第6卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 3
1982年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1982

引力和旋量规范场

刘耀阳
(中国科学技术大学近代物理系)

摘 要

本文基于 Dirac 理论的 Lorentz 协变和 $SO(4,2)$对称，将 Lorentz 变换推广到广义坐标变换和定域 $SO(4,2)$ 变换，建立了一个明显协变的旋量规范场理论. 我们证明了：由理论规范无关要求，对称群自动退化为 Riemann 空间的定域 Lorentz 转动，因此本理论是 Dirac 理论在 Riemann 空间最自然的推广；旋量规范场的存在和时空弯曲紧密相关，平直空间不能有旋量规范场. 我们还讨论了本理论和 Utiyama 理论以及 Kibble 理论的区别，并指出过去所谓 Dirac 波函数在广义相对论中表现为标量的问题，是由于所用理论形式非明显协变而引起的误解，这种非明显协变形式使我们看不清楚什么是规范场什么是时空结构效应. 用明显协变的理论，使这一问题得到解决.

一、引 言

电磁力是物理学很早研究的一种相互作用，在发现相对论和量子力学后，物理学家认识到电磁作用同波函数相因子的不确定性是紧密相关的，并证实电磁作用是一种规范相互作用. 杨振宁和 Mills 把相因子不确定性的概念推广到核子的同位旋空间波函数[1]，这时出现了类似电磁场的规范场，由它传递核子间的相互作用，即杨-Mills 场. 经过相当长一段时间的努力，人们证明了，和电磁理论那样杨-Mills 场理论是可以重整化的. 这便促使人们尝试把规范场的思想拿来解决弱相互作用理论和夸克禁闭问题，这就是 QFD 和 QCD[2]. 现在我们知道 QFD 和 QCD 是处理弱作用和电磁作用以及强作用最有前途的理论. 于是在物理学家中产生的一种一切相互作用理论都应当是规范理论的想法，便不难理解.

万有引力是牛顿最先提出来的，Einstein 的广义相对论把引力理论发展到一个空前高度，但引力的研究并没有结束，读他的“Die Grundlage der allgemeinen Relativistätshtheorie”时[3]，我们会感到它逻辑严谨，形式优美；同时也会发现，当试图根据经典力学的不连续图象导出一个连续的场方程时，他不得不事先假定存在着连续的标量场或矢量场，而关于这些连续场的物理内容确无法说得清楚. 把 Einstein 的连续场假定为波函数，并由波函数相因子不确定性建立一个规范理论，因为问题涉及的只是波函数的时空性质，预期这个规

本文 1980 年 10 月 13 日收到，1981 年 9 月 20 日收到修改稿.

范作用就是引力．和经典力学不同，量子力学波函数不仅有张量表示，还有旋量表示，并且近来的基本粒子研究倾向于所有的物质场都是旋量场，必然地，规范引力问题的研究应当从旋量着手．这就是我们有兴趣于旋量规范场的原因．

有许多工作讨论到旋量粒子的引力行为[4—6]，然而毕竟引力是外部自由度问题，它有着不同于内部自由度的特点，致使对什么是真正的引力规范场，有非常不相同的理解．前一工作中[7]，我们认识到，Dirac 方程的连续对称性由两个对称群描述，一个是 Lorentz 群，一个是 $SO(4,2)$ 群．它们分别作用到普通空间和旋量空间，并特别叫 $SO(4,2)$ 的四维表示群为 V 群．我们证明了，第一它等价于一般协变性的描述；第二把 Lorentz 变换推广到广义坐标变换，V 作定域化，过去人们所说的所谓波函数表现为标量是不真实的[8]；第三作为一个例子，在一定条件下可以得到 Utiyama 理论．本文将对这一问题进行全面的讨论．我们证明了，弯曲空间的 Dirac 理论是广义坐标变换和定域 $SO(4,2)$ 变换不变的，并且等价于广义坐标变换和定域 Lorentz 转动不变，因而即使在弯曲空间波函数也表现为旋量．我们觉得为了避免实际上会引起概念上的混乱，关键是要保持理论自始至终的协变．因此在第二节将首先建立起群代数以及旋量波函数和 γ 矩阵变换的协变表示，并求出规范场的变换关系和旋量场的拉氏量．第三节讨论引力规范场及其拉氏量．我们采用和杨-Mills 场对比的方法．协变表示可以使我们一目了然地看出杨-Mills 场和旋量规范场之间的相同点和不同点．根据相同点可以确定什么是规范场，什么不是规范场；根据不同点，我们判断哪些完全是因弯曲空间的效应．第四节是对一些问题的讨论以及和现有一些引力规范理论的比较．我们证明了，平直空间不会有旋量规范场，因此，旋量规范场的存在是和时空弯曲是紧密相联的．这一节还把该理论和现有的一些理论作了比较，发现这是一个不同于 Utiyama 理论以及 Kibble 定域 Poincaré 理论的新理论．

二、旋量粒子和规范变换

首先有必要对前文主要结果作简要的重复[7]．自旋 1/2 粒子满足 Dirac 方程，其拉氏函数是

$$\mathscr{L}_{f}^{0}=\frac{1}{2}\{i\bar{\psi}\gamma^{a}\partial_{a}\psi-m\bar{\psi}\psi+\text{h.c.}\},\tag{1}$$

其中 m 是粒子静止质量，$a=0,1,2,3$ 是时空指标，$\bar{\psi}=\psi^{+}\beta$.

$$\{\gamma^{a},\gamma^{b}\}=2g^{ab},\quad [g^{ab}]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.\tag{2}$$

关于 $\mathscr{L}_{f}^{0}$ 连续变换的对称性，有两种理解．一个是通常人们用的，在 Lorentz 变换下保持 γ^{a} 表示不变，ψ 作一变换，故 ψ 是旋量．另一种理解是，我们必须考查 $\mathscr{L}_{f}^{0}$ 全部连续对称性．这包括两组独立的变换，一个是 Lorentz 变换，一个是 γ 矩阵的表象变换．使同一个 Lorentz 变换对应不同的表象变换，可以得到 ψ 是旋量；也可以得到 ψ 是"标量"．对后者，则必须注意到 γ 矩阵已经变到一个新的表示．所以波函数即使在狭隘相对论中也可以表

现为"标量",但它并不是真的标量，也不是真的丑陋[8]. 限制在表象变换的 Lorentz 子群上并定域化,时空变换推广到广义坐标变换,一定条件下就得到 Utiyama 理论.

