第6卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 3
1982年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1982

玻色子费米子体系波函数的分类

孙洪洲 韩其智
(北京大学)

摘要

在本文中，我们证明了玻色子费米子体系的波函数可以用超李代数链

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3)$$

或

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset OSp(2l+1/2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3)$$

来进行分类.

在文中还给出了按超李代数链

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3)$$

分类的玻色子费米子体系的波函数.

一、引言

我们知道，角动量为 l 的玻色子体系的波函数可以用李代数链

$$U(2l+1) \supset SU(2l+1) \supset SO(2l+1) \supset SO(3)$$

来分类，而角动量为 j 的费米子体系的波函数可以用李代数链

$$U(2j+1) \supset SU(2j+1) \supset Sp(2j+1) \supset SO(3)$$

来分类. 我们推广这一结果，把玻色子费米子看作一个体系，这时可以引入一个超李代数链:

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus SO(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3) \tag{1.1}$$

应用这个超李代数链(1.1)可以对玻色子费米子体系进行分类. 另外，还可以引入另一个超李代数链

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset OSp(2l+1/2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3) \tag{1.2}$$

来分类玻色子费米子体系的波函数.

本文1980年10月13日收到.

在本文中，我们还给出了按超李代数链(1.1)分类的玻色子费米子体系的波函数.

二、超李代数链 $U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1)\oplus SU(2j+1)\supset SO(2l+1)\oplus Sp(2j+1)\supset SO(3)\oplus SO(3)$

用 $\bar{a}_{lm}$, a_{lm}; $\bar{b}_{jn}$, b_{jn} 分别表示角动量及其子分量量子数为 $l, m; j, n$ 的玻色子；费米子的产生;湮没算符;它们满足以下的对易和反对易关系:

$$
\begin{aligned}
&[a_{lm}a_{lm'}] = [\bar{a}_{lm}\bar{a}_{lm'}] = 0, \quad [a_{lm}\bar{a}_{lm'}] = \delta(mm');\\
&\{b_{jn}b_{jn'}\} = \{\bar{b}_{jn}\bar{b}_{jn'}\} = 0, \{b_{jn}\bar{b}_{jn'}\} = \delta(nn').
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

考虑以下 $(2l+2j+2)^2$ 个算符

$$
\begin{aligned}
E_{ik} &= \bar{a}_{lm}a_{lm'}, \quad (i = l+1+m, \quad k = l+1+m');\\
E_{\alpha\beta} &= \bar{b}_{jn}b_{jn'}, \quad (\alpha = 2l+2+j+n, \ \beta = 2l+2+j+n');\\
E_{i\beta} &= \bar{a}_{lm}b_{jn'}, \quad (i = l+1+m, \quad \beta = 2l+2+j+n');\\
E_{\alpha k} &= \bar{b}_{jn}a_{lm'}, \quad (\alpha = 2l+2+j+n, \ k = l+1+m').
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

这些算符满足以下的对易和反对易关系.

$$
\begin{aligned}
&[E_{ij}\, E_{kl}] = E_{il}\,\delta(jk) - E_{kj}\,\delta(il),\\
&[E_{ij}\, E_{k\alpha}] = E_{i\alpha}\,\delta(jk),\\
&[E_{ij}\, E_{\alpha k}] = -E_{\alpha j}\,\delta(ik),\\
&[E_{\alpha\beta}\, E_{\gamma\delta}] = E_{\alpha\delta}\delta\,(\beta\gamma) - E_{\gamma\beta}\,\delta(\alpha\delta),\\
&[E_{\alpha\beta}\, E_{i\gamma}] = -E_{i\beta}\delta(\alpha\gamma),\\
&[E_{\alpha\beta}\, E_{\gamma j}] = E_{\alpha j}\delta(\beta\gamma);\\
&\{E_{i\alpha}\, E_{j\beta}\} = 0,\\
&\{E_{\alpha i}\, E_{\beta j}\} = 0,\\
&\{E_{i\alpha}\, E_{\beta j}\} = E_{ij}\delta(\alpha\beta) + E_{\beta\alpha}\delta(ij).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

所有的算符 E_{ij}, $E_{\alpha\beta}$, $E_{i\beta}$, $E_{\alpha j}$ 构成了超李代数 $U(2l+1/2j+1)$ 的生成元[1], E_{ij}, $E_{\alpha\beta}$ 称为 $U(2l+1/2j+1)$ 的偶元; $E_{i\beta}$,$E_{\alpha j}$ 称为 $U(2l+1/2j+1)$ 的奇元. 显然, $U(2l+1/2j+1)$ 的偶元构成了李代数 $U(2l+1)\oplus U(2j+1)$ 的生成元, $U(2l+1)\oplus U(2j+1)$ 称为超李代数 $U(2l+1/2j+1)$ 的李代数.

