第6卷 第5期　高能物理与核物理　Vol. 6, No. 5
1982年9月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　Sept., 1982

研究简报

放射性绝对测量和半衰期(III)

放射性绝对测量中的衰变常数和统计性

冯锡璋 赵珍兰 郭应焕 罗世华
徐元彪 杨瑞英 黄忠祥 江 泳
(中国科学院高能物理研究所)

摘　要

本文从理论上探索了在放射性绝对测量中，降低由衰变常数的不准确性和测量统计性所引入的误差. 发现以寿期为中心的前后对称测量法可以达到这样的要求，即使衰变常数的误差达到 ±10%，由零时和两个寿期时测量的结果，分别计算得出的在零时的放射性原子数的平均值由衰变常数的不准确性引入的误差仍小于 0.1%.

用 ^{99m}Tc 衰变的实验数据，在测量统计性范围内证实了以上论点. 故，用以寿期为中心的前后对称测量法，将测量时间尽量提前，既可减少由衰变常数的不准确性所引入的误差，又可有较好的测量统计性，使绝对测量的结果更准确.

引　言

1. 在测量 t_0 时某样品中某一放射性同位素的原子数 N_0 时，为了减少由于其衰变常数 $(\lambda+\Delta\lambda)$ 的不准确性所引入的误差，采用在 t_0 后约一个寿期 $(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 的时刻进行一次或多次测量，并由此推算到 t_0 的方法[1,2]. 这里设 λ 为衰变常数的真值，$\Delta\lambda$ 为其实验误差，因此 $(\lambda+\Delta\lambda)$ 为衰变常数的实验值.

2. 但是由于放射性测量的统计性，要求测量时间尽量提前以降低统计误差.

3. 为了同时满足以上两个要求，提出以 $t_0+(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为中心的前后对称测量法.

理 论 根 据

4. 设 t_c 为测量时刻，当 $t_c-t_0=(1-a)(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$，$0\leqslant a\leqslant 1$，$|\Delta\lambda|\ll\lambda$ $\left(如\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\cong\pm 0.04\right)$，则由衰变常数的不准确性所引起的相对误差为.

本文 1981 年 5 月 3 日收到.

$$D_{-a}=\frac{\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}\exp[\Delta\lambda(1-a)(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}]-1$$
$$=(1-X)\exp[(1-a)X]-1 \qquad (1)$$

这里 $X=\Delta\lambda(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$，当 $t_c-t_0=(1+a)(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$，则相对误差为，

$$D_a=(1-X)\exp[(1+a)X]-1 \qquad (2)$$

两次的 t_c 以 $t_0+(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为中心相互对称，其测量值的平均值由衰变常数的不准确性引起的相对误差为，$D_{\pm a}=\frac{1}{2}(D_{-a}+D_a)=(1-X)(\exp X)\cos h(aX)-1$

$$\cong-\frac{1}{2}(1-a^2)X^2-\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{24}(3+6a^2-a^4)X^4-OX^5 \qquad (3)$$

因此当 a 从 0 增到 1 时，$D_{\pm a}$ 的绝对值逐渐下降，即平均值由衰变常数的不准确性引起的相对误差越来越小。

5. 用文献[1]中表 1 中的数据可以证实这一点．例如当 $X=0.04$ 或 -0.04 时，a 和 $D_{\pm a}$ 之间的关系见下表 1.

表 1. a 与 $D_{\pm a}$ 之间的关系

X	a	(t_c-t_0) 前	$(\lambda+\Delta\lambda)$ 后	$D_{\pm a}$
0.04	0.00	1.00	1.00	−0.000822
0.04	0.01	0.99	1.01	−0.000822
0.04	0.02	0.98	1.02	−0.000822
0.04	0.03	0.97	1.03	−0.000821
0.04	0.05	0.95	1.05	−0.000820
0.04	0.10	0.90	1.10	−0.000814
0.04	0.50	0.50	1.50	−0.000622
0.04	1.00	0.00	2.00	-0.000022_2
−0.04	0.00	1.00	1.00	−0.000779
−0.04	0.01	0.99	1.01	−0.000779
−0.04	0.05	0.95	1.05	−0.000777
−0.04	0.10	0.90	1.10	−0.000771
−0.04	0.50	0.50	1.50	−0.000580
−0.04	1.00	0.00	2.00	$+0.000020_5$