下面来讨论整个表象变换群的定域化问题. 为保持理论始终协变，第一步就要把平直空间的群代数协变化. 取

$$\begin{aligned}&\gamma^a,\ \omega^a=\gamma^a\gamma_M^5,\quad \sigma^{ab}=\frac{i}{2}[\gamma^a,\gamma^b]\\&\gamma_M^5=\frac{i}{4!}\varepsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d,\quad a,b,c,d=0,1,2,3.\end{aligned}\tag{3}$$

为γ表象变换的十五个无穷小算符. 直接计算得到它们间的对易和反对易关系,

$$\begin{aligned}
&[\gamma^a,\gamma^b]=-2i\sigma^{ab}, && [\gamma^a,\omega^b]=2g^{ab}\gamma_M^5,\\
&[\gamma^a,\sigma^{bc}]=2i(g^{ab}\gamma^c-g^{ac}\gamma^b), && [\gamma^a,\gamma^5]=2\omega^a,\\
&[\omega^a,\omega^b]=2i\sigma^{ab}, && [\omega^a,\sigma^{bc}]=2i(g^{ab}\omega^c-g^{ac}\omega^b),\\
&[\omega^a,\gamma_M^5]=2\gamma^a, && [\sigma^{ab},\gamma_M^5]=0,\\
&[\sigma^{ab},\sigma^{cd}]=2i(g^{ac}\sigma^{db}-g^{ad}\sigma^{cb}-g^{bc}\sigma^{da}+g^{bd}\sigma^{ca});
\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\{\gamma^a,\gamma^b\}=2g^{ab}, && \{\gamma^a,\omega^b\}=-\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd},\\
&\{\gamma^a,\sigma^{bc}\}=-2\varepsilon^{abcd}\omega_d, && \{\gamma^a,\gamma_M^5\}=0,\\
&\{\omega^a,\omega^b\}=-2g^{ab}, && \{\omega^a,\sigma^{bc}\}=2\varepsilon^{abcd}\gamma_d,\\
&\{\omega^a,\gamma_M^5\}=0, && \{\sigma^{ab},\gamma_M^5\}=i\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd},\\
&\{\sigma^{ab},\sigma^{cd}\}=2(g^{ac}g^{bd}-g^{ad}g^{bc})+2i\varepsilon^{abcd}\gamma_M^5,\\
&\{\gamma_M^5,\gamma_M^5\}=2.
\end{aligned}\tag{5}$$

(1) 对下述变换具有不变性

$$\begin{aligned}
dx^a&=L(\eta)^a_b dx'^b,\qquad \phi(x)=V(L\gamma,\theta)\phi'(x')\\
\gamma^a&=L(\eta)^a_b V^{-1}(L\gamma,\theta)\gamma'^b V(L\gamma,\theta),\\
V(L\gamma,\theta)&=\exp\{iG[L(\eta)^a_b\gamma^b\theta_a+L(\eta)^a_b\omega^b\theta_{5a}\\
&\quad+L(\eta)^a_c L(\eta)^b_d\sigma^{cd}\theta_{ab}+\gamma_M^5\theta_5]\}
\end{aligned}\tag{6}$$

其中G是无量纲常数; θ_a, θ_{5a}, θ_{ab} 是十四个实群参数, θ_5 是虚群参数，并于左端简写为θ; $L(\eta)^a_b$ 是 Lorentz 变换矩阵, η 是六个转动角的简写,左端L是L^a_b的简写. 显然,(4)、(5)是协变的. 数学上(4)和 $SO(4,2)$ 群代数同构[9], V是 $SO(4,2)$ 的四维表示,由于我们只对四维表示有兴趣,故特称为V群.

把 Lorentz 变换推广到广义坐标变换, γ矩阵将是时空的函数,为区别和时空点无关的γ矩阵,将其拉丁指标换为希腊指标. (2)推广为

$$\{\gamma^\alpha,\gamma^\beta\}=2g^{\alpha\beta},\tag{7}$$

并把 $g^{\alpha\beta}$ 解释为 Riemann 空间的度规张量. 定义

$$\begin{aligned}
&\sigma^{\alpha\beta}=\frac{i}{2}[\gamma^\alpha,\gamma^\beta], && \gamma^5=\frac{i}{4!}e_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta,\\
&\omega^\sigma=\frac{i}{3!}g^{\sigma\alpha}e_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta=\gamma^\sigma\gamma^5,\\
&e_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, && g=\det\|g_{\alpha\beta}\|,
\end{aligned}\tag{8}$$

