准确结果. 我们在下面提出的简易方法将有助于解决这个问题。

一、原　　理

设 $\lambda(t)$，$\tau(t)$ 和 $A(t)$ 分别为在时刻 t 时总衰变曲线的表观衰变常数，表观寿期和放射性总强度，则

$$A(t)=a_0e^{-\lambda_1 t}+b_0e^{-\lambda_2 t}=a_0e^{-t/\tau_1}+b_0e^{-t/\tau_2}, \tag{1}$$

并且

$$\lambda(t)=-\left[\frac{dA(t)}{dt}\right]_\gamma\Big/A(t)=\frac{a_0\lambda_1e^{-\lambda_1 t}+b_0\lambda_2e^{-\lambda_2 t}}{a_0e^{-\lambda_1 t}+b_0e^{-\lambda_2 t}}. \tag{2}$$

设 $\lambda_1>\lambda_2$，$\lambda_1-\lambda_2=\gamma$，$\frac{b_0}{a_0}e^{\gamma t}=y$ 和 $y'=y^{-1}$，则

$$\lambda(t)=\frac{\lambda_1+\lambda_2 y}{1+y}=\frac{\lambda_2+\lambda_1 y'}{1+y'}. \tag{3}$$

另外，

$$\tau(t)=-A(t)\Big/\left[\frac{dA(t)}{dt}\right]=\frac{a_0e^{-t/\tau_1}+b_0e^{-t/\tau_2}}{\frac{a_0}{\tau_1}e^{-t/\tau_1}+\frac{b_0}{\tau_2}e^{-t/\tau_2}}. \tag{4}$$

本文 1982 年 6 月 4 日收到. 1983 年 8 月 15 日修改.

设 $\frac{b_0\tau_1}{a_0\tau_2}e^{\gamma t}=x=x'^{-1}$，则

$$\tau(t)=\frac{\tau_1+\tau_2 x}{1+x}=\frac{\tau_2+\tau_1 x'}{1+x'}. \tag{5}$$

若 $x\ll 0.1$，$\gamma t\ll 1$，则一次近似，

$$\tau(t)\cong(\tau_1+\alpha)+\alpha\gamma t+\frac{\alpha\gamma^2}{2}t^2, \tag{6}$$

若 $\frac{a_0\tau_2}{b_0\tau_1}\ll 0.1$，$\gamma t\ll 1$，则一次近似，

$$\tau(t)\cong(\tau_2-\alpha')+\alpha'\gamma t-\frac{\alpha'\gamma^2}{2}t^2, \tag{7}$$

这里，$\alpha=\frac{b_0\tau_1}{a_0\tau_2}(\tau_2-\tau_1)$，$\alpha'=\frac{a_0\tau_2}{b_0\tau_1}(\tau_2-\tau_1)$. 显然，可对 $\lambda(t)$ 作类似的近似. 但是，必须指出，用式(6)或(7)拟合，所得结果的准确度较差. 因此，必须直接用式(3)或(5)进行拟合，并以式(3)为更简.

在拟合 $A(t)$ 时(以后称"A"法即经典法)，有 a_0，b_0，λ_1 和 λ_2 四个未知量而在拟合 $\lambda(t)$ 时(以后称'λ'法即非经典法)则有 b_0/a_0，λ_1 和 λ_2 三个未知量，因此后者比前者略简.

二、模拟实验的处理

I. 第一个例子，设 $\tau_1=200.0$ 小时，$\tau_2=300.0$ 小时，在 $t=20$、60、100、140、180 和 220 小时对样品分别测量六次(实际上是计算)，得 $A(t)$ 的理论值. 用

$$\frac{A(t+\Delta t)}{A(t)}=e^{-\lambda\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\Delta t}=e^{-\frac{\Delta t}{\tau\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)}}$$

的近似式，得出在 $t=40$、80、120、160 和 200 小时的 $\lambda(t)$ 与 $\tau(t)$ 的理论值. 数值列于表 1，并由此计算得出 $\frac{b_0}{a_0}=0.07254$.