从表 1 中可清楚看到，当 $X=0.04$，a 由 0 增加到 1，$D_{\pm a}$ 的绝对值由+0.000822 下降到 0.000022_2；当 $X=-0.04$，a 由 0 增加到 1，$D_{\pm a}$ 的绝对值由 0.000779 下降到 0.000020_5．从式(3)中，还可以看到，即使 X 达到±0.10，$D_{\pm 1}$ 的绝对值将为 0.0004 左右．

6. 从文献[1]的表 1 中还可以看到，当 X 分别为 0.04 和 −0.04 时，若在 $(t_c-t_0)\cdot(\lambda+\Delta\lambda)=T$ 为 0.00，0.50，0.90，0.95，0.99，1.00，1.01，1.05，1.10，1.50 和 2.00 时作 11 次测量，则这些测量值的平均值由衰变常数的不准确性引起的相对误差分别为 −0.00064 和 −0.00060，其绝对值分别小于各自的 $D_{\pm 0}$ 的绝对值 0.000822 和 0.000779.

7. 因此从理论得出结论：即以 $t_0+(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为中心的前后对称测量法，既可以大大降低由衰变常数的不准确性引起的相对误差，还可在尽可能早的时刻开始作一次或

多次对称测量,以得到较好的测量统计性.

实验证明

8. 用 $4\pi r$ 井式电离室对 ^{99m}Tc 样品进行放射性衰变测量,以最小二乘法和非经典法[3]分析数据,得衰变常数的最可几实验值 λ_s 为 0.0019230_8 分$^{-1}$,相应的寿期 $\tau_s=(\lambda_s)^{-1}$ 为 520.0_0 分和相应的半衰期 $(T_{\frac{1}{2}})_s=(\ln 2)\tau_s$ 为 6.007_3 小时. 这里 λ_s 接近于 λ(真值). 用 $X_s=\left(1-\dfrac{\lambda_s}{\lambda+\Delta\lambda}\right)$ 表示衰变常数的相对误差,它接近于 X.

9. 通过下式,

$$kN_0'=\frac{A_C}{(\lambda+\Delta\lambda)}\exp[(\lambda+\Delta\lambda)(t_c-t_0)] \tag{4}$$

计算得出一系列 kN_0' 值,其误差包括来自衰变常数的不准确性,统计涨落,测量条件的细微差别和仪器的不稳定性等因素. 数据列于表 3 中. 这里 k 为探测器的探测效率; A_c 为在 t_c 时测到的放射性强度,以微微安培表示,列于表 2; N_0' 为在 t_0 时样品中放射性原子数的实验值.

表 2. ^{99m}Tc 的 γ 衰变测量数据

t_c-t_0 (分)	A_c (微微安培)	t_c-t_0 (分)	A_c (微微安培)	t_c-t_0 (分)	A_c (微微安培)
0.0	17.094	481.0	6.7895	800.8	3.6675
60.3	15.206	501.2	6.5344	860.8	3.2630
121.9	13.539	520.6	6.2903	920.9	2.9116
180.2	12.091	540.7	6.0503	981.0	2.5955
240.2	10.760	561.6	5.8137	1041.1	2.3111
360.6	8.5829	580.6	5.5993	1101.0	2.0502
420.5	7.6167	600.7	5.3851	1161.5	1.8316
440.9	7.3353	620.5	5.1908		
460.5	7.0579	680.7	4.6228		

10. 用式(4)计算中,令 $X_s=0$ 或很接近于零,得一系列 kN_0' 称为 kN_{0s},其平均值为 $\overline{kN_{0s}}$,此值接近于 kN_0(N_0 为真值). 次令 $X_s\cong 0.04$ 和 -0.04,各得一组 kN_0'. 前组以 $t_c-t_0\cong(1.04\lambda_s)^{-1}$ 为中心对称地取 0, 2, 4, ……, $2n$, ……点(a 值由小到大),加上中心点后分别为 1, 3, 5, ……, $2n+1$, ……点,并分别取平均值 $\overline{kN_0'}$,再将它们与 $\overline{kN_{0s}}$ 进行比较,得出相对误差 D. 后组则以 $t_c-t_0=(0.96\lambda_s)^{-1}$ 为中心,进行与前组相同的计算. 结果列于表 4. 从表 4 中可以看到,用 $4\pi r$ 井式电离室进行测定,当衰变常数的误差达到约 ±4% 时,$\overline{kN_0'}$ 的相对误差均小于 0.1%,与理论预测相当一致.

