

关于 $SU(9)$ 大统一模型轻费米子质量等级问题的一个评注

东方晓 杜东生 薛丕友

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

按照文献[3]解决轻费米子质量等级问题的思想,我们对 $SU(9)$ 大统一模型作了系统分析. 结果是否定的,任何 $SU(9)$ 模型都不可能实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 的方案.

一、引 言

我们知道,已发现的轻费米子有三代: $u, d, e, \nu_e; c, s, \mu, \nu_\mu; t, b, \tau, \nu_\tau$. (t, ν_τ 还未肯定),各代质量相差很大,从十几倍到上百倍. 大统一理论,如 $SU(7)$ 、 $SU(8)$ ^[1] 等模型,虽能把三代轻费米子统一起来,但轻费米子的质量等级是手加进去的,很不自然. 近来不少作者^[2]研究这一问题. 最近文献[3]提出了一个很有趣的思想,试图解决这一问题. 其基本思想为,三代费米子质量可以通过树图、单圈图和双圈图的辐射修正给出,这种机制可简单地由 M_w 和 α 表示为:

$$\begin{aligned} \text{第一代费米子质量} &\propto O(\alpha^2 M_w) \\ \text{第二代费米子质量} &\propto O(\alpha M_w) \\ \text{第三代费米子质量} &\propto O(M_w) \end{aligned} \quad (1)$$

这里 α 是大统一点的耦合常数, M_w 是 W 中间玻色子的质量. 按照这种想法,第三代费米子可以通过像图 1(a), (b) 那样的树图得到质量;而第二代由于某种原因不能获得树图质量,它只能通过像图 2(a), (b), (c) 那样的单圈图获得质量;而第一代既不能获得树图质量,也不能获得单圈图质量,它只能通过双圈图修正获得质量. 为了实现这一思想[有些文献称这种方法为 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案],文献[3]假设大统一规范群是 $SU(N)$,费米子仍然和通常大统一^[4]模型一样,只填 $SU(N)$ 群的全反对称表示 $[n]$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$). 不过放宽限制,同一个表示可以重复使用,但必须保证消除 Adler 三角反常. 假定在某一质量标度 M_u ($M_u > 10^{15}$ GeV),由于某种原因(如动力学的) $SU(N)$ 破缺到 $SU(5)$,这使 $SU(5)$ 单态费米子获得质量 M_u ,与此同时,规范玻色子 \tilde{W}_A^2 ($A = 1, 2, \dots, 5$, $A = 6, 7, \dots, N$) 也获得大质量 M_u . 根据 Georgi^[5] 的存活假设, $10_L(5_L)$ 与 $10_L^*(5_L^*)$ 将结合成 $SU(5)$

的不变和 10_L 果认为须至少重要的不同 5^* 轻费米子量级的与通常 $(\alpha^2, \alpha,$

其中,了保证

由于 n 时必须 (i) (i) (i) $\neq n_2$ 对满足前中,故此,系

在以下六 1. 2.

的不变质量项, 而获得大质量 M_u . 经过上述自发破缺之后, 剩下的不配对的 5_L^* (或 5_L) 和 10_L (或 10_L^*) 得不到质量, 它们就是所谓的轻费米子. 像通常的 $SU(5)$ 大统一一样, 如果认为一个 5_L^* 和一个 10_L 便构成一代费米子, 那么要求理论至少容纳三代费米子, 就必须至少要有三个 5_L^* 和三个 10_L 存活下来.

要使上述 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案能够实现, 这些存活下来的 $5^*[n]$ 和 $10[n]$ 必须来自 $SU(N)$ 的不同表示. 为了以后讨论方便, 这里用 $5^*[n]$ 代表来自 $SU(N)$ 全反对称表示 $[n]$ 的 5^* 轻费米子, 而用 $5^*\{n\}$ 代表来自 $SU(N)$ 全反对称表示 $[n]$ 的 5^* 超重费米子 (具有 M_u 量级的质量). 这是因为如果三个 $5_L^*[n]$ 和三个 $10_L[n]$ 来自 $SU(N)$ 的同一个表示, 这就与通常的 $SU(5)$ 大统一模型重复填三次没有多大区别, 根据群的性质, 这是不可能实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案的. 因此, 三代轻费米子必须取如下形式:

