第 6 卷 第 3 期　　高能物理与核物理　　Vol. 6, No. 3
1982 年 5 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　May, 1982

正则母单位的表达式

庄　勤
（东北师范大学）

摘　要

本文应用对称群理论得到了 n 个粒子在 j-j 耦合、l-s 耦合以及更高的对称性情况下正则母单位的表达式.

一、引　言

研究多体问题常会用到对称群的母单位，已有文献[1]给出了 5 个核子在 j-j 耦合下的正则母单位. 本文应用对称群理论推导出对任意粒子数 n 都适用的 j-j 耦合、l-s 耦合以及更高的对称性情况下的正则母单位表达式.

二、j-j 耦　合

用 $[\lambda]$ 表示 n 的配分，n 个粒子在 j-j 耦合下

$$[\lambda] = [2^a 1^b], \text{其中 } 2a + b = n$$

依对称群理论[2]正则母单位 $O^{[\lambda]}_{11}$ 可以表示为

$$O^{[\lambda]}_{11} = \frac{\theta'}{\theta}\{O^{[\lambda']}_{11} + C_1 O^{[\lambda']}_{11}(n-1, n)O^{[\lambda']}_{11} + C_2 O^{[\lambda']}_{1P}(n-1, n)O^{[\lambda']}_{P1}\}$$

其中 1, P 是杨盘标号，它们分别对应以下杨盘(图 1)：

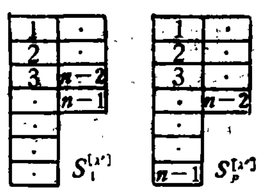


图 1

母单位是 $n!$ 个替换算符的组合，由 Rutherford 公式[2]易得：

$$O^{[\lambda']}_{11} = O^{[\lambda]}_{11} + O^{[\mu]}_{rr} + O^{[\nu]}_{ss}$$
$$O^{[\lambda']}_{1P} = O^{[\lambda]}_{1t} + O^{[\mu]}_{ru} + O^{[\nu]}_{sv}$$

其中 1, r, s, t, u, v 分别是下列杨盘(图 2)：

本文 1980 年 9 月 6 日收到.

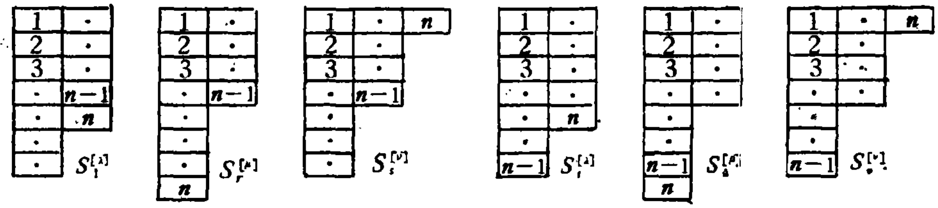


图 2

算符 $(n-1, n)$ 在其不可约表示中的矩阵为

$$U_{11}^{[\lambda]} = -1 \qquad U_{rr}^{[\mu]} = -\frac{1}{b+3} \qquad U_{ss}^{[\nu]} = \frac{1}{a-1}$$

$$U_{tt}^{[\lambda]} = \frac{1}{b+1} \qquad U_{uu}^{[\mu]} = -1 \qquad U_{vv}^{[\nu]} = \frac{1}{a+b+1}$$

利用以上结果可得

$$O_{11}^{[\lambda]} = \frac{\theta'}{\theta}\{O_{11}^{[\lambda]} + O_{rr}^{[\mu]} + O_{ss}^{[\nu]} + C_1(U_{11}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{rr}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{ss}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]})$$
$$+ C_2(U_{tt}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{uu}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{vv}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]})\}$$

比较系数

$$1 = \frac{\theta'}{\theta}\left(1 - C_1 + \frac{C_2}{b+1}\right),$$

$$0 = 1 - \frac{C_1}{b+3} - C_2,$$

$$0 = 1 - \frac{C_1}{a-1} + \frac{1}{a+b+1}C_2,$$

解得 $C_1 = -(a-1)\frac{b+3}{b+2}$，　$C_2 = \frac{a+b+1}{b+2}$，　$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{b+1}{a(b+2)}$，

