第6卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 4
1982年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1982

# 在对力、四极对力及四极力下相互作用玻色子模型的 Dyson 表示

杨泽森 刘庸 田晓岑
(北京大学物理系)

**摘要**

针对具有同类价核子的偶偶核，在对力、四极对力及四极力下，依据以玻色子展开和 Jancovici-Schiff 代换为基础的微观途径，给出了描写 IBM 玻色子的本征方程组并求出 IBM 哈密顿量相互作用项中各系数的表达式.

## 一、引言

相互作用玻色子模型 (IBM) 微观基础的探讨，已经成为核结构理论研究的有趣课题之一，我们正在沿着以玻色子展开与 Jancovici-Schiff 代换为基础的途径进行工作. 在文献 [1] 中，按照这种途径给出了 IBM 玻色子的微观定义，推导出 IBM 哈密顿量的一般形式，其中包含着求出用以研究 IBM 成立条件的耦合项的方法. 同时还阐明了根据 Jancovici-Schiff 代换把玻色子描述当作求解费米子体系薛定谔方程的中间步骤的观点.

为了便于应用文献 [1] 中的方法来计算原子核的集体能谱，本文将在给定的相互作用形式下，给出描述单玻色子的本征方程组以及求出 IBM 哈密顿量相互作用项中各系数的微观表达式. 针对只考虑 $s$, $d$ 玻色子的情形，我们把核子-核子相互作用选为对力、四极对力和四极力.

本文与文献[1]一样，都假定满壳层外只有一类价核子. 对于包含两类价核子的情形，引入同类核子间的相互作用以及中子-质子有效作用之后，仍可用本文的方法确定中子型以及质子型玻色子，并求出玻色子之间的相互作用. 不过，这样得出的玻色子哈密顿量，经过 $s$-$d$ 截断后仍然会比较复杂，要作进一步的截断才能把它变换成本文的形式.

按照本文方法进行的能谱计算工作，已经部分地完成，有关结果将另行报道.

## 二、哈密顿量的玻色子表示

设满壳层外只有一类价核子，其壳模型组态为

$$(i_1 i_2 \cdots i_s)^x, \quad (x = \text{偶}) \tag{2.1}$$

本文 1981 年 11 月 28 日收到.

就是说，有 $x$ 个价核子处在 $s$ 条能级．$i$ 代表单粒子态的三个转动不变的量子数 $nlj$．用 $|0\rangle$ 代表满壳层（相应于 $x=0$），$a_{im}^{+}$，$a_{im}$ 代表价核子的产生、湮灭算符，其中 $m$ 为角动量投影，$i$ 局限于 (2.1) 中的 $s$ 条单粒子能级．于是

$$a_{im}|0\rangle=0. \tag{2.2}$$

设价核子之间的有效相互作用包括如下的对力、四极对力及四极力：

对力 $$-gPP^{+}, \tag{2.3}$$

四极对力 $$-\frac{1}{2}G\sum_{\mu}P_{\mu}P_{\mu}^{+} \quad (\mu=0,\pm1,\pm2), \tag{2.4}$$

四极力 $$-\frac{1}{2}K\sum_{k\neq k'}\sum_{\mu}(-1)^{\mu}q_{-\mu}(k)q_{\mu}(k'), \tag{2.5}$$

其中 $g$, $G$, $K$ 是强度参量，$P$, $P_{\mu}$ 及 $q_{\mu}$ 是如下的算符：

$$P=\sum_{im}a_{im}^{+}\tilde{a}_{im}^{+} \quad (\tilde{a}_{im}^{+}=(-1)^{j+m}a_{i-m}^{+}), \tag{2.6}$$

$$P_{\mu}=\sum_{imi'm'}\langle im|q_{\mu}|i'm'\rangle a_{im}^{+}\tilde{a}_{i'm'}^{+}, \tag{2.7}$$

$$q_{\mu}=r^{2}y_{2\mu}, \tag{2.8}$$

为了简短起见，我们常把 $(nljm)$ 简写成一个单独记号，如 $(\alpha)$ 或 $(\beta)$．设 $E_{\alpha}$ 为单粒子态 $(\alpha)$ 的能量，于是含有 (2.3)—(2.5) 的有效作用的总哈密顿量可写成：

$$H_{f}=\sum_{\alpha}E_{\alpha}a_{\alpha}^{+}a_{\alpha}+\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}P_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\alpha}^{+}a_{\beta}^{+}a_{\gamma}a_{\delta}, \tag{2.9}$$