$$\begin{aligned} \text{第一代费米子} & \quad 5_L^*[n_1], 10_L[n'_1] \\ \text{第二代费米子} & \quad 5_L^*[n_2], 10_L[n'_2] \\ \text{第三代费米子} & \quad 5_L^*[n_3], 10_L[n'_3] \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $n_1 \neq n_2 \neq n_3, n'_1 \neq n'_2 \neq n'_3$, 但是 n_i 与 n'_i ($i = 1, 2, 3$) 可以相等, 也可以不等. 为了保证第三代获得树图质量, 文献 [3] 给出 n_3 和 n'_3 必须满足

$$\begin{cases} n_3 = \frac{1}{2}(N+3) \\ n'_3 = \frac{1}{2}(N-1) \end{cases} \quad (3)$$

由于 n_3 和 n'_3 必须是整数, 要求 N 一定是奇数. 因此, 要实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案, 在构造模型时必须满足下述四个条件:

(i) 无 Adler 反常

(ii) 存活三代轻费米子

(iii) 要包含表示 $\left[\frac{N-1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{N+3}{2}\right]$

(iv) 若三代轻费米子填入 $5_L^*(n_i) + 10_L(n'_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 则要求 $n_1 \neq n_2 \neq n_3, n'_1 \neq n'_2 \neq n'_3$ 但 n_i 与 n'_i 可以相等也可不等

对 $SU(5)$, 满足前三个条件的表示为 $3[2]_L + 3[4]_L$, 但不满足条件 (iv). 对 $SU(7)$, 满足前三个条件的唯一解是 $4[3]_L + [5]_L + 5[6]_L$, 但因所有存活的三个 10_L 都在 $[3]_L$ 中, 故也被条件 (iv) 所排除. 故有可能实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案的 $SU(N)$ 群必有 $N \geq 9$. 因此, 系统地讨论 $SU(9)$ 的情形是有意义的.

二、 $SU(9)$ 模型

在 $SU(9)$ 规范群下, 可以容纳三代轻费米子, 而又无 Adler 三角反常的填充方式共有以下六种:

$$1. 5[6] + 9[4]$$

$$2. 3[4] + [6] + 6[8]$$

模
方

ν_e 还未
等模型,
近来不
问题. 其
5种机制

(1) 不
三代费
得树图
得树图
思想[有
费米子仍
1). 不
在某一
5), 这使
i, 7, ...
SU(5)

$$\begin{aligned}
 & 3. 4[4] + [6] + 2[7] + [8] \\
 & 4. 5[4] + 2[6] + [7] + 2[8] \\
 & 5. 2[2] + 2[4] + [6] + 11[8] \\
 & 6. 2[2] + 4[4] + 2[6] + 7[8] \tag{4}
 \end{aligned}$$

在这六种可能填法中,前四种虽然可以存活三代轻费米子,但是他们不能满足条件(iv). 换句话说,它们至少有两个 10_L (或 5_L^*) 来自 $SU(9)$ 的同一个表示,因此不能实现文献[3]的 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案. 最后两种情况,其中第五种情况就是文献[3]中所举的例子,是可以满足条件(iv)的,它们可以存活三代轻费米子如下:

$$\begin{aligned}
 & 5_L^*[4], 5_L^*[6], 5_L^*[8] \\
 & 10_L[2] \quad 10_L[4] \quad 10_L[6] \tag{5}
 \end{aligned}$$

按照文献[3]的 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案, (5) 式中的 $5_L^*[6]$ 和 $10_L[4]$ 应该填充第三代轻费米子(即(3)式的结果). 这样三代轻费米子可有下面两种可能的填法:

$$\begin{aligned}
 & \text{第三代} \quad 5_L^*[6] \quad 10_L[4] \\
 & \text{第二代} \quad 5_L^*[4] \quad 10_L[6] \\
 & \text{第一代} \quad 5_L^*[8] \quad 10_L[2] \tag{6}
 \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
 & \text{第三代} \quad 5_L^*[6] \quad 10_L[4] \\
 & \text{第二代} \quad 5_L^*[4] \quad 10_L[2] \\
 & \text{第一代} \quad 5_L^*[8] \quad 10_L[6] \tag{7}
 \end{aligned}$$