11. 再令 $(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为 460.45 分和 580.75 分,用对它们接近于前后对称测量的 t_c-t_0 分别计算 $D_{\pm a}$ 的"理论"值. 这里用的 $\tau_s=520.0$ 分,X_s 分别为 0.11452 和 -0.11683,a 为接近于对称的前后差的平均值,

表 3. 在 t_0 时的 kN_0' 值

kN_0'（微微库仑） \ $(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$（分） $(t_c - t_0)$（分）	460.4_5	500.5_5	520.0_0	540.5_0	580.7_5
0.00	472255.937	513384.102	533332.812	554358.420	595640.437
60.30	478876.437	515148.058	532759.250	551332.114	587826.000
121.90	487411.625	518740.263	534010.437	550149.602	581950.312
180.20	494037.344	520485.561	533477.937	547268.915	574591.562
240.20	500843.125	522175.883	532816.375	544203.254	566993.812
360.60	518900.656	529787.605	535741.312	542406.548	556464.187
420.50	524462.500	529914.620	533476.500	537758.984	547474.875
440.90	527966.812	531565.366	534323.250	537811.652	546098.062
460.50	530091.562	531887.684	533864.812	536582.528	543482.312
481.00	533149.125	533050.966	534213.562	536130.695	541599.187
501.20	536128.750	534149.562	534507.000	535635.556	539699.250
520.60	538310.437	534515.901	534098.625	534469.637	537186.625
540.70	540874.687	535187.098	533966.750	533554.812	534886.750
561.60	543857.500	536185.303	534127.875	532902.803	532803.312
580.60	545867.062	536390.505	533574.250	531613.156	530220.437
600.70	548409.812	537007.773	533386.562	530647.604	527895.187
620.50	551850.062	538518.045	534095.875	530586.421	526495.937
680.70	560108.562	540882.175	534032.750	528199.449	520096.937
800.80	576786.375	545469.659	533750.437	523315.886	507413.562
860.80	584593.062	547111.224	532961.812	520260.883	500585.250
920.90	594366.750	550471.829	533832.812	518831.653	495377.781
981.00	603711.937	553310.942	534181.562	516899.891	489744.437
1041.10	612510.500	555535.479	533926.000	514392.702	483627.656
1101.00	618854.500	555469.992	531478.812	509802.831	475644.875
1161.50	630501.625	559998.546	533394.812	509387.994	471585.187

$$D_{\pm a}(\text{“理论”值}) \cong -\frac{1}{2}(1-a^2)X_s^2 - \frac{1}{3}X_s^3 - \frac{1}{24}(3+6a^2-a^4)X_s^4 \tag{5}$$

理论上带有引号是由于用 X_s 代替 X. 用接近于前后对称的两个测量的 $t_c - t_0$，A_c 和 $(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 计算得出的两个 kN_0' 的平均值(当 $a \cong 0$ 时，则取唯一的 kN_0') 与 $\overline{kN_{0s}}$ 比较，得出相对误差，即 $D_{\pm a}$ 的实验值. 数据列于表 5. 从表 5 中可以看到“理论”值与实验值相当一致，并且当衰变常数的误差即使达到 $\pm 11\%$ 时，若 $a = 1$，则前后对称的两次

表4. 一次和多次对称测量的相对误差

(1) $(\lambda+\triangle\lambda)^{-1}=500.5$，分，$X_s=0.037403$，$\overline{kN_{0s}}=533733.375$ 微微库仑*

t_c-t_0 (分) 前	后	kN'_0 (微微库仑)	$2n+1$	$(\overline{kN'_0})_{2n+1}$ (微微库仑)	D
501.2	501.2	534149.562	1	534149.562	0.0007804_7
481.0	520.6	前 533050.966 后 534515.901	3	533905.477	0.0003231_5
460.5	540.7	前 531887.684 后 535187.098	5	533758.242	0.0000472_9
440.9	561.6	前 531565.366 后 536185.303	7	533791.697	0.0001099_7
420.5	580.6	前 529914.620 后 536390.505	9	533649.667	-0.0001561_3