由(7)、(8)可得如下对易和反对易关系，

$$
\begin{aligned}
&[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = -2i\sigma^{\alpha\beta}, && [\gamma^\alpha, \omega^\beta] = 2g^{\alpha\beta}\gamma^5,\\
&[\gamma^\alpha, \sigma^{\beta\gamma}] = 2i(g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma - g^{\alpha\gamma}\gamma^\beta), && [\gamma^\alpha, \gamma^5] = 2\omega^\alpha,\\
&[\omega^\alpha, \omega^\beta] = 2i\sigma^{\alpha\beta}, && [\omega^\alpha, \sigma^{\beta\gamma}] = 2i(g^{\alpha\beta}\omega^\gamma - g^{\alpha\gamma}\omega^\beta),\\
&[\omega^\alpha, \gamma^5] = 2\gamma^\alpha, && [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^5] = 0\\
&[\sigma^{\alpha\beta}, \sigma^{\gamma\delta}] = 2i(g^{\alpha\gamma}\sigma^{\delta\beta} - g^{\alpha\delta}\sigma^{\gamma\beta} - g^{\beta\gamma}\sigma^{\delta\alpha} + g^{\beta\delta}\sigma^{\gamma\alpha}); &&
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}, && \{\gamma^\alpha, \omega^\beta\} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta},\\
&\{\gamma^\alpha, \sigma^{\beta\gamma}\} = -2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_\delta, && \{\gamma^\alpha, \gamma^5\} = 0\\
&\{\omega^\alpha, \omega^\beta\} = -2g^{\alpha\beta}, && \{\omega^\alpha, \sigma^{\beta\gamma}\} = 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\delta,\\
&\{\omega^\alpha, \gamma^5\} = 0 && \{\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^5\} = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta},\\
&\{\sigma^{\alpha\beta}, \sigma^{\gamma\delta}\} = 2(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) + 2i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^5, &&\\
&\{\gamma^5, \gamma^5\} = 2. &&
\end{aligned}
\tag{10}
$$

比较(9)、(10)和(4)、(5)，有理由把 γ^α，ω^α，$\sigma^{\alpha\beta}$，γ^5 看作 Riemann 空间 V 的无穷小算符．这个理由就是 Einstein 的等效原理或局部惯性系假定[3]，因此，我们猜想(7)是(2)式唯一可能的推广．(9)、(10) 是明显协变的．Riemann 空间群 V 的表示是

$$
V(g(x), \theta(x)) = \exp\{iG[\gamma^\alpha(x)\theta_\alpha(x) + \omega^\alpha(x)\theta_{5\alpha}(x) + \sigma^{\alpha\beta}(x)\theta_{\alpha\beta}(x) + \gamma^5(x)\theta_5(x)]\},
\tag{11}
$$

为避免混淆，上式中各个量对坐标的依赖关系都一一标明．其中左端 $g(x)$ 是度规张量 $g^{\alpha\beta}(x)$ 的简写。在写下(11)时，我们应用了等效原理，即虽然无穷小算符和结构常数都是时空的函数，但在讨论规范群时，应当把它们和与时空无关的无穷小算符和结构函数同样对待．注明(11)式中各个量对坐标的依赖情况，还希望强调(11)是在一个给定时空坐标系写下的群元素，该群元素的表示在任一另一时空坐标系是完全确定的，其原因在于规范群的空间是 Hilbert 空间．所以，规范群参数只是时空点的函数而与时空坐标系的选取无关，换句话说它们是广义坐标变换下的标量，则

$$
\theta'_\alpha(x') = \theta_\alpha(x),\ \theta'_{5\alpha}(x') = \theta_{5\alpha}(x),\ \theta'_{\alpha\beta}(x') = \theta_{\alpha\beta}(x),\ \theta'_5(x') = \theta_5(x),
\tag{12}
$$

并且以 $V(g'(x'), \theta'(x'))$ 代表同一群元素当经过广义坐标变换后的表示，有

$$
V(g'(x'), \theta'(x')) = \exp\{iG[\gamma'^\alpha(x')\theta'_\alpha(x') + \omega'^\alpha(x')\theta'_{5\alpha}(x') + \sigma'^{\alpha\beta}(x')\theta'_{\alpha\beta}(x') + \gamma'^5(x')\theta'_5(x')]\}.
\tag{13}
$$

若假定 γ^α 在广义坐标变换和规范变换下作如下的变换，

$$
\gamma^\alpha(x) \to \gamma^\alpha(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} V(g'(x'), \theta'(x'))\gamma'^\sigma(x')V^{-1}(g'(x')\theta'(x')),
\tag{14}
$$

(13)可写为

$$
\begin{aligned}
V(g'(x'), \theta'(x')) = V^{-1}(g'(x'), \theta'(x'))\exp\Big\{iG\Big[\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}\gamma^\sigma(x)\theta_\alpha(x)
&+ \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}\omega^\sigma(x)\theta_{5\alpha}(x) + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho}\sigma^{\sigma\rho}(x)\theta_{\alpha\beta}(x)\\
&+ \gamma^5(x)\theta_5(x)\Big]\Big\}V(g'(x'), \theta'(x'))
\end{aligned}
$$

$$= \exp\left\{ iG \left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \gamma^{\sigma}(x)\theta_{\alpha}(x) + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \omega^{\sigma}(x)\theta_{5\alpha}(x) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \sigma^{\sigma\rho}(x)\theta_{\alpha\beta}(x) + \gamma^5(x)\theta_5(x) \right]\right\}. \tag{15}$$

现在我们要求旋量粒子拉氏量在广义坐标变换和定域规范变换下不变，则(1)式应修改为

$$\mathscr{L}_s = \frac{\sqrt{-g}}{2}\{i\bar{\phi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iGW_{\mu})\phi - m\bar{\phi}\phi + \text{h.c.}\}, \tag{16}$$

其中

$$\bar{\phi} = \phi^{+}\beta, \quad \beta(\gamma^{\mu})^{+}\beta = \gamma^{\mu}, \tag{17}$$

β 是常数 Dirac 矩阵. (16)中各物理量的变换关系是

$$dx^{\mu} \to dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} dx'^{\sigma},$$
$$\phi(x) \to \phi(x) = V(g'(x'), \theta'(x'))\phi'(x'),$$
$$\gamma^{\mu}(x) \to \gamma^{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} V(g'(x')\theta'(x'))\gamma'^{\sigma}(x')V^{-1}(g'(x'), \theta'(x')),$$
$$W_{\mu}(x) \to W_{\mu}(x) = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\left[V(g'\theta')W'_{\sigma}V^{-1}(g'\theta') + \frac{1}{iG}V(g'\theta')\partial'_{\sigma}V^{-1}(g'\theta')\right]. \tag{18}$$

作为比较，下面给出杨-Mills 场理论相应的公式. 设 ϕ 分别是同位旋空间和普通空间的旋量，$SU(2)$ 的代数结构和 ϕ 场的拉氏函数是

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \quad \{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{19}$$
$$\mathscr{L}_s = i\bar{\phi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + igB_{\mu})\phi - m\bar{\phi}\phi, \tag{20}$$

(20)对下述变换不变，

$$\phi \to \phi = u\phi', \quad \tau_i \to \tau_i = u\tau'_i u^{-1},$$
$$B_{\mu} \to B_{\mu} = uB'_{\mu}u^{-1} + \frac{1}{ig}u\partial_{\mu}u^{-1},$$
$$u = e^{ig\tau_i\theta_i}. \tag{21}$$

把旋量规范场和杨-Mills 场进行比较，会发现它们的结构非常相似. 区别在于前者多了广义坐标变换，群结构常数是时空点的函数，后者则永远是常数.