以及

为了分析(6), (7)两种填法的树图情况,我们必须研究 $SU(9)$ 模型中,有哪些费米子与 Higgs 场 φ^α 的 Yukawa 耦合,这里 φ^α 属于 $SU(9)$ 基础表示,真空期望值可取

$$\langle \varphi^2 \rangle \neq 0 \tag{8}$$

相应 $[2]_L, [4]_L, [6]_L, [8]_L$. 表示的费米子场可表为,

$$\psi_L^{ij}, \psi_L^{ijkl}, \psi_L^{ijklmn}, \psi_L^{ijklabcd} \tag{9}$$

上面四种波函数与 φ^α 的 Yukawa $SU(9)$ 不变耦合有以下两类:

$$\tilde{\psi}_L^{ijkl} C^{-1} \psi_L^{abcd} \varphi^\alpha \epsilon_{ijklabcd\alpha} + hc \tag{10a}$$

$$\tilde{\psi}_L^{ij} C^{-1} \psi_L^{klabcd} \varphi^\alpha \epsilon_{ijklabcd\alpha} + hc \tag{10b}$$

$$\tilde{\psi}_L^{ijkl} C^{-1} \psi_L^{abcd\alpha} \varphi_\alpha^+ \epsilon_{ijklabcde} + hc \tag{10c}$$

$$\tilde{\psi}_L^{ij} C^{-1} \psi_L^{klabcde\alpha} \varphi_\alpha^+ \epsilon_{ijklabcde} + hc \tag{10d}$$

其中, C 是电荷共轭算符,“ \sim ”表示转置算符,(10a), (10b) 是第一类耦合,满足 $P + q = N - 1 = 9 - 1 = 8$ 条件,给出 up-quark 树图质量; (10c), (10d) 是第二类耦合,满足 $P + q = N + 1 = 9 + 1 = 10$ 条件,给出 down-quark 质量. 当把 $SU(9)$ 按 $SU(5)$ 分解时,不难写出(10)式的全部耦合.(如图1)

$$10_L[4] - 10'_L[4] - \varphi^\alpha \tag{11a}$$

$$10_L[2] - 10_L[6] - \varphi^\alpha \tag{11b}$$

$$5_L[4] - 10_L^*[4] - \varphi^\alpha \tag{11c}$$

$$5_L[2] - 10_L^*[6] - \varphi^\alpha \tag{11d}$$

$$1_L[4] - 5_L^*[4] - \varphi^\alpha \tag{11e}$$

$$1_L[2] - 5_L^*[6] - \varphi^\alpha \tag{11f}$$

有了以

从

$10_L[4]$

$10_L[2]$ -

$N > 5$

$10_L[4]$

(11)式

(以

树图)

down-qu

一、二代

不可能

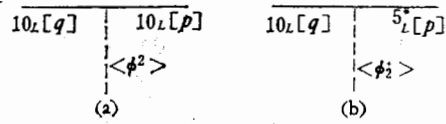
再

(12a)可

quark 的

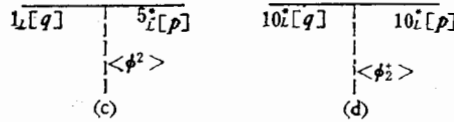
(4)

足条件
能实现
举的例



(5)

费米子



(6)

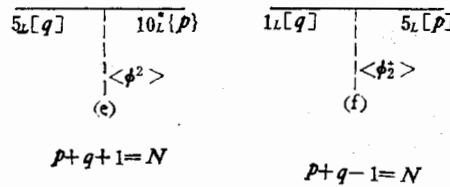


图 1 树图

以及

(7)

米子与

$$10_L[4] - 5_L^*[6] - \varphi_a^+ \quad (12a)$$

$$10_L[6] - 5_L^*[4] - \varphi_a^+ \quad (12b)$$

$$10_L[2] - 5_L^*[8] - \varphi_a^+ \quad (12c)$$

(8)

$$10_L^*[4] - 10_L^*[6] - \varphi_a^+ \quad (12d)$$

$$1_L[8] - 5_L[2] - \varphi_a^+ \quad (12e)$$

(9)

$$1_L[6] - 5_L[4] - \varphi_a^+ \quad (12f)$$

有了以上的准备,现在我们来分析 (6), (7) 两种填法,看能否实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案.