表 1 $A(t)$ 理论值和处理结果

t (小时)	$a_0e^{-\lambda_1 t}$ (衰变/分)	$b_0e^{-\lambda_2 t}$ (衰变/分)	$A(t)$ (衰变/分)	$\lambda(t)$ (小时)$^{-1}$	$\tau(t)$ 小时
20	16000.0	1200.0	17200.0		
40				4.880046×10^{-3}	204.91611
60	13099.7	1050.2	14149.9		
80				4.872484×10^{-3}	205.23413
100	10725.1	919.1	11644.2		
120				4.864177×10^{-3}	205.58461
140	8781.0	804.4	9585.4		
160				4.855670×10^{-3}	205.94479
180	7189.3	704.0	7893.3		
200				4.846843×10^{-3}	206.31987
220	5886.1	616.1	6502.2		

用 $\tau(t)=f+gt+ht^2$ 进行最小二乘拟合，得出 $f=204.607$ 小时，$g=0.007456$ 和 $h=5.58\times10^{-6}$ (小时)$^{-1}$. 根据式(6)，即一次近似，得出 $\tau_1=199.6$ 小时，$\tau_2=285$ 小时和 $b_0/a_0=0.0835$. 这与理论值相比有显著差别. 因此，用严格式

$$\lambda(t)=\frac{\lambda_1+\lambda_2 y}{1+y}$$

进行拟合，使

$$D=\sum_{i=1}^{5}\left[\lambda(t_i)-\frac{\lambda_1+\lambda_2\dfrac{b_0}{a_0}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t_i}}{1+\dfrac{b_0}{a_0}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t_i}}\right]^2 \tag{8}$$

达到最小，以得出 λ_1, λ_2 和 (b_0/a_0).

用一次近似值作为初值，经过逐次逼近法的多次计算，得出 $\lambda_1=5000\times10^{-3}$ (小时)$^{-1}$, $\lambda_2=3.333\times10^{-3}$ (小时)$^{-1}$ 和 $(b_0/a_0)=0.07256$. 这与理论值很好地符合. 在计算过程中，我们发现 $\lambda(t)$ 与 $s=\left[\dfrac{\lambda(t)-\lambda(t+\Delta t)}{\Delta t}\right]$ 值随 λ_1, λ_2 或 (b_0/a_0) 的变化而呈不同的变化. 当 λ_1 增加时，二者都增加；当 λ_2 增加时，前者增加而后者下降；当 (b_0/a_0) 增加时，前者下降而后者增加；并且在变化的程度上也有所不同. 因此，我们仅用袖珍计算器即可得出结果. 当然，若用大型计算机与适宜的计算程序，不仅计算时间可以缩短，结果的精确度也将提高.

II. 第二个例子是一个加上统计误差的模拟正电子湮没寿命谱. 统计误差是用随机数并根据高斯分布和两个组份在各道中的符合计数计算得出. 令 $\tau_1=240$ ps, $\tau_2=320$ ps, 每道相当于 40ps, 以 τ_1 和 τ_2 湮没的正电子数分别为 N_{10} 和 N_{20}, $(N_{10}+N_{20})=999373$ 和 N_{20}/N_{10} 的理论值为 0.11. 各道的符合计数和部分的处理结果列于表 2A 与表 2B.

表 2A 各道符合计数和处理结果

道数	符合计数	由 m 道和 n 道 ($m\to n$) 计算得出的表观寿期 (ps)	道数	符合计数	由 m 道和 n 道 ($m\to n$) 计算得出的表观寿期 (ps)
1	149920		17	11043	(16→17)238.6575
2	127282	(1 → 2)244.3543	18	9459	(17→18)258.3477
3	108311	(2 → 3)247.8340	19	8196	(18→19)279.0949
4	92058	(3 → 4)246.0208	20	6791	(19→20)212.7116
5	77730	(4 → 5)236.4380	21	5754	(20→21)241.3958
6	66286	(5 → 6)251.1576	22	5051	(21→22)306.9626
7	56188	(6 → 7)242.0201	23	4298	(22→23)247.7755
8	47987	(7 → 8)253.5287	24	3612	(23→24)230.0329
9	40513	(8 → 9)236.2569	25	3119	(24→25)272.5739
10	34758	(9 →10)261.0742	26	2688	(25→26)268.9708
11	29335	(10→11)235.8095	27	2312	(26→27)265.4554
12	25137	(11→12)258.9995	28	1972	(27→28)251.4700
13	21153	(12→13)231.8046	29	1730	(28→29)305.5141
14	18127	(13→14)259.1023	30	1345	(29→30)158.9021
15	15633	(14→15)270.2365	31	1216	(30→31)396.7182
16	13058	(15→16)222.2431	32	1013	(31→32)218.9974