即得

$$O_{11}^{[2^a1^b]} = \frac{\theta'}{\theta}\{O_{11}^{[2^{a-1}1^{b+1}]} + C_1 O_{11}^{[2^{a-1}1^{b+1}]}(n-1, n)O_{11}^{[2^{a-1}1^{b+1}]}$$
$$+ C_2 O_{1P}^{[2^{a-1}1^{b+1}]}(n-1, n)O_{P1}^{[2^{a-1}1^{b+1}]}\}.$$

同样可求得

$$O_{q1}^{[2^a1^b]} = \frac{\theta'}{\theta} C_3 O_{11}^{[2^a1^{b-1}]}(n-1, n)O_{P1}^{[2^{a-1}1^{b+1}]}.$$

其中

$$C_3 = a\sqrt{\frac{b+2}{b}}.$$

标号 q 是下面杨盘(图 3)：

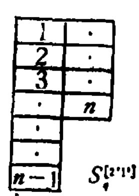


图 3

例如，当 $a=1$ 时，则有：

$$O_{11}^{[21^{n-2}]}=\frac{n-1}{n}\{O_{11}^{[1^{n-1}]}+O_{11}^{[1^{n-1}]}(n-1,\ n)O_{11}^{[1^{n-1}]}\}\ .$$

$$O_{q1}^{[21^{n-2}]}=\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\,O_{11}^{[21^{n-3}]}(n-1,\ n)O_{11}^{[1^{n-1}]}$$

三、*l-s* 耦 合

n 个粒子 l-s 耦合下，

$$[\lambda]=[4^a3^b2^c1^d]\ \text{满足}\ 4a+3b+2c+d=n$$

此时 $O_{11}^{[\lambda]}$ 可表为

$$O_{11}^{[\lambda]}=\frac{\theta'}{\theta}\{O_{11}^{[\lambda']}+C_1O_{11}^{[\lambda']}(n-1,\ n)O_{11}^{[\lambda']}+C_2O_{1P_1}^{[\lambda']}(n-1,\ n)O_{P_11}^{[\lambda']}$$
$$+C_3O_{1P_2}^{[\lambda']}(n-1,\ n)O_{P_21}^{[\lambda']}+C_4O_{1P_3}^{[\lambda']}(n-1,\ n)O_{P_31}^{[\lambda']}\}$$

其中 1, P_1, P_2, P_3 依次对应下列杨盘(图 4)：

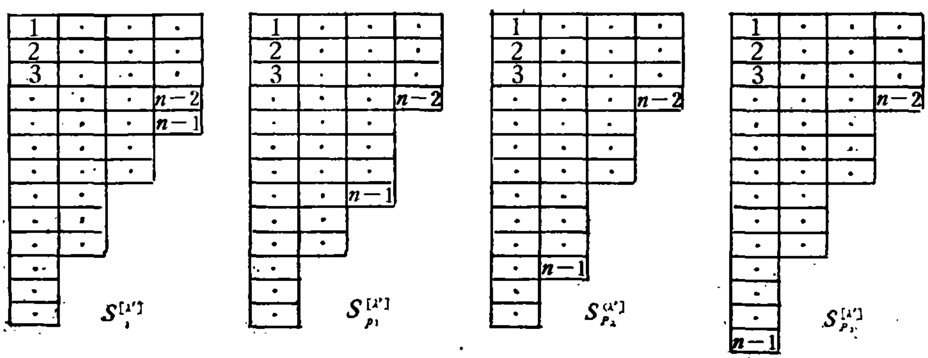


图 4

$S_1^{[\lambda']}$：是将 1、2、3、… $n-1$ 按次序填入.

$S_{P_1}^{[\lambda']}$：先将 $n-1$ 填在第三列第末格，其余数字按次序填入.

$S_{P_2}^{[\lambda']}$、$S_{P_3}^{[\lambda']}$ 依此类推.