(10a)

(10b)

(10c)

(10d)

$q =$

, 满足

(5) 分

从 (11) 式看出, 只有 (11a) 和 (11b) 可能给出 up-quark 树图质量. 但 (11a) 中的 $10_L[4]$ 和 $10_L^*[4]$, 必须属于 $SU(9)$ 表示 [4] 中的两个不同的 10 重态, 而 $SU(5)$ 中^[5] $10_L[2] - 10_L[2] - \varphi_a^+$ 可以自耦合给出 up-quark 树图质量是仅有的一个特例. 在所有 $N > 5$ 的 $SU(N)$ 模型中都不可能 $10_L[P] - 10_L[P] - \varphi_a^+$ 这种自耦合. 因此 (6) 式中 $10_L[4]$ 必须是表示 [4] 中几个不同的 10 的线性组合, 这样才可能使第三代 up-quark 按 (11) 式获得树图质量.

(12) 式的 a, b, c 三式可以给出 down-quark 树图质量. (12a) 给第三代 down-quark 以树图质量, 但对于 (6) 式填充方案, (12b), (12c) 也可以分别给第二代和第一代的 down-quark 以树图质量. 所以 (6) 式的填充方案中第三代 up-quark 可有树图质量, 第一、二代 up-quark 得不到树图质量, 但所有三代的 down-quark 都得到了树图质量, 因而不可能实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案.

再看 (7) 式的填充方案. 与 (6) 式一样, 第三代的 up-quark 可能得到树图质量. (12a) 可给出第三代 down-quark 以树图质量, 但 (12b), (12c) 又给出第一、二两代 down-quark 的树图质量混合, 因而全部三代也同时获得 down-quark 树图质量. 因而也不可能

(11a)

(11b)

(11c)

(11d)

(11e)

(11f)

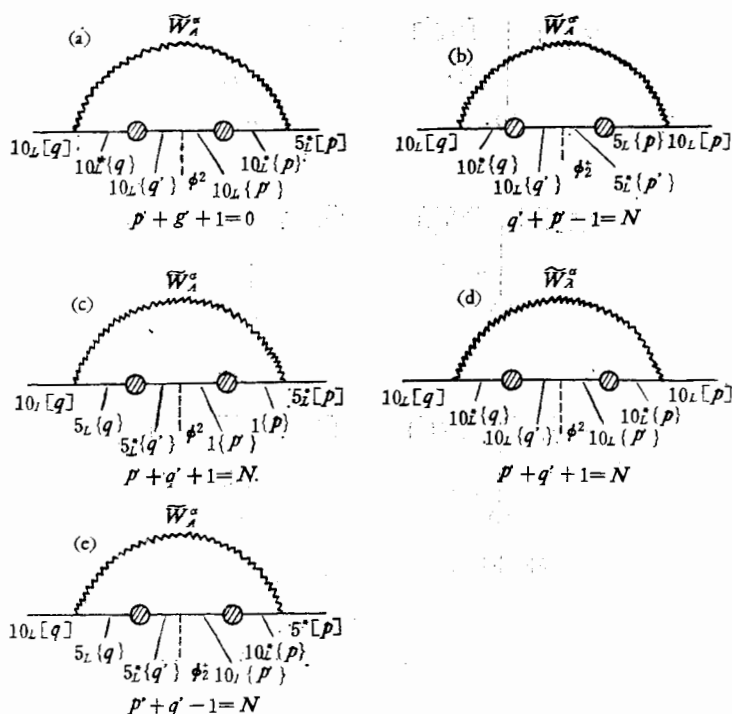


图2 单圈图

这种超
费米子

其中，
的相互
(5)式
子(5L
引起轻
down-q
单圈图
量修正
量混合
似下，
换一下
从
三代 d

实现 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案。这里还没考虑轻费米子与超重费米子的树图混合。考虑到与超重费米子的树图混合,给 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案带来更大困难。