三、规范场的拉氏函数

为写下规范场的拉氏函数，要先求到协变微分. 张量的协变微分是我们熟悉的，

$$D_{\sigma}T^{\alpha\beta\cdots}_{\mu\nu\cdots} = \partial_{\sigma}T^{\alpha\beta\cdots}_{\mu\nu\cdots} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}T^{\rho\beta\cdots}_{\mu\nu\cdots} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}T^{\alpha\rho\cdots}_{\mu\nu\cdots} + \cdots - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}T^{\alpha\beta\cdots}_{\rho\nu\cdots} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}T^{\alpha\beta\cdots}_{\mu\rho\cdots} - \cdots \tag{22}$$

下面是有关旋量及 γ 矩阵协变微分的几个例子

$$D_{\mu}\phi = (\partial_{\mu} + iGW_{\mu})\phi,$$
$$D_{\mu}\gamma^{\nu}\phi = \gamma^{\nu}D_{\mu}\phi + (D_{\mu}\gamma^{\nu})\phi,$$
$$D_{\mu}\gamma_{\nu}\phi = \gamma_{\nu}D_{\mu}\phi + (D_{\mu}\gamma_{\nu})\phi,$$
$$D_{\mu}\gamma^{\nu} = \partial_{\mu}\gamma^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}\gamma^{\rho} + iG[W_{\mu}, \gamma^{\nu}],$$
$$D_{\mu}\gamma_{\nu} = \partial_{\mu}\gamma_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\gamma_{\rho} + iG[W_{\mu}, \gamma_{\nu}]. \tag{23}$$

上式告诉我们，协变微分作用到 γ 矩阵和旋量的乘积上是线性的，因而可根据(23)作出更复杂的协变微分。本文假定时空无挠，则仿射联络 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ 对下标是对称的，并等于第二类 Christoffel 符号。张量的协变微分是协变的，即经过协变微分后，所得的仍是张量。对 γ 矩阵与旋量的乘积说，协变微分的意义可由下面式子看出来，

$$D_\mu \psi = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} V(g', \theta') D'_\sigma \psi',$$

$$D_\mu \gamma^\nu = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} V(g', \theta')(D'_\sigma \gamma'^\rho) V^{-1}(g', \theta'),$$

$$D_\mu \gamma_\nu = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} V(g', \theta')(D_\sigma \gamma_\rho) V^{-1}(g', \theta'). \tag{24}$$

由 ψ 可构造下面协变量

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = iGF_{\mu\nu}\psi,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + iG[W_\mu, W_\nu], \tag{25}$$

叫 $F_{\mu\nu}$ 为场强张量，它是协变量，即

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} V^{-1}(g', \theta') F_{\alpha\beta} V(g', \theta'). \tag{26}$$

我们对 W_μ 和 $F_{\mu\nu}$ 采用定域无穷小算符展开

$$W_\mu = \gamma^\alpha W_{\alpha\cdot\mu} + \omega^\alpha W_{5\alpha\cdot\mu} + \sigma^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta\cdot\mu} + \gamma^5 W_{5\cdot\mu}, \tag{27}$$

$$F_{\mu\nu} = \gamma^\alpha F_{\alpha\cdot\mu\nu} + \omega^\alpha F_{5\alpha\cdot\mu\nu} + \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\cdot\mu\nu} + \gamma^5 F_{5\cdot\mu\nu}, \tag{28}$$

其中 $W_{\alpha\cdot\mu}$, $W_{5\alpha\cdot\mu}$, $W_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}$ 是实场，$W_{5\cdot\mu}$ 是虚场，则

$$F_{\alpha\cdot\mu\nu} = \partial_\mu W_{\alpha\cdot\nu} - \partial_\nu W_{\alpha\cdot\mu} + 2iG(W_{5\alpha\cdot\mu}W_{5\cdot\nu} - W_{5\alpha\cdot\nu}W_{5\cdot\mu})$$
$$- 4Gg^{\sigma\rho}(W_{\sigma\cdot\mu}W_{\rho\alpha\cdot\nu} - W_{\sigma\cdot\nu}W_{\rho\alpha\cdot\mu}) + \frac{1}{8} S_p\{\gamma_\alpha, \varphi_{\mu\nu}\},$$

$$F_{5\alpha\cdot\mu\nu} = \partial_\mu W_{5\alpha\cdot\nu} - \partial_\nu W_{5\alpha\cdot\mu} + 2iG(W_{\alpha\cdot\mu}W_{5\cdot\nu} - W_{\alpha\cdot\nu}W_{5\cdot\mu})$$
$$- 4Gg^{\sigma\rho}(W_{5\sigma\cdot\mu}W_{\rho\alpha\cdot\nu} - W_{5\sigma\cdot\nu}W_{\rho\alpha\cdot\mu}) - \frac{1}{8} S_p\{\omega_\alpha, \varphi_{\mu\nu}\},$$