算符 E_{ij}, $E_{\alpha\beta}$, $E_{i\beta}$, $E_{\alpha j}$ 的子集

$$
\begin{aligned}
&Q_2 = E_{22} - (E_{11} + E_{22})/2\\
&Q_3 = E_{33} - (E_{11} + E_{22} + E_{33})/3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Q_{2l+1} = E_{2l+1\ 2l+1} - (E_{11} + E_{22} + \cdots E_{2l+1\ 2l+1})/2l+1,\\
&E_{ik};\ (i \neq k);\\
&P_2 = E_{2l+3\ 2l+3} - (E_{2l+2\ 2l+2} + E_{2l+3\ 2l+3})/2\\
&P_3 = E_{2l+4\ 2l+4} - (E_{2l+2\ 2l+2} + E_{2l+3\ 2l+3} + E_{2l+4\ 2l+4})/3
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{2j+1\ 2j+1} = E_{2l+2j+2\ 2l+2j+2} - (E_{2l+2\ 2l+2} + E_{2l+3\ 2l+3} + \cdots + E_{2l+2j+2\ 2l+2j+2})/2j+1$$

$$E_{\alpha\beta};\ (\alpha \neq \beta);$$

$$D = \frac{1}{2l-2j}\{(2j+1)(E_{11} + E_{22} + \cdots E_{2l+1\ 2l+1}) - (2l+1)(E_{2l+2\ 2l+2} + E_{2l+3\ 2l+3} + \cdots + E_{2l+2\ j+2\ 2l+2\ j+2})\};$$

$$E_{i\beta},\ E_{\alpha k}. \tag{2.4}$$

构成了 $U(2l+1/2j+1)$ 的子超代数 $SU(2l+1/2j+1)$ 的另一组生成元．$SU(2l+1/2j+1)$ 的偶元为 $Q_2, Q_3 \cdots Q_{2l+1}, E_{ik}; P_2, P_3, \cdots P_{2j+1}; D$．它的奇元为 $E_{i\beta}, E_{\alpha j}$.

这样，我们就找到了一个超李代数链

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SU(3) \oplus SU(3).$$

三、超李代数链 $U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset OSp(2l+1/2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3)$

超李代数 $U(2l+1/2j+1)$ 的另一组生成元可以选为：

$$(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^k_q = \sum_{m_1m_2}\langle lm_1lm_2|kq\rangle \bar{a}_{lm_1}\tilde{a}_{lm_2},$$

$$(\bar{b}_j\tilde{b}_j)^k_q = \sum_{n_1n_2}\langle jn_1jn_2|kq\rangle \bar{b}_{jn_1}\tilde{b}_{jn_2},$$

$$(\bar{a}_l\tilde{b}_j)^k_q = \sum_{m_1n_2}\langle lm_1jn_2|kq\rangle \bar{a}_{lm_1}\tilde{b}_{jn_2},$$

$$(\bar{b}_j\tilde{a}_l)^k_q = \sum_{n_1m_2}\langle jn_1lm_2|kq\rangle \bar{b}_{jn_1}\tilde{a}_{lm_2}. \tag{3.1}$$

其中

$$\tilde{a}_{lm} = (-)^{l+m}a_{l-m},\ \tilde{b}_{jn} = (-)^{j+n}b_{j-n}; \tag{3.1'}$$

$(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^k_q$ $(\bar{b}_j\tilde{b}_j)^k_q$ 是 $U(2l+1/2j+1)$ 的偶元，$(\bar{a}_l\tilde{b}_j)^k_q$，$(\bar{b}_j\tilde{a}_l)^k_q$ 是 $U(2l+1/2j+1)$ 的奇元；它们满足以下的对易和反对易关系：

$$[(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^{k_1}_{q_1}(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{2l-q} \cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}\{(-)^{k_1+k_2+k} - 1\} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ l & l & l \end{Bmatrix} (\bar{a}_l\tilde{a}_l)^k_q.$$