以上讨论了树图质量情况。下面再看看单圈辐射修正把第一与第二代分开。

单圈图是费米子放出一个超重规范玻色子 \tilde{W}_λ^α , 然后再吸收一个超重玻色子的过程。

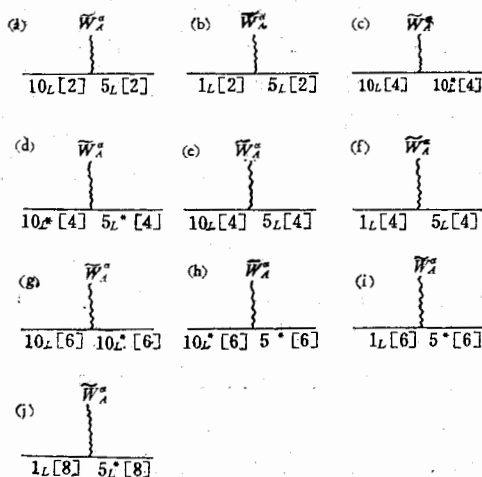


图3 $SU(9)$ 的 W 玻色子-费米子耦合顶角
(这里的 $5_L, 10_L$ 可以代表轻费米子,也可代表重费米子)

这种超重玻色子可以改变 $SU(5)$ 指标 ($\alpha = 1, 2 \dots 5$) 到非 $SU(5)$ 指标 ($A = 6, 7 \dots N$). 费米子与超重规范玻色子的相互作用, 来源于协变微分项,

$$\bar{\psi}_L \gamma_\mu D_\mu \psi_L \quad (13)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \tilde{W}_\mu^\alpha \lambda_\alpha$$

其中, λ_α 是 $SU(9)$ 群生成元, ψ_L 代表 (9) 式费米子波函数. 从 (13) 式不难写出 $\tilde{W}_\mu^\alpha - \psi_L$ 的相互作用顶角, 如图 3 所示. 利用图 1 的 $\psi_L - \varphi^\alpha$ 顶角及图 3 的 $\psi_L - \tilde{W}_\mu^\alpha$ 顶角, 就可以把 (5) 式三代轻费米子的单圈图全部写出来, 如图 4、5 所示. 这里没有包括一端是轻费米子 ($5_L^*[P], 10_L[P]$) 外线, 一端是超重费米子 ($5_L^*\{P\}, 10_L\{P\}$) 外线的单圈图, 这种图可以引起轻费米子与超重费米子的质量混合. 图 4 是 $SU(9)$ 模型 up-quark 单圈图. 图 5 是 down-quark 单圈图. 从图 4 不难看出, 如果取 (6) 式的填法, (c) 和 (d) 给第三代 up-quark 单圈图质量, (g) 给第二代 up-quark 以单圈图质量, 唯有第一代 up-quark 没有单圈图质量修正. 但是 (a) 和 (b) 分别是第一代与第三代和第一代与第二代的 up-quark 单圈图质量混合, 而 (e) 和 (f) 是第二代和第三代单圈图 up-quark 质量混合. 所以, 在单圈图近似下, up-quark 质量等级也分不开. 假若取 (7) 式的填法, 和上面分析一样, 只是一二交换一下位置而已.

从图 5 看到, down-quark 单圈图更为复杂. 以 (7) 式填法为例, (b), (c), (d) 给第三代 down-quark 单圈图质量. (h) 给第二代, 只有第一代没有单圈图 down-quark 质量.

重
程.