其中对 $\alpha$, $\beta$ 等的求和，都局限在 (2.1) 中的 $s$ 个单粒子能级．$P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的表达式如下：

$$P_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=P^{(g)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+P^{(G)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+P^{(K1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+P^{(K2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \tag{2.10}$$

其中

$$P^{(g)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=g(-1)^{j_1-m_1}\delta_{m_1-m_2}(-1)^{j_3-m_3}\delta_{m_3-m_4}\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}, \tag{2.11}$$

$$P^{(G)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=\frac{1}{10}Gq_{i_1i_2}q_{i_3i_4}\sum_{\mu}\langle j_1m_1j_2m_2|2\mu\rangle\cdot\langle j_3m_3j_4m_4|2\mu\rangle, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}P^{(K1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=\frac{1}{4}K\frac{q_{i_1i_3}}{\sqrt{2j_1+1}}\cdot\frac{q_{i_2i_4}}{\sqrt{2j_2+1}}\sum_{\mu}(-1)^{\mu}\langle j_3m_32-\mu|j_1m_1\rangle\\ \cdot\langle j_4m_42\mu|j_2m_2\rangle,\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}P^{(K2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=-\frac{1}{4}K\frac{q_{i_1i_4}}{\sqrt{2j_1+1}}\cdot\frac{q_{i_2i_3}}{\sqrt{2j_2+1}}\sum_{\mu}(-1)^{\mu}\langle j_4m_42-\mu|j_1m_1\rangle\\ \cdot\langle j_3m_32\mu|j_2m_2\rangle,\end{aligned} \tag{2.14}$$

$q_{ii'}$ 是 $\langle im|q_{\mu}|i'm'\rangle$ 中的约化矩阵元，即

$$\langle im|q_{\mu}|i'm'\rangle=q_{ii'}\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\langle j'm'2\mu|jm\rangle, \tag{2.15}$$

它满足

$$q_{i_2i_1}=(-1)^{j_1+j_2+1}q_{i_1i_2}, \tag{2.16}$$

$$q^*_{i_1 i_2} = q_{i_1 i_2}, \tag{2.17}$$

(2.11) 及 (2.12) 分别为对力及四极对力的贡献，而 (2.13) 与 (2.14) 分别为四极力的直接项和交换项．显然，(2.10) 满足：

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\beta\alpha\gamma\delta} = P_{\gamma\delta\alpha\beta} = P^*_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{2.18}$$

按照 Dyson 玻色子展开[1,5]，价核子态空间中的一个态矢量 $|\Psi\rangle$ 被映射为一个玻色子态矢量 $\S\Psi)$

$$\S\Psi) = U|\Psi\rangle, \tag{2.19}$$

其中 $U$ 为 Usui 变换算符：

$$U = \langle 0|e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\beta} A^+_{\alpha\beta} a_\beta a_\alpha}|0), \tag{2.20}$$

$A^+_{\alpha\beta}$ 代表所谓理想玻色子的产生算符．每个理想玻色子携带两个单位的价核子数．$|0)$ 是理想玻色子真空态，也就是 $|0\rangle$ 的玻色子像．它们遵从如下的关系：

$$A^+_{\alpha\beta} = -A^+_{\beta\alpha}, \tag{2.21}$$

$$A_{\alpha\beta}A^+_{\gamma\delta} - A^+_{\gamma\delta}A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \tag{2.22}$$

$$A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} - A_{\gamma\delta}A_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.23}$$

$$A_{\alpha\beta}|0) = 0. \tag{2.24}$$

与 (2.17) 相应，一个费米子算符 $g$ 的玻色子像 $g_B$ 按下式定义[1]：

$$Ug = g_B U. \tag{2.25}$$

对于基本的算符 $a_\alpha a_\beta$，$a^+_\alpha a_\beta$ 及 $a^+_\alpha a^+_\beta$．有

$$Ua_\alpha a_\beta = A_{\beta\alpha}U; \tag{2.26}$$

$$Ua^+_\alpha a_\beta = \sum_\gamma A^+_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}U, \tag{2.27}$$

$$Ua^+_\alpha a^+_\beta = \left(A^+_{\alpha\beta} - \sum_{\mu\nu} A^+_{\alpha\mu}A^+_{\beta\nu}A_{\mu\nu}\right)U. \tag{2.28}$$