同样可得到

$$O_{11}^{[\lambda']}=O_{11}^{[\lambda]}+O_{rr}^{[\mu]}+O_{ss}^{[\nu]}+O_{tt}^{[\rho]}+O_{uu}^{[\sigma]}$$
$$O_{1P_1}^{[\lambda']}=O_{1v}^{[\lambda]}+O_{rw}^{[\mu]}+O_{sx}^{[\nu]}+O_{ty}^{[\rho]}+O_{uz}^{[\sigma]}$$
$$O_{1P_2}^{[\lambda']}=O_{1e}^{[\lambda]}+O_{rf}^{[\mu]}+O_{sg}^{[\nu]}+O_{th}^{[\rho]}+O_{ui}^{[\sigma]}$$
$$O_{1P_3}^{[\lambda']}=O_{1j}^{[\lambda]}+O_{rk}^{[\mu]}+O_{sl}^{[\nu]}+O_{tm}^{[\rho]}+O_{un}^{[\sigma]}$$

标号 $1, r, s\cdots n$ 依次对应下列杨盘(图 5).

算符 $(n-1,\ n)$ 在其不可约表示中的矩阵是

$$U_{11}^{[\lambda]}=-1\qquad U_{vv}^{[\lambda]}=\frac{1}{b+1}\qquad U_{ee}^{[\lambda]}=\frac{1}{b+c+2}\qquad U_{jj}^{[\lambda]}=\frac{1}{b+c+d+3}$$

$$U_{rr}^{[\mu]}=-\frac{1}{b+3}\qquad U_{ww}^{[\mu]}=-1\qquad U_{ff}^{[\mu]}=\frac{1}{c}\qquad U_{kk}^{[\mu]}=\frac{1}{c+d+1}$$