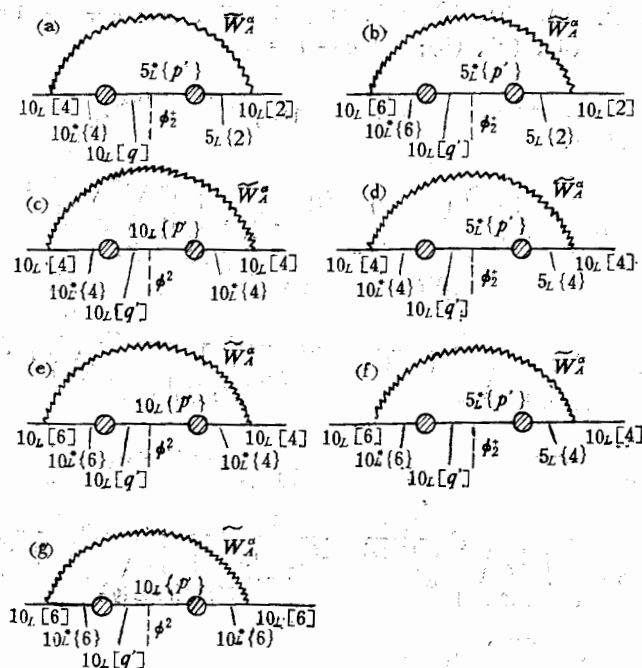


图 4 $SU(9)$ up-quark 单圈图

对于: 图 (a)、(b)、(d)、(f): $q' + p' - 1 = N$
图 (c)、(e)、(g): $q' + p' + 1 = N$

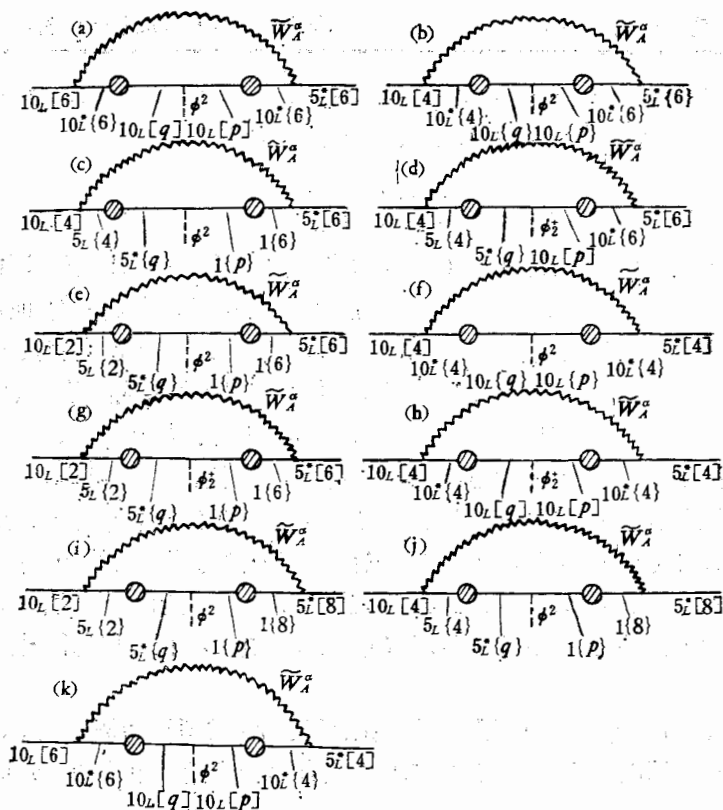


图 5 down-quark $SU(9)$ 中单圈图

对于: (a)、(b)、(c)、(e)、(f)、(i)、(j)、(k): $q + p + 1 = N$
 (d)、(g)、(h): $p + q - 1 = N$