在文献 [1] 中定义的玻色子哈密顿量 $H_\beta$ 可以经过如下的两个步骤得出．首先把 (2.9) 中的两体项改写成：

$$a^+_\alpha a^+_\beta a_\gamma a_\delta = \delta_{\beta\gamma}a^+_\alpha a_\delta - a^+_\alpha a_\gamma a^+_\beta a_\delta, \tag{2.29}$$

然后利用 (2.27)，得

$$\begin{aligned} Ua^+_\alpha a^+_\beta a_\gamma a_\delta = {} & \delta_{\beta\gamma}\sum_\lambda A^+_{\alpha\lambda}A_{\delta\lambda}U \\ & - \left(\sum_\lambda A^+_{\alpha\lambda}A_{\gamma\lambda}\right)\left(\sum_{\lambda'} A^+_{\beta\lambda'}A_{\delta\lambda'}\right)U, \end{aligned}$$

由此可得

$$H_B = H^{(1)}_B + H^{(2)}_B, \tag{2.30}$$

$$H^{(1)}_B = \sum_\alpha E_\alpha \sum_\lambda A^+_{\alpha\lambda}A_{\alpha\lambda} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta}A^+_{\alpha\beta}A_{\delta\gamma}, \tag{2.31}$$

$$H^{(2)}_B = -\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda\lambda'} A^+_{\alpha\lambda}A^+_{\beta\lambda'}A_{\gamma\lambda}A_{\delta\lambda'}. \tag{2.32}$$

## 三、玻色子态的本征方程组

考虑到理想玻色子满足玻色型对易关系，而且携带着与 IBM 玻色子一样的价核子数，又考虑到借助 $A^+_{\alpha\beta}$ 的一组适当的线性函数能够把 $H_B$ 改写成 IBM 哈密顿量的推广形式. 我们把 IBM 中的 $s$, $d$ 玻色子以及其他的 $\Delta n=2$ 玻色子的产生算符表示为理想玻色子产生算符的线性组合. 一般地写成:

$$Q^+_{\gamma\pi JM}=\sum_{\alpha<\beta}X^{\gamma\pi J}_{\alpha\beta}A^+_{\alpha\beta}, \tag{3.1}$$

其中 $\pi JM$ 代表玻色子所携带的宇称和角动量. 具有相同 $\pi JM$ 的不同玻色子，将用 $\gamma$ 加以区别. $Q^+$、$Q$ 算符当然应满足如下的对易关系:

$$[Q_{\gamma\pi JM}, Q^+_{\gamma'\pi'J'M'}]=\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\pi\pi'}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{3.2}$$

$$[Q_{\gamma\pi JM}, Q_{\gamma'\pi'J'M'}]=0. \tag{3.3}$$

除了以上各点以外，$Q$ 玻色子的一个最重要的性质是: $Q^+|0\rangle$ 是 $H_B$ 的本征态，即:

$$H_BQ^+|0\rangle=\varepsilon Q^+|0\rangle, \tag{3.4}$$

由于 $H_B^{(2)}Q^+|0\rangle=0$，故 (3.4) 意味着

$$H_B^{(1)}Q^+|0\rangle=\varepsilon Q^+|0\rangle, \tag{3.5}$$

这就是 IBM 中的 $s$, $d$ 玻色子以及代表其他自由度的 $\Delta n=2$ 玻色子所满足的本征方程. 本征值 $\varepsilon$ 代表单个 $Q$ 玻色子的能量. 在求解时当然应指定价核子数为 2，并且给定 $\pi JM$ 的值. 至于 $\gamma$，可以把它定义为本征值从小到大的编号 (在同样的 $\pi JM$ 值之下). 我们规定用 $\gamma=0$ 代表 $\varepsilon$ 值最低的解. 然后对于每个 $\varepsilon$ 值较高的解，依次使 $\gamma$ 值增加 1. IBM 中的 $s$, $d$ 玻色子分别相应于 $J^\pi=0^+$ 及 $J^\pi=2^+$ 时的最低解. 因此，它们的产生算符与单玻色子能量分别为:

$$s^+=Q^+_{0+00}, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_s=\varepsilon_{0+0}, \tag{3.7}$$

$$d^+_m=Q^+_{0+2m}\quad (m=0, \pm1, \pm2), \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_d=\varepsilon_{0+2}. \tag{3.9}$$

下面把 (3.5) 写成矩阵形式的本征方程组. 为了引进量子数 $J\pi M$，并把组合系数 $X^{\gamma\pi J}_{\alpha\beta}(M)$ 中含有角动量投影的因子分离出去，首先把 $A^+_{\alpha\beta}$ 中的两个单粒子角动量耦合起来. 在 $s$ 个单粒子能级中指定一个顺序 (可任意指定)，然后对于 $i_1\leqslant i_2$ 的情形定义 $A^+_{(i_1i_2)JM}$:

$$A^+_{(i_1i_2)JM}=\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{i_1i_2}}}\sum_{m_1m_2}A^+_{i_1m_1i_2m_2}\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle, \tag{3.10}$$

显然，在 $i_1=i_2$ 的情形，$J$ 只能取偶数值. 引用这种算符是为了使对易关系具有简单的形式:

$$[A_{(i_1i_2)JM}, A^+_{(i_3i_4)J'M'}]=\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_4}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}(1-\delta_{i_1i_2}\delta_{\text{奇},J}), \tag{3.11}$$

这样 $A^+_{(i_1i_2)JM}$ 与 $Q^+_{\gamma\pi JM}$ 之间的变换就是幺正的. 就是说，把 (3.1) 写成

$$Q^{+}_{\gamma\pi JM} = \sum_{i_1 \leqslant i_2} X^{\gamma\pi J}_{(i_1 i_2)} A^{+}_{(i_1 i_2)JM}, \tag{3.12}$$

则有

$$A^{+}_{(i_1 i_2)JM} = \sum_{\gamma\pi} X^{\gamma\pi J}_{(i_1 i_2)} Q^{+}_{\gamma\pi JM}, \tag{3.13}$$

把 (3.12) 代到 (3.5) 中就得出 $X^{\gamma\pi J}_{(i_1 i_2)}$ 所满足的本征方程组:

$$\sum_{i_3 \leqslant i_4} (0|A_{(i_1 i_2)JM} H^{(1)}_{B} A^{+}_{(i_3 i_4)JM}|0) X^{\gamma\pi J}_{(i_3 i_4)} = \varepsilon_{\gamma\pi J} X^{\gamma\pi J}_{(i_1 i_2)}. \tag{3.14}$$

在求 $H^{(1)}_{B}$ 的矩阵时，要注意 $i_1 \leqslant i_2$, $i_3 \leqslant i_4$, $(-1)^{l_1+l_2} = (-1)^{l_3+l_4} = \pi$, $j_1 + j_2 \to J$, $j_3 + j_4 \to J$ 以及 $i_1 = i_2 \to$ 偶 $J$, $i_3 = i_4 \to$ 偶 $J$ 等限制条件. 在本文所选择的对力、四极对力及四极力下，根据 (2.10)—(2.14), (3.1)—(3.3) 以及 (2.31) 可把 $H^{(1)}_{B}$ 写成:

$$\begin{aligned}
&(0|A_{(i_1 i_2)JM} H^{(1)}_{B} A^{+}_{(i_3 i_4)JM}|0) \\
&= (E_{i_1} + E_{i_2})\delta_{i_1 i_3}\delta_{i_2 i_4} - 2g\sqrt{(2j_1+1)(2j_3+1)}\,\delta_{0,J}\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4} \\
&\quad - \frac{2}{5} G q_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4}\delta_{2,J} + \frac{1}{5}(2-\sqrt{2}) G q_{i_3 i_4}\delta_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4}\delta_{2,J} \\
&\quad + \frac{1}{5}(2-\sqrt{2}) G q_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4}\delta_{i_3 i_4}\delta_{2,J} - \frac{1}{10}(2-\sqrt{2})^2 G q_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4} \\
&\quad \cdot \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4}\delta_{2,J} - K(-1)^{j_1+j_2+J} q_{i_3 i_1} q_{i_2 i_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & 2 \end{Bmatrix} \\
&\quad + K q_{i_3 i_2} q_{i_1 i_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} - K(2-\sqrt{2}) q_{i_3 i_1} q_{i_1 i_4}\delta_{i_1 i_2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix}\delta_{偶,J} \\
&\quad - K(2-\sqrt{2}) q_{i_1 i_3} q_{i_3 i_2}\delta_{i_3 i_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix}\delta_{偶,J} \\
&\quad + \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2 K q_{i_1 i_3} q_{i_3 i_2}\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix}\delta_{偶,J}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

## 四、IBM 哈密顿量的微观形式

根据粒子数守恒及其他不变性条件，可把含有 $s$, $d$ 玻色子两体相互作用的最普遍的哈密顿量写作

$$\begin{aligned}
h &= \varepsilon_s s^+ s + \varepsilon_d \sum_m d^+_m d_m + \sum_l \frac{1}{2}\sqrt{2l+1}\, c_l [(d^+ d^+)_l (\tilde{d}\tilde{d})_l]_0 \\
&\quad + \frac{1}{2} v_1 \{(d^+ d^+)_0 ss + s^+ s^+ (\tilde{d}\tilde{d})_0\} \\
&\quad + \sqrt{\frac{5}{2}}\, v_2 \{[(d^+ d^+)_2 \tilde{d}]_0 s + s^+ [d^+ (\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\} \\
&\quad + \frac{1}{2} v_3 s^+ s^+ ss + \sqrt{5}\, v_4 s^+ (d^+ \tilde{d})_0 s,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中

$$\tilde{d}_m = (-1)^m d_{-m}. \tag{4.2}$$

当我们通过求解本征方程组 (3.4)，求出了 $s$，$d$ 玻色子的能量 $\varepsilon_s$，$\varepsilon_d$ 以及组合系数 $X^{(s)}_{(i_1i_2)}$，$X^{(d)}_{(i_1i_2)}(m)$ 之后，$h$ 也就完全确定了. 其中的相互作用常数可按下列公式求出(参看文献 [1])

$$c_I = \frac{1}{2}(0|(\tilde{d}\tilde{d})_{I0}H_B^{(2)}(d^+d^+)_{I0}|0) \quad (I = 0,2,4), \tag{4.3}$$

$$v_1 = \frac{1}{2}(0|ssH_B^{(2)}(d^+d^+)_0|0), \tag{4.4}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0|d_0sH_B^{(2)}(d^+d^+)_{20}|0), \tag{4.5}$$

$$v_3 = \frac{1}{2}(0|ssH_B^{(2)}s^+s^+|0), \tag{4.6}$$

$$v_4 = (0|d_0sH_B^{(2)}s^+d_0^+|0). \tag{4.7}$$

为了便于写出具体的表达式，我们引用如下的记号:

$$\begin{aligned} y^{(s)}_{i_1i_2} &= \sqrt{1+\delta_{i_1i_2}}\,x^{(s)}_{(i_1i_2)} \quad 当\ i_1 \leqslant i_2 \\ &= (-1)^{1+j_1+j_2}x^{(s)}_{(i_2i_1)} \quad 当\ i_1 > i_2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} y^{(d)}_{i_1i_2} &= \sqrt{1+\delta_{i_1i_2}}\,x^{(d)}_{(i_1i_2)} \quad 当\ i_1 \leqslant i_2 \\ &= (-1)^{1+j_1+j_2}x^{(d)}_{(i_2i_1)} \quad 当\ i_1 > i_2, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$z^{ss}_{(i_1i_2)} = \frac{1}{2j_1+1}\sum_i y^{(s)}_{i_1i}y^{(s)}_{i_2i}, \tag{4.10}$$