$$[(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^{k_1}_{q_1}(\bar{a}_l\tilde{b}_j)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{l+j-q} \cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)} \cdot \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k \\ q_2 & q_1 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j & l & l \end{Bmatrix} (\bar{a}_l\tilde{b}_j)^k_q$$

$$[(\bar{a}_l\,\tilde{a}_l)^{k_1}_{q_1}(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{l+j-q}$$

$$\cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j & l & l \end{Bmatrix} (\bar{b}_j\tilde{a}_l)^k_q$$

$$[(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^{k_1}_{q_1}(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{2j-q}$$

$$\cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)} \cdot \{(-)^{k_1+k_2+k} - 1\}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j & j & j \end{Bmatrix} (\bar{b}_j\tilde{b}_j)^k_q$$

$$[(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^{k_1}_{q_1}(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{j+l-q}$$

$$\cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ l & j & j \end{Bmatrix} (\bar{a}_l\tilde{b}_j)^k_q.$$

$$[(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^{k_1}_{q_1}(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^{k_2}_{q_2}] = (-)^{j+l-q}$$

$$\cdot \sum_k \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k \\ q_2 & q_1 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ l & j & j \end{Bmatrix} (\bar{a}_l\tilde{b}_j)^k_q;$$

$$\{(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^{k_1}_{q_1}(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^{k_2}_{q_2}\} = 0$$

$$\{(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^{k_1}_{q_1}(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^{k_2}_{q_2}\} = 0$$

$$\{(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^{k_1}_{q_1}(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^{k_2}_{q_2}\}$$

$$= \sum_k \Big\{(-)^{2j-q}\sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k \\ q_2 & q_1 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ l & l & j \end{Bmatrix} \times (\bar{a}_l\,\tilde{a}_l)^k_q$$

$$+ (-)^{2l-q}\sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j & j & l \end{Bmatrix} (\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^k_q \Big\}. \tag{3.2}$$

利用(3.2)式，容易证明

$$(\bar{a}_l\,\tilde{a}_l)^k_q, \quad (k \neq 0)$$

$$(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^k_q, \quad (k \neq 0)$$

$$D = \frac{(2l+1)\,(2j+1)}{2l-2j}\{(\bar{a}_l\tilde{a}_l)^0_0 + (\bar{b}_j\tilde{b}_j)^0_0\};$$

$$(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^k_q, \quad (\bar{b}_j\tilde{a}_l)^k_q. \tag{3.3}$$

构成了 $U(2l+1/2j+1)$ 的子超代数 $SU(2l+1/2j+1)$ 的一组生成元[1,2]，其中 $(\bar{a}_l\,\tilde{a}_l)^k_q$，$(\bar{b}_j\,\tilde{b}_j)^k_q$ $(k \neq 0)$，是 $SU(2l+1/2j+1)$ 的偶元，而 $(\bar{a}_l\,\tilde{b}_j)^k_q$，$(\bar{b}_j\,\tilde{a}_l)^k_q$ 是 $SU(2l+1/2j+1)$ 的奇元.

利用(3.2)式还可以看出：

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{a}_l\ \tilde{a}_l)^k_q,\ k=\text{奇};\\
&(\tilde{b}_j\ \tilde{b}_j)^k_q,\ k=\text{奇};\\
&(\tilde{a}_l\ \tilde{b}_j)^k_q+(\tilde{a}_l\ \tilde{b}_j)^k_q;
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中

$$(\tilde{a}_l\ \tilde{b}_j)^k_q=(-)^{l+j-k}(\tilde{b}_j\ \tilde{a}_l)^k_q \tag{3.4'}$$

构成了 $SU(2l+1/2j+1)$ 的子超代数 $OSp(2l+1/2j+1)$ 的一组生成元[1]. $(\tilde{a}_l\ \tilde{a}_l)^k_q$, $(\tilde{b}_j\tilde{b}_j)^k_q(k\neq 0)$，是它的偶元，$(\tilde{a}_l\tilde{b}_j)^k_q+(\tilde{a}_l\tilde{b}_j)^k_q$ 是它的奇元.