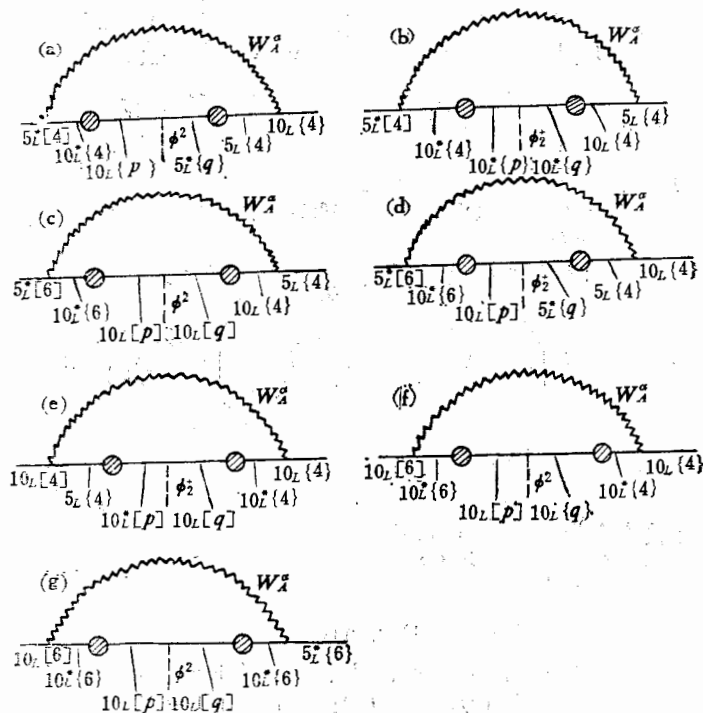


图 6 轻费米子与超重费米子单圈图

可是 (i)、(f)、(g) 圈图质量第一代也此外也破坏 (3) 的 (c) 类化

即使文献 [

附注: [5]+[7]+值。这里没

- [1] Du Du Tun
- [2] L. J. D.
- [3] S. M.
- [4] H.
- [5] H. Bar

C

Acco problem, elusion is

可是 (i), (k) 给第一、二代混合的 down-quark 单圈图质量, (a), (j) 给第一、三代混合, (c), (f), (g) 给第二、三代混合. 从上面分析看到, 虽然第二代有单圈图质量, 第一代没有单圈图质量, 但是由于第一代和第二代, 第一代和第三代之间有单圈图质量混合, 这就使得第一代也获得了单圈图质量. 这正是 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案所不希望的.

此外, 轻费米子和超重费米子之间也通过单圈图有质量混合, 如图 6 所示. 这种混合也破坏 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案. 以上我们看到, 单圈修正下 (6), (7) 两种填充也不能实现文献 [3] 的 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案.

类似地可以对 (4) 式给出的第 6 种情况进行讨论, 结果也是否定的.

三、结 论

即使允许重复使用某些不可约表示, $SU(5)$, $SU(7)$, $SU(9)$ 的任何模型都不可能实现文献 [3] 中的轻费米子质量等级的 $(\alpha^2, \alpha, 1)$ 方案.

附注: 本文只系统讨论了 $SU(9)$ 的情形. 对于 $SU(11)$ 群, 有些表示可以实现只有第三代有树图质量. 如 [4] + [5] + [7] + 2[9] 和 [2] + 6[5] + 3[7] + [9]. 但对单圈辐射修正极其复杂, 而群的秩太高, 实际上已失去了实用的价值. 这里没有详细讨论.

参 考 文 献

- [1] Du dongsheng, Ma Zhongqi, Xue Peiyou and Yue Zhongwu, *Scientia Sinica*, **26**(1981), 1358; Du Dongsheng, Ma Zhongqi, Xue Peiyou and Yue Zhongwu, *ibid.*, **26**(1981), 1366; Zhonggi Ma, Tung-sheng Tu, Pei-you Xue and Xian-jian Zhou, *Phys. Lett.*, **100B**(1981), 399.
- [2] L. E. Ibanez, Preprint of University of Oxford, Ref., 25/81; L. E. Ibanez, *ibid* Ref., 40/81; D. Wyler, *Phys. Lett.*, **105B**(1981), 426; C. H. Llewellyn et al., *Phys. Lett.*, **105B**(1981), 31.
- [3] S. M. Barr, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 1424.
- [4] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.
- [5] H. Georgi, *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 126; R. Barbieri et al., *Phys. Lett.*, **91B**(1980), 369; R. Barbieri et al., *ibid.*, **90B**(1980), 91.

COMMENT ON LIGHT-FERMION MASS HIERARCHY PROBLEM IN $SU(9)$ GRAND UNIFIED MODELS

DONG FANG-XIAO TU TUNG-SHENG XUE PEI-YOU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

According to the idea of reference [3] for solving light-fermion mass hierarchy problem, all possible $SU(9)$ grand unified models are systematically examined. The conclusion is negative, there is no hope to realize $(\alpha^2, \alpha, 1)$ pattern in $SU(9)$ models.