$$z^{sd}_{(i_1i_2)} = \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}\sum_i y^{(s)}_{i_1i}y^{(d)}_{i_2i}, \tag{4.11}$$

$$z^{ddJ_0}_{(i_1i_2)} = \sum_i y^{(d)}_{i_1i}y^{(d)}_{i_2i}(-)^{j+\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & J_0 \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \quad (J_0 = 0,1,2,3,4), \tag{4.12}$$

$$T_1 = \sum_{i_1i_2}(-1)^{j_1+\frac{1}{2}}\sqrt{2j_1+1}\,z^{ss}_{(i_1i_2)}z^{dd0}_{(i_1i_2)}, \tag{4.13}$$

$$T_2 = \sum_{i_1i_2} q_{i_2i_1}z^{sd}_{(i_1i_2)}, \tag{4.14}$$

$$T_3 = \sum_{i_1i_2}(-1)^{j_2+\frac{1}{2}}z^{sd}_{(i_1i_2)}z^{dd2}_{(i_1i_2)}, \tag{4.15}$$

$$T_4 = \sum_{i_1i_2}(-1)^{j_1+\frac{1}{2}}q_{i_1i_2}z^{dd2}_{(i_1i_2)}, \tag{4.16}$$

$$T_5 = \sum_{i_1i_2}(2j_1+1)(z^{ss}_{(i_1i_2)})^2, \tag{4.17}$$

$$T_6 = \sum_{i_1i_2}(-1)^{j_1+j_2}z^{sd}_{(i_1i_2)}z^{sd}_{(i_2i_1)}, \tag{4.18}$$

$$T_7 = \sum_{i_1i_2}(z^{dd0}_{(i_1i_2)})^2, \tag{4.19}$$

$$T_8 = \sum_{i_1i_2}(z^{dd2}_{(i_1i_2)})^2, \tag{4.20}$$

$$T_9=\sum_{i_1i_2}(z^{dd4}_{(i_1i_2)})^2, \tag{4.21}$$

$$F_1=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+j_2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 2 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{sd}_{(i_2i_1)}z^{sd}_{(i_3i_4)}, \tag{4.22}$$

$$F_2=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 2 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{sd}_{(i_1i_2)}z^{sd}_{(i_3i_4)}, \tag{4.23}$$

$$F_3=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_2+\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 2 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{dd2}_{(i_1i_2)}z^{sd}_{(i_3i_4)}, \tag{4.24}$$

$$F_4=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_1i_4}z^{ss}_{(i_1i_2)}z^{ss}_{(i_3i_4)}, \tag{4.25}$$

$$F_5=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_3i_2}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}z^{dd0}_{(i_1i_2)}z^{ss}_{(i_3i_4)}, \tag{4.26}$$

$$F_6=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}\frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_3+1}}z^{dd0}_{(i_1i_2)}z^{dd0}_{(i_3i_4)}, \tag{4.27}$$

$$F_7=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+j_2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 1 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{dd1}_{(i_1i_2)}z^{dd1}_{(i_3i_4)}, \tag{4.28}$$

$$F_8=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+j_2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 2 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{dd2}_{(i_1i_2)}z^{dd2}_{(i_3i_4)}, \tag{4.29}$$

$$F_9=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+j_2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 3 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{dd3}_{(i_1i_2)}z^{dd3}_{(i_3i_4)}, \tag{4.30}$$

$$F_m=\sum_{i_1i_2i_3i_4}q_{i_2i_3}q_{i_4i_1}(-1)^{j_1+j_2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 4 \\ j_3 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} z^{dd4}_{(i_1i_2)}z^{dd4}_{(i_3i_4)}, \tag{4.31}$$