(2) $(\lambda+\triangle\lambda)^{-1}=540.50$ 分，$X_s=-0.039423_1$

t_e-t_c (分) 前	后	kN'_0 (微微库仑)	$2n+1$	$(\overline{kN'_0})_{2n+1}$ (微微库仑)	D
540.7	540.7	533554.812	1	533554.812	-0.0003338_9
520.6	561.6	前 534469.637 后 532902.803	3	533642.418	-0.0001697_2
501.2	580.6	前 535635.556 后 531613.156	5	533635.193	-0.0001832_5
481.0	600.7	前 536130.695 后 530647.604	7	533564.895	-0.0003149_6
460.5	620.5	前 536582.528 后 530586.421	9	533569.246	-0.0003068_1

* 一个微微库仑相当于 $6.2415\times10^6 k^{-1}$ 个放射性原子，k 为探测器的探测效率。

表5. 当 $X_s\cong\pm11\%$ 时，$D_{\pm a}$ 的"理论"值和实验值与 a 的关系

($\tau_s=520.0$ 分)

X_s	$(\lambda+\triangle\lambda)^{-1}$	a	(t_c-t_0) 分 前	后	$D_{\pm a}$ "理论"值	实验值
0.11452	460.45 分	1.00000	0.0	920.9	−0.000558	−0.000791
		0.86926	60.3	860.8	−0.002153	−0.003745
		0.73721	121.9	800.8	−0.003537	−0.003062
		0.47834	240.2	680.7	−0.005589	−0.006103
		0.21827	360.6	561.6	−0.006769	−0.004411
		0.08763	420.5	501.2	−0.007030	−0.006441
		0.04354	440.9	481.0	−0.007067	−0.005949
		0.00000	460.5	460.5	−0.007080	−0.006823
−0.11683	580.75 分	1.00000	0.0	1161.5	0.000469	−0.000226
		0.89600	60.3	1101.0	−0.000870	−0.003743
		0.79139	121.9	1041.1	−0.002068	−0.001769

续表 5

X_t	$(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$	a	(t_c-t_0)分 前	后	$D_{\pm a}$ "理论"值	实验值
		0.68945	180.2	981.0	−0.003093	−0.002933
		0.58605	240.2	920.9	−0.003987	−0.004773
		0.37899	360.6	800.8	−0.005342	−0.003362
		0.17193	481.0	680.7	−0.006116	−0.005406
		0.06870	540.7	620.5	−0.006284	−0.005699
		0.03366	561.6	600.7	−0.006308	−0.006340
		0.00000	580.6	580.6	−0.006316	−0.006582

测量的 $\lambda N_0'$ 的平均值的误差仍可小到 ±0.1%。因此，以 $t_0+(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为中心的前后对称测量法的优点已充分得到显示。

结　　论

12. 从以上结果可以明显看到，以 $t_0+(\lambda+\Delta\lambda)^{-1}$ 为中心的前后对称测量法，将测量时间尽量提前，既可以减少由于衰变常数的不准确性所引入的误差，又可以降低统计误差，使绝对测量的结果更加准确。

参　考　文　献

[1] 冯锡璋、赵珍兰、汤乃勋，高能物理与核物理，6(1980)，771.
[2] 冯锡璋等，高能物理与核物理，6(1981)，754.
[3] 冯锡璋等，高能物理与核物理，1(1982)，111.

MEASUREMENTS OF NUMBER OF RADIOACTIVE ATOMS AND HALF-LIFE (III)

Feng Xi-zhang Zhao Zhen-lan Guo Ying-huan Lo Shi-hua Xu Yuan-biao
Yang Rui-ying Huang Zhong-xiang Jiang Yong

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

The present paper examines theoretically the way of reducing the errors introduced by the inaccuracy of the decay constant and measuring statistics in the determination of the number of the radioactive atoms. It was discovered that the "front-back symmetrical measurements with life-time as center" (FBSLC) may fulfil this reguirement. Even if the error of the decay constant reaches ±10%, the error introdnced by the inaccuracy of decay constant of the number of the radioactive atoms at zero time calculated from the radioactivities measured at zero time and two life-times by taking average will still be smaller than 0.1%. Experimental data of ^{99m}Tc radioactive decay within measuring statistics verified the above theoretical prediction.

Therefore, by FBSLC with measuring time as early as possible, it is possible to reduce the errors introduced by inaccuracy of the decay constant and measuring statistics, so that the results of the absolute measurements may be more accurate.