表 2B 多道符合计数和处理结果

从m道到n道的总符合计数($\sum_m^n$)	由($\sum_m^n \to \sum_p^q$)计算得出的表观寿期(ps)与号数[M]	从[M]→[P]号表观寿期平均值[$\tau(t_i)$](ps)	$\lambda(t_i)$ $[\tau(t_i)]^{-1}$ $(ps)^{-1}$	t_i注 (ps)
($\sum_1^8$)725762				
($\sum_2^9$)616355	($\sum_1^8 \to \sum_2^9$)244.79948[1]	$\left\{\begin{matrix}[1]\to[4] \\ 245.21067\end{matrix}\right\}_{i=1}$	4.078126×10^{-3}	202.894
($\sum_3^{10}$)523831	($\sum_2^9 \to \sum_3^{10}$)245.92081[2]			
($\sum_4^{11}$)444855	($\sum_3^{10} \to \sum_4^{11}$)244.76699[3]	$\left\{\begin{matrix}[2]\to[5] \\ 245.67566\end{matrix}\right\}_{i=2}$	4.070407×10^{-3}	242.894
($\sum_5^{12}$)377934	($\sum_4^{11} \to \sum_5^{12}$)245.35541[4]	$\left\{\begin{matrix}[3]\to[6] \\ 245.78856\end{matrix}\right\}_{i=3}$	4.068538×10^{-3}	282.894
($\sum_6^{13}$)321357	($\sum_5^{12} \to \sum_6^{13}$)246.65943[5]			
($\sum_7^{14}$)273198	($\sum_6^{13} \to \sum_7^{14}$)246.37240[6]	$\left\{\begin{matrix}[4]\to[7] \\ 246.82777\end{matrix}\right\}_{i=4}$	4.051408×10^{-3}	322.894
($\sum_8^{15}$)232643	($\sum_7^{14} \to \sum_8^{15}$)248.92384[7]			
($\sum_9^{16}$)197714	($\sum_8^{15} \to \sum_9^{16}$)245.87612[8]	$\left\{\begin{matrix}[5]\to[8] \\ 246.95795\end{matrix}\right\}_{i=5}$	4.049272×10^{-3}	362.894

注：为了得出 t_i 首先计算 8 道平均计数率的相应的计数时刻，8 道的总时间为 320ps，表观寿期约为 246ps，该时刻(离起始)

$$T_m = 246\ln\left\{\frac{320/246}{1-\exp(-320/246)}\right\} = 142.894\text{ps},$$

则 $t_i = (T_m + 20 + 40i)$ps.

用大型计算机与适宜的计算程序直接对各道的符合计数进行拟合（即“A”法）[1]，得 $\tau_1 = 215.5$ ps，$\tau_2 = 267.0$ ps 和 $N_{20}/N_{10} = 1.65$。这与理论值的差别较大．用拟合 $\lambda(t)$ 的方法(即“λ”法)，任意和合理地选择初值（用一次近似得 $\tau_1 = 240.9$ps)，得 $\tau_1 = 236.1$ ps，$\tau_2 = 340$ ps，$b_0/a_0 = 0.106$ 和 $N_{20}/N_{10} = 0.153$．这与理论值比较相近．第一个例子的结果和详细的计算已证明用表 2B 中的处理方法可以得到较好的统计性而对 τ_1，τ_2，b_0/a_0 和 N_{20}/N_{10} 的影响则小到可忽略，并且倘有需要还可以对此作适当的校正．

III．第三个例子也是一个加上统计误差的模拟正电子湮没寿命谱．令 $\tau_1 = 320$ps，$\tau_2 = 500$ps，$(N_{10} + N_{20}) = 1000416$ 和 $N_{20}/N_{10} = 0.11$．用“A”法[1]得：$\tau_1 = 322.7$ps，$\tau_2 = 524.4$ps 和 $N_{20}/N_{10} = 0.0824$；用“λ”法得：$\tau_1 = 317.4$ ps，$\tau_2 = 518.7$ ps 和 $N_{20}/N_{10} = 0.1276$．与理论值相比，“λ”法的结果比“A”法的稍接近些，但相差不多．

作者对王淑英、赵珍兰、徐元彪、罗世华、郭应焕、黄忠祥、江泳、李景修、杨瑞英和孟昭兴等同志的协助表示感谢．

参　考　文　献

[1] 王淑英，高能物理与核物理，7(1983)408.

THE ANALYSIS OF RADIOACTIVE DECAY CURVES (I) TWO-COMPONENT DECAY CURVES——INTRODUCTION OF A NON-CLASSICAL METHOD OF ANALYSIS

FENG XI-ZHANG LIU NIAN-CHING HAN JUNG-YING

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In present paper, a non-classical method ("λ" method) of analyzing the two-component radioactive decay curve was developed. The use of the relationship between the apparent decay constant $\lambda(t)$ and the time t in fitting is to be distinguished from the use of the relationship between the total activity $A(t)$ and t in fitting by the classical method ("A" method). In "λ" method, there are three unknowns while in "A" method there are four, thus the former is simpler than the latter.