利用这些量以及各相互作用常数,可把 $c_I$, $v_1$—$v_4$ 表示如下:

$$\begin{aligned} c_0 = & -50g\cdot T_7-5G(F_6-3F_7+5F_8-7F_9+9F_m) \\ & +\frac{5}{2}K(-T_4^2+F_6+3F_7+5F_8+7F_9+9F_m), \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} c_2 = & -50g\cdot T_8-5G\left(F_6-\frac{3}{2}F_7-\frac{15}{14}F_8+4F_9+\frac{18}{7}F_m\right) \\ & +\frac{5}{2}K\left(\frac{3}{14}T_4^2+F_6+\frac{3}{2}F_7-\frac{15}{14}F_8-4F_9+\frac{18}{7}F_m\right), \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} c_4 = & -50g\cdot T_9-5G\left(F_6+2F_7+\frac{10}{7}F_8+\frac{1}{2}F_9+\frac{1}{14}F_m\right) \\ & +\frac{5}{2}K\left(-\frac{2}{7}T_4^2+F_6-2F_7+\frac{10}{7}F_8-\frac{1}{2}F_9+\frac{1}{14}F_m\right), \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$v_1=10g\cdot T_1-\sqrt{5}G\cdot F_1-\frac{1}{2}\sqrt{5}K\left(\frac{1}{5}T_2^2+F_2\right), \tag{4.35}$$

$$v_2=10\sqrt{2}g\cdot T_3-5\sqrt{2}G\cdot F_3+\frac{1}{2}\sqrt{2}K(T_2\cdot T_4+5F_3), \tag{4.36}$$

$$v_3=-2g\cdot T_5-G\cdot F_4+\frac{1}{2}K\cdot F_4, \tag{4.37}$$

$$v_4=2g(\sqrt{5}T_1+T_6)+G(F_2+\sqrt{5}F_5)$$

$$-\frac{1}{2}K\left(\frac{1}{5}T_2^2-F_1+\sqrt{5}F_5\right). \tag{4.38}$$

至此，我们在对力、四极对力及四极力下，给出了求解 IBM 玻色子的本征方程组以及用以确定玻色子相互作用的微观表达式. 在给定了壳模型单粒子能量，波函数以及核子之间相互作用参量 $g$、$G$、$K$ 之后，就可以进行具体计算. 我们是希望通过求解 $h$ 的本征方程来达到近似求解 $H_f$ 的本征方程的目的. 如果 $h$ 的本征态是 $H_B$ 的近似本征态，那么，$h$ 的本征值就近似地代表 $H_f$ 的本征值. 但是 $h$ 的本征函数要经过 Jancovici-Schiff 代换成为费米子波函数或者等价地换为投影波函数，才能用于计算各种矩阵元(参看 [1]).

把本文方法推广到包含两类价核子的偶偶核时，仍可用 (3.14)、(3.15) 确定中子型及质子型玻色子，然后按照 (4.8)—(4.38) 求出同类型玻色子之间的相互作用. 中子玻色子与质子玻色子之间的相互作用，需要按照另外的公式来确定，但方法上是类似的.

## 参 考 文 献


[1] 杨泽森，杨立铭，会议文集 Interacting Boson-Fermi Systems In Nuclei, ed. F. Iachello (Plenum, New York, 1981).

[2] D. R. Bes and R. A. Broglia, *Phys. Rev.*, C3(1971), 2349.

[3] D. Janssen, F. Donau, S. Franendorf and R. V. Jolos, *Nucl. Phys.*, A172(1971), 145.


# A DYSON REPRESENTATION OF THE INTERACTING BOSON MODEL WITH PAIRING PLUS QUADRUPOLE PAIRING PLUS QUADRUPOLE-QUADRUPOLE FORCES


YANG TSE-SEN LIU YONG TIAN XIAO-CEN

(*Department of Physics, Peking University*)


### ABSTRACT


With a usual choice of the effective nucleon-nucleon interactions consisting of a pairing force, a quadrupole pairing force and a quadrupole-quadrupole force, the microscopic approach, as described in our previous work, based on the Dyson boson expansion and based on the so-called modified Jancovici-Schiff substitution is followed to obtain a group of eigen-equations for determining the IBM bosons and find the microscopic expressions of the coefficients appearing in the interaction terms of the IBM Hamiltonian. The results given in the present paper can be used directly in calculating the collective spectrum of nuclei with identical valence nucleons outside closed shells.