$$F_{\alpha\beta\cdot\mu\nu} = \partial_\mu W_{\alpha\beta\cdot\nu} - \partial_\nu W_{\alpha\beta\cdot\mu} + G(W_{\alpha\cdot\mu}W_{\beta\cdot\nu} - W_{\alpha\cdot\nu}W_{\beta\cdot\mu})$$
$$- G(W_{5\alpha\cdot\mu}W_{5\beta\cdot\nu} - W_{5\alpha\cdot\nu}W_{5\beta\cdot\mu}) - 4Gg^{\sigma\rho}(W_{\alpha\sigma\cdot\mu}W_{\rho\beta\cdot\nu}$$
$$- W_{\alpha\sigma\cdot\nu}W_{\rho\beta\cdot\mu}) + \frac{1}{16} S_p\{\sigma_{\alpha\beta}, \varphi_{\mu\nu}\},$$

$$F_{5\cdot\mu\nu} = \partial_\mu W_{5\cdot\nu} - \partial_\nu W_{5\cdot\mu} + 2iGg^{\alpha\beta}(W_{\alpha\cdot\mu}W_{5\beta\cdot\nu} - W_{\alpha\cdot\nu}W_{5\beta\cdot\mu})$$
$$+ \frac{1}{8} S_p\{\gamma^5, \varphi_{\mu\nu}\}, \tag{29}$$

其中

$$\varphi_{\mu\nu} = (\partial_\mu\gamma^\alpha)W_{\alpha\cdot\nu} - (\partial_\nu\gamma^\alpha)W_{\alpha\cdot\mu} + (\partial_\mu\omega^\alpha)W_{5\alpha\cdot\nu} - (\partial_\nu\omega^\alpha)W_{5\alpha\cdot\mu}$$
$$+ (\partial_\mu\sigma^{\alpha\beta})W_{\alpha\beta\cdot\nu} - (\partial_\nu\sigma^{\alpha\beta})W_{\alpha\beta\cdot\mu} + (\partial_\mu\gamma^5)W_{5\cdot\nu} - (\partial_\nu\gamma^5)W_{5\cdot\mu}. \tag{30}$$

对 W'_μ 和 $F'_{\mu\nu}$ 作类似的展开

$$W'_\mu = \gamma'^\alpha W'_{\alpha\cdot\mu} + \omega'^\alpha W'_{5\alpha\cdot\mu} + \sigma'^{\alpha\beta} W'_{\alpha\beta\cdot\mu} + \gamma'^5 W'_{5\cdot\mu}, \tag{31}$$

$$F'_{\mu\nu} = \gamma'^\alpha F'_{\alpha\cdot\mu\nu} + \omega'^\alpha F_{5\alpha\cdot\mu\nu} + \sigma'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta\cdot\mu\nu} + \gamma'^5 F'_{5\cdot\mu\nu}, \tag{32}$$

则

$$W'_{\alpha\cdot\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}}\left[W_{\sigma\cdot\nu}-\frac{1}{8iG}S_p\{\gamma_\sigma,V(g'\theta')\partial_\nu V^{-1}(g'\theta')\}\right]$$

$$W'_{5\alpha\cdot\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}}\left[W_{5\sigma\cdot\nu}+\frac{1}{8iG}S_p\{\omega_\sigma,V(g'\theta')\partial_\nu V^{-1}(g'\theta')\}\right]$$

$$W'_{\alpha\beta\cdot\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}}\left[W_{\sigma\rho\cdot\nu}-\frac{1}{16iG}S_p\{\sigma_{\sigma\rho},V(g'\theta')\partial_\nu V^{-1}(g'\theta')\}\right]$$

$$W'_{5\cdot\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\left[W_{5\cdot\nu}-\frac{1}{8iG}S_p\{\gamma^5,V(g'\theta')\partial_\nu V^{-1}(g'\theta')\}\right].\tag{33}$$

再由下式引进一组小写的w变量

$$W_{\alpha\cdot\mu}=w_{\alpha\cdot\mu}+\frac{1}{8iG}S_p(\omega_\alpha\partial_\mu\gamma^5),$$

$$W_{5\alpha\cdot\mu}=w_{5\alpha\cdot\mu}-\frac{1}{8iG}S_p(\gamma_\alpha\partial_\mu\gamma^5),$$

$$W_{\alpha\beta\cdot\mu}=w_{\alpha\beta\cdot\mu}-\frac{1}{4G}g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}+\frac{1}{16G}S_p(\gamma_\alpha\partial_\mu\gamma_\beta),$$

$$W_{5\cdot\mu}=w_{5\cdot\mu}+\frac{1}{32iG}g^{\alpha\beta}S_p(\gamma_\alpha\partial_\mu\omega_\beta).\tag{34}$$

可以证明，根据(18)和(33)，$F_{\alpha\cdot\mu\nu}$，$F_{5\alpha\cdot\mu\nu}$，$F_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}$，$F_{5\cdot\mu\nu}$，$w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$，$w_{5\cdot\mu}$ 是广义坐标变换下的张量规范变换下的标量.

虽然由(29)式定义的场强张量分量具有上述性质，但其表示式中，从(30)和(34)看出，它不仅包括 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$，$w_{5\cdot\mu}$ 这些张量以及它们的微分，还包括γ矩阵以及它们的微分，所以并不具有明显的协变性，我们还需要进一步简化. 为此，我们利用规范不变性. 注意到，对任意给定的 $g^{\alpha\beta}$，并不能把 γ^α 完全定下来，不同 γ^α 间允许相差一个规范变换. 换句话说，若 γ^α 满足(7)，则

$$\gamma'^{\alpha}=V\gamma^{\alpha}V^{-1},\tag{35}$$

也满足(7)式，其中V是规范群的连续元素. 数学上叫 γ^α 和 γ'^α 是两个相互等价的表示. 我们已经知道[10,5]，对任一给定的 $g^{\alpha\beta}$，存在一个表示，其中

$$\gamma^{\alpha}=e^{\alpha}_{a}\gamma^{a},\tag{36}$$

则一切和它等价的表示可通过(35)得到. 本文暂不讨论对一给定的 $g^{\alpha\beta}$ 有多少个不等价表示的问题[11]，并假定我们有兴趣的解都和解(36)等价. 这样，对任一组 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$，$w_{5\cdot\mu}$，若 γ^α 是满足(7)式的解，则总存在一个规范，其中 γ^α 取(36)的形式. 在这个规范，由(36)可证 $\gamma^5=\gamma^5_M$，特别叫这样的规范为 γ^5_M 规范，或简称 γ^5 规范. 在 γ^5 规范，(34)和(29)分别简化为