这样，我们得到了另一个超李代数链

$$
\begin{aligned}
&U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset OSp(2l+1/2j+1)\\
&\supset SO(2l+1)\oplus Sp(2j+1)\supset SO(3)\oplus SO(3).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

四、按 $U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1)\oplus SU(2j+1)\supset SO(2l+1)\oplus Sp(2j+1)\supset SO(3)\oplus SO(3)$ 分类的波函数

为了计算方便，我们先引入按超李代数链：

$$
\begin{aligned}
&U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1)\otimes SU(2j+1)\\
&\supset SU(2l)\otimes SU(2j)\supset\cdots\supset SU(2)\otimes SU(2)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

分类的波函数. 按照[2]中的方法，可以得到这样的波函数：1)

$$
\begin{aligned}
&|[\lambda]\gamma_1[1^{2j+1}]\gamma_2\rangle,\\
&|[\lambda+1]\gamma_1[1^{2j}]\gamma_2\rangle,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|[\lambda+2j+1]\gamma_1[0]\gamma_2\rangle;
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

其中 $[\lambda],[\lambda+1],\cdots[\lambda+2j+1]$; $[1^{2j+1}],[1^{2j}],\cdots[0]$ 是标记 $SU(2l+1)$; $SU(2j+1)$ 不可约表示的划分；γ_1, γ_2 是标记 $SU(2l+1)$, $SU(2j+1)$ 不可约表示基矢的 Ge'lfand 符号. 波函数(4.2)展开了 $U(2l+1/2j+1)$ 的不可约表示 $([\lambda][1^{2j+1}])$ 的表示空间.

按超李代数链 $U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1)\oplus SU(2j+1)\supset SO(2l+1)\oplus Sp(2j+1)\supset SO(3)\oplus SO(3)$ 分类的玻色子费米子的波函数为：

$$
\begin{aligned}
&|[\lambda+\delta]\nu_1\alpha_1J_1[1^{2j+1-\delta}]\nu_2\alpha_2J_2JM\rangle\\
&=\sum_{\gamma_1\gamma_2}|[\lambda+\delta]\gamma_1[1^{2j+1-\delta}]\gamma_2\rangle\langle\gamma_1\gamma_2|\nu_1\alpha_1J_1,\ \nu_2\alpha_2J_2JM\rangle
\end{aligned}
$$

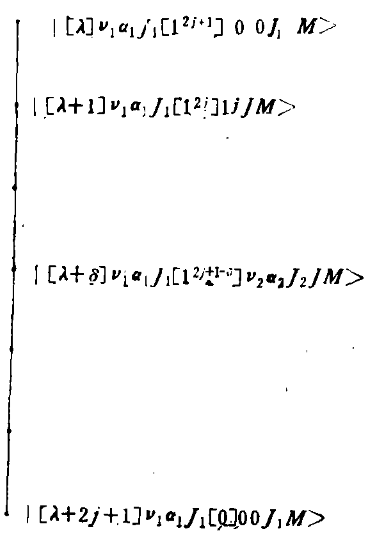

图 1　按 $U(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1/2j+1)\supset SU(2l+1)\oplus SU(2j+1)\supset SO(2l+1)\oplus Sp(2j+1)\supset SO(3)\oplus SO(3)\supset SO(3)$ 分类的波函数.

1) 略去了不独立的量子数 d_{max}.

$$\delta = 0, 1, 2, \cdots 2j + 1 \tag{4.3}$$

其中 $\nu_1\alpha_1J_1$, $\nu_2\alpha_2J_2$ 分别是玻色子费米子的产弱数，附加量子数，角动量量子数. 这样的波函数可以用图 1 划出.

五、结 束 语

在本文中，我们指出了可以用超李代数链(1.1)和(1.2)来分类玻色子费米子体系的波函数，并给出了按超李代数链(1.1)分类的玻色子费米子体系的波函数. 以后，我们将利用本文的结果来讨论原子核的 $U(6/4)$ 动力学超对称性.

参 考 文 献

[1] Kac, V. G., *Commun. Math. Phys.*, **53**(1977), 31.
[2] 韩其智等，阶化李代数 $SU(m/n)$ 的不可约表示，**5**(1981). 546,

THE CLASSIFICATION OF THE WAVE FUNCTIONS OF BOSONS AND FERMIONS

SUN HONG-ZHOU HAN QI-ZHI
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper we have proved that the wave functions for bosons and fermions can be classified by either of the following two Lie superalgebra chains

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3),$$

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset OSp(2l+1/2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3)$$

The wave functions for bosons and fermions classified by the Lie superalgebra chain

$$U(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1/2j+1) \supset SU(2l+1) \oplus SU(2j+1) \supset SO(2l+1) \oplus Sp(2j+1) \supset SO(3) \oplus SO(3),$$

are calculated also.