$$W_{\alpha\cdot\mu}=w_{\alpha\cdot\mu},\quad W_{5\alpha\cdot\mu}=w_{5\alpha\cdot\mu},\quad W_{5\cdot\mu}=w_{5\cdot\mu}$$

$$W_{\alpha\beta\cdot\mu}=w_{\alpha\beta\cdot\mu}-\frac{1}{4G}g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}+\frac{1}{16G}S_p(\gamma_\alpha\partial_\mu\gamma_\beta);\tag{37}$$

$$F_{\alpha\cdot\mu\nu}=f_{\alpha\cdot\mu\nu},\quad F_{5\alpha\cdot\mu\nu}=f_{5\alpha\cdot\mu\nu},\quad F_{5\cdot\mu\nu}=f_{5\cdot\mu\nu},$$

$$F_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}=-\frac{1}{4G}R_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}+f_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}\tag{38}$$

其中 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是四阶 Riemann 张量，

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha\cdot\mu\nu} &= D_\mu w_{\alpha\cdot\nu} - D_\nu w_{\alpha\cdot\mu} + 2iG(w_{5\alpha\cdot\mu}w_{5\cdot\nu} - w_{5\alpha\cdot\nu}w_{5\cdot\nu}) \\
&\quad - 4Gg^{\sigma\rho}(w_{\sigma\cdot\mu}w_{\rho\alpha\cdot\nu} - w_{\sigma\cdot\nu}w_{\rho\alpha\cdot\mu}), \\
f_{5\alpha\cdot\mu\nu} &= D_\mu w_{5\alpha\cdot\nu} - D_\nu w_{5\alpha\cdot\mu} + 2iG(w_{\alpha\cdot\mu}w_{5\cdot\nu} - w_{\alpha\cdot\nu}w_{5\cdot\mu}) \\
&\quad - 4Gg^{\sigma\rho}(w_{5\sigma\cdot\mu}w_{\rho\alpha\cdot\nu} - w_{5\sigma\cdot\nu}w_{\rho\alpha\cdot\mu}), \\
f_{5\cdot\mu} &= D_\mu w_{5\cdot\nu} - D_\nu w_{5\cdot\mu} + 2iGg^{\sigma\rho}(w_{\sigma\cdot\mu}w_{5\rho\cdot\nu} - w_{\sigma\cdot\nu}w_{5\rho\cdot\mu}), \\
f_{\alpha\beta,\mu\nu} &= D_\mu w_{\alpha\beta\cdot\nu} - D_\nu w_{\alpha\beta\cdot\mu} + G(w_{\alpha\cdot\mu}w_{\beta\cdot\nu} - w_{\alpha\cdot\nu}w_{\beta\cdot\mu}) \\
&\quad - G(w_{5\alpha\cdot\mu}w_{5\beta\cdot\nu} - w_{5\alpha\cdot\nu}w_{5\beta\cdot\mu}) - 4Gg^{\sigma\rho}(w_{\alpha\sigma\cdot\mu}w_{\rho\alpha\cdot\nu} \\
&\quad - w_{\alpha\sigma\cdot\nu}w_{\rho\alpha\cdot\mu}).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

这样，场强在 γ^5 规范便具有明显的协变形式.

在 γ^5 规范，我们还可以定义非协变表示，定义

$$
\begin{aligned}
W_{a\mu} &= e_a^\alpha W_{\alpha\cdot\mu}, & W_{5a\mu} &= e_a^\alpha W_{5\alpha\cdot\mu}, \\
W_{ab\mu} &= e_a^\alpha e_b^\beta W_{\alpha\beta\cdot\mu}, & W_{5\mu} &= W_{5\cdot\mu}, \\
F_{a\mu\nu} &= e_a^\alpha F_{\alpha\cdot\mu\nu}, & F_{5a\mu\nu} &= e_a^\alpha F_{\alpha\cdot\mu\nu}, \\
F_{ab\mu\nu} &= e_a^\alpha e_b^\beta F_{\alpha\beta\cdot\mu\nu}, & F_{5\mu\nu} &= F_{5\cdot\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

场量和场强张量可写为

$$
\begin{aligned}
W_\mu &= \gamma^a W_{a\mu} + \omega^a W_{5a\mu} + \sigma^{ab} W_{ab\mu} + \gamma_M^5 W_{5\mu}, \\
F_{\mu\nu} &= \gamma^a F_{a\mu\nu} + \omega^a F_{5a\mu\nu} + \sigma^{ab} F_{ab\mu\nu} + \gamma_M^5 F_{5\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_{a\mu\nu} &= \partial_\mu W_{a\nu} - \partial_\nu W_{a\mu} + 2iG(W_{5a\mu}W_{5\nu} - W_{5a\nu}W_{5\mu}) \\
&\quad - 4Gg^{bc}(W_{b\mu}W_{ca\nu} - W_{b\nu}W_{ca\mu}), \\
F_{5a\mu\nu} &= \partial_\mu W_{5a\nu} - \partial_\nu W_{5a\mu} + 2iG(W_{a\mu}W_{5\nu} - W_{a\nu}W_{5\mu}) \\
&\quad - 4Gg^{bc}(W_{5b\mu}W_{ca\nu} - W_{5b\nu}W_{ca\mu}), \\
F_{ab\mu\nu} &= \partial_\mu W_{ab\nu} - \partial_\nu W_{ab\mu} + G(W_{a\mu}W_{b\nu} - W_{a\nu}W_{b\mu}) \\
&\quad - G(W_{5a\mu}W_{5b\nu} - W_{5a\nu}W_{5b\mu}) - 4Gg^{cd}(W_{ac\mu}W_{db\nu} \\
&\quad - W_{ac\nu}W_{db\mu}), \\
F_{5\mu\nu} &= \partial_\mu W_{5\nu} - \partial_\nu W_{5\mu} + 2iGg^{ab}(W_{a\mu}W_{5b\nu} - W_{a\nu}W_{5b\mu}).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

这就是按目前流形的展开形式所得的结果，但是我们要强调自(36)式到(42)式，它们只在 γ^5 规范才成立.

γ^5 规范并不是一个确定的规范，在 γ^5 规范内部还允许作一组规范变换，它们是

$$
V(g', \theta') = \exp\left\{ iG \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \sigma^{\sigma\rho}(x)\theta_{\alpha\beta}(x) \right\}, \tag{43}
$$

我们看到，所谓 γ^5 规范实际上就是把 $SO(4,2)$ 群缩小到了它的 Lorentz 子群. 上式清楚地表明，$\theta_{\alpha\beta}$ 应解释为定域 Lorentz 转动角，但它并不是真正时空的 Lorentz 转动角，因为时空变换由 $\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}$ 这个变换矩阵代表. 又知道 $\theta_{\alpha\beta}$ 是广义坐标变换下的标量，也就是 Hilbert 空间的旋转，所以我们说，所谓 ψ 的旋量性质是 Hilbert 空间的性质，并且时空变换下 ψ 的行为必须通 Hilbert 空间的行为才能体现出来. 如果用非协变表示，就要不加区分地把(43)的指数统统用 σ^{ab} 展开，那就势必造成概念上的混乱.

现在可以根据杨-Mills 场的办法写下场的拉氏函数

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{16}\sqrt{-g}\,S_p(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})=-\frac{1}{4}\sqrt{-g}\,\{F_{a\cdot\mu\nu}F^{a\cdot\mu\nu}$$
$$-F_{5a\cdot\mu\nu}F^{5a\cdot\mu\nu}+2F_{a\beta\cdot\mu\nu}F^{a\beta\cdot\mu\nu}+F_{5\cdot\mu\nu}F^{5\cdot\mu\nu}\},\tag{44}$$

在 γ^5 规范

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{4}\sqrt{-g}\Big\{f_{a\cdot\mu\nu}f^{a\cdot\mu\nu}-f_{5a\cdot\mu\nu}f^{5a\cdot\mu\nu}+2\left(f_{a\beta\cdot\mu\nu}-\frac{1}{4G}R_{a\beta\mu\nu}\right)\Big(f^{a\beta\cdot\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{4G}R^{a\beta\mu\nu}\Big)+f_{5\cdot\mu\nu}f^{5\cdot\mu\nu}\Big\}=-\frac{1}{4}\sqrt{-g}\,\{F_{a\mu\nu}F^{a\mu\nu}-F_{5a\mu\nu}F^{5a\mu\nu}$$
$$+2F_{ab\mu\nu}F^{ab\mu\nu}+F_{5\mu\nu}F^{5\mu\nu}\}\tag{45}$$

为了确定什么是旋量规范场，我们把相应的杨-Mills 的结果用本文所用的体系表达出来. 对杨-Mills 场及场强作如下展开,

$$B_\mu=\tau_iB^i_\mu,\qquad B'_\mu=\tau'_iB'^i_\mu,\tag{46}$$
$$F_{\mu\nu}=\tau_iF^i_{\mu\nu},\qquad F'_{\mu\nu}=\tau'_iF'^i_{\mu\nu},$$

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu B^i_\nu-\partial_\nu B^i_\mu-g\varepsilon_{ijk}B^j_\mu B^k_\nu+\frac{1}{4}S_p\{\tau_i,\partial_\mu\tau_j\}B^j_\nu-\frac{1}{4}S_p\{\tau_i,\partial_\nu\tau_j\}B^j_\mu,\tag{47}$$

再将 B^i_μ 作如下分解,

$$B^i_\mu=b^i_\mu-\frac{1}{8g}\varepsilon_{ijk}S_p(\tau_j\partial_\mu\tau_k),\tag{48}$$

则 b^i_μ 是规范变换下的标量. 同样，我们暂不考虑不等价表示的问题[11]，假定任两个无穷小算符表示之间存在下述关系

$$\tau_i=u\tau'_iu^{-1},\tag{49}$$

其中 u 是 $SU(2)$ 的连续元素，则必有

$$\tau_i=e_{ia}\tau_a,\quad e_{ia}e_{ja}=\delta_{ij},\quad e_{ia}e_{ib}=\delta_{ab},$$
$$\varepsilon_{abc}e_{ia}e_{jb}=\varepsilon_{ijk}e_{kc},\tag{50}$$

其中拉丁字母 a、b、c 作为指标的 τ_a, τ_b, τ_c 是常数 Pauli 矩阵. 定义

$$B^a_\mu=e_{ia}B^i_\mu\qquad F^a_{\mu\nu}=e_{ia}F^i_{\mu\nu},\tag{51}$$

得

$$F_{\mu\nu}=\tau_aF^a_{\mu\nu},\quad F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu B^a_\nu-\partial_\nu B^a_\nu-g\varepsilon_{abc}B^b_\mu B^c_\nu.\tag{52}$$

(52)是我们熟悉的公式. 另一方面由(49)，我们作一个 u^{-1} 的规范变换，假定 τ'_i 是常数 Pauli 表示，则有

$$B^a_\mu=b^a_\mu,\quad F^a_{\mu\nu}=f^a_{\mu\nu}=\partial_\mu b^a_\nu-\partial_\nu b^a_\mu-g\varepsilon_{abc}b^b_\mu b^c_\nu.\tag{53}$$

规范场的拉氏量

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{8}S_p(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})=-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}\tag{54}$$

在常数 τ 规范

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{4}f^a_{\mu\nu}f^{a\mu\nu}.\tag{55}$$

这样我们就看到，对规范场说旋量规范的场量场强以及拉氏函数等，和杨-Mills 场有

共同的性质．对杨–Mills 场来说，作为一个理论不能取 b^i_μ 等于零，否则，这个理论是空的，所得的只是纯杨–Mills 场．对旋量规范场说，在 γ^5 规范，和 b^i_μ 相当的是 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$ 和 $w_{5\cdot\mu}$．若把 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$ 和 $w_{5\cdot\mu}$ 也解释为规范场，由于它们在拉氏函数中各分量不独立，那样建立的理论就不能保持对附加条件的无关性，或者说不同附加条件得到不同的理论．为消除这种任意性，我们必须取[12]

$$w_{\alpha\cdot\mu}=0,\quad w_{5\alpha\cdot\mu}=0,\quad w_{5\cdot\mu}=0. \tag{56}$$

$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$ 是不为零的，如果为零，这个理论将还原到一个没有规范场的弯曲空间理论．于是我们最后得到结论：在和 γ^5 规范等价的条件下，我们可以建立一个满足广义坐标变换不变和定域 V 不变的旋量规范场理论，和平直空间的情况一样，这个理论的对称性又等价于弯曲空间的定域 Lorentz 转动对称性．

四、讨　论

在建立旋量规范场理论的过程中，时空的几何性质始终是作为外在因素输入的．当这个理论建立之后，我们需要回头检验原来输入的东西能否和所建立的理论相容．首先是检验能否和平直时空相容．若时空是平直的，再假定 γ^α 和平直空间的 γ^a 等价，即

$$\gamma^\alpha\big|_{\alpha=a}=e^{iG\sigma^{cd}\theta_{cd}(x)}\gamma^a e^{-iG\sigma^{ef}\theta_{ef}(x)}. \tag{57}$$

其中 $\theta_{cd}(x)$ 是六个任意连续函数，通过规范条件可把它们完全定下来，可是这些量又重新出现在旋量粒子的动能项中，即使通过广义坐标变换也只能消除其中的四个．结果，理论将是规范有关的．因此必有 $w_{\alpha\beta\cdot\mu}$ 等于零．这样就回到平直时空的 Dirac 理论，所有旋量规范场都是平庸的纯规范场．这证明，旋量规范场和时空几何性质有密切联系．至于是否可以由旋量规范场存在的自洽性给出对 e^α_a 的某些限制，甚至定出它，是个十分有兴趣的问题[13]．同时我们还要指出，即使只承认某些规范是物理的，譬如 Lorentz 规范，并且 $e^\mu_a=\delta^\mu_a$．规范条件也不能完全解决 $\mathscr{L}_f$ 中出现的十二个场 W_{ij0}，W_{0ij} 的负能量问题，所以结论还是 $w_{\alpha\beta\cdot\mu}=0$．

另一个解决问题的便当办法是，暂时不必去追究理论是否规范无关，也暂时不必去追究能量是否恒正的问题，我们可以在已有的拉氏函数上加上一些和 e^α_a 有关的标量项，譬如说 Einstein 项

$$\mathscr{L}_E=K^{-1}\sqrt{-g}\,R, \tag{58}$$

看看会得出什么样的结论．这样就可把我们的理论和已有的一些理论比较．取全体 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{\alpha\beta\cdot\mu}$，$w_{5\cdot\mu}$ 等于零，便得到 Utiyama 理论．所以它不是一个规范理论，该问题已早被指出[6,14]．取 $w_{\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\alpha\cdot\mu}$，$w_{5\cdot\mu}$ 等于零，保留 $w_{\alpha\beta\cdot\mu}$，场的数目和 Kibble 理论一致，但实质是不同的．Kibble 理论是在 Riemann 空间建立的，我们是在 Riemann 空间和以自旋和正反粒子作为内部自由度的 Hilbert 空间的乘积空间建立的，因此，在我们的理论中不出现 Fermi 子的直接偶合项．

将旋量规范场理论推广到时空有挠情况，并同现有的有挠理论比较，显然是很有兴趣的．

最后，我要特别感谢同杨振宁教授、颜东茂教授、姚若鹏教授、李灵峰教授以及杜东生同志、朱重远同志非常有益的讨论.

参考文献

[1] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 191.
[2] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Reports*, **9**(1973), 1.
[3] A. Einstein, *Ann. der physik*, **49**(1916), 769.
[4] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**(1956), 1597.
[5] D. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**(1957), 465.
[6] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, **2**(1961), 212.
F. W. Hehl, P. Von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, *Rev. Mod. Phys.*, **48**(1976), 393.
[7] 刘耀阳，高能物理与核物理，**1**(1981), 17.
[8] M. J. G. Veltman, in Method in Field Theory, eds. R. Balian and J. Zin-Justin (1976, North-Holland Publishing Company, Amsterdam: New York. Oxford).
[9] A. O. Barut, *Phys. Rev.*, **135**(1964), B839.
[10] H. Weyl, *Zeits. Phys.*, **56**(1929), 330.
[11] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz and Y. Tyupkin, *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 85.
[12] 我要特别感谢杨振宁教授提醒我注意到这一点.
[13] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (Wiley, New York, 1972).
[14] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 445.

GRAVITATION AND SPINOR GAUGE FIELD

LIU YAO-YANG

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Basing on the Lorentz covariance and SO (4, 2) symmetry of Dirac theory, an obvious covariant theory of spinor gauge field is obtained by expanding the Lorentz transformation to general coordinate tranformation and making the SO (4, 2) to be localized. We have proved that, by the gauge independence, the symmetry group is reduced to the localized rotation of Lorentz group in Riemann space automatically. So our theory is the natural generalization of Dirac theory in curved space. We have also proved that, the spinor gauge field can not appear in flat space, then the existence of spinor gauge field is closely related to the curvature. The differences between our theory and Utiyama and Kibble theories are also discussed, and it is pointed out that the so-called scalar property of Dirac wave function in general relativity is a misunderstanding caused by the unobvious covariance of those theories, even in those theories we can not distinguish what is the genuine gauge field and what is the effect of the structure of space. In obvious covariant theory this paradox disappears.