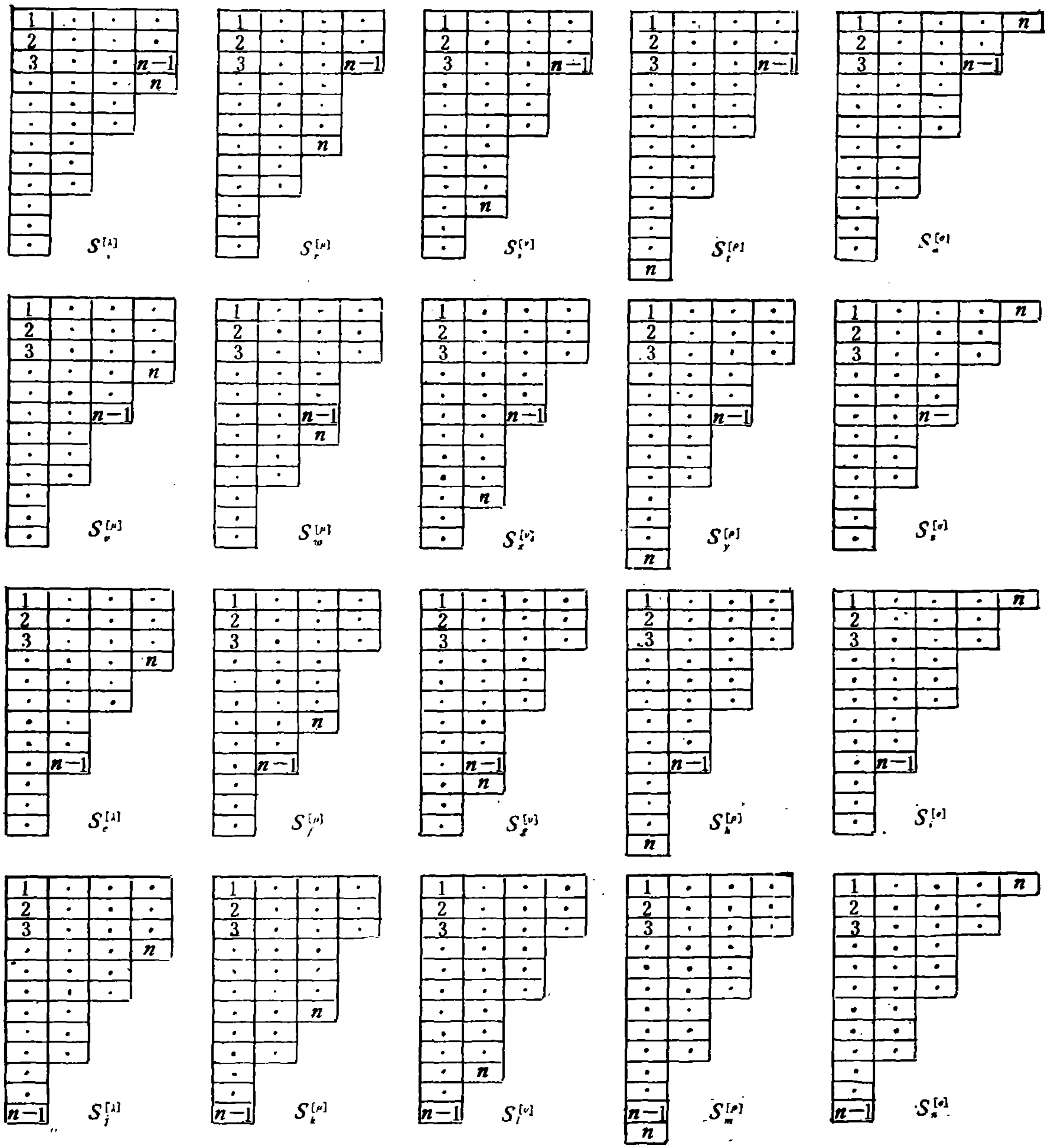


图　5

$$U^{[\nu]}_{ss}=\frac{-1}{b+c+4}\qquad U^{[\nu]}_{xx}=\frac{-1}{c+2}\qquad U^{[\nu]}_{gg}=-1\qquad U^{[\nu]}_{ll}=\frac{1}{d}$$

$$U^{[\rho]}_{tt}=\frac{-1}{b+c+d+5}\qquad U^{[\rho]}_{yy}=\frac{-1}{c+d+3}\qquad U^{[\rho]}_{hh}=\frac{-1}{d+2}\qquad U^{[\rho]}_{mm}=-1$$

$$U^{[\sigma]}_{uu}=\frac{1}{a-1}\qquad U^{[\sigma]}_{zz}=\frac{1}{a+b+1}\qquad U^{[\sigma]}_{ii}=\frac{1}{a+b+c+2}\qquad U^{[\sigma]}_{nn}=\frac{1}{a+b+c+d+3}$$

可得

$$
\begin{aligned}
O_{11}^{[\lambda]} = \frac{\theta'}{\theta}\{&(O_{11}^{[\lambda]} + O_{rr}^{[\mu]} + O_{ss}^{[\nu]} + O_{tt}^{[\rho]} + O_{uu}^{[\sigma]}) + C_1(U_{11}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{rr}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} \\
&+ U_{ss}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{tt}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{uu}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]}) + C_2(U_{vv}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{ww}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} \\
&+ U_{xx}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{yy}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{zz}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]}) + C_3(U_{ee}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{ff}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} \\
&+ U_{gg}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{hh}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{ii}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]}) + C_4(U_{jj}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{kk}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} \\
&+ U_{ll}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{mm}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{nn}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]})\}
\end{aligned}
$$

比较系数得.

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\theta'}{\theta}\{1 + C_1U_{11}^{[\lambda]} + C_2U_{vv}^{[\lambda]} + C_3U_{ee}^{[\lambda]} + C_4U_{jj}^{[\lambda]}\} \\
0 &= 1 + C_1U_{rr}^{[\mu]} + C_2U_{ww}^{[\mu]} + C_3U_{ff}^{[\mu]} + C_4U_{kk}^{[\mu]} \\
0 &= 1 + C_1U_{ss}^{[\nu]} + C_2U_{xx}^{[\nu]} + C_3U_{gg}^{[\nu]} + C_4U_{ll}^{[\nu]} \\
0 &= 1 + C_1U_{tt}^{[\rho]} + C_2U_{yy}^{[\rho]} + C_3U_{hh}^{[\rho]} + C_4U_{mm}^{[\rho]} \\
0 &= 1 + C_1U_{uu}^{[\sigma]} + C_2U_{zz}^{[\sigma]} + C_3U_{ii}^{[\sigma]} + C_4U_{nn}^{[\sigma]}
\end{aligned}
$$

解方程组即可定出 $C_1C_2C_3C_4$ 和 $\frac{\theta'}{\theta}$，从而可得出：

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{-(a-1)(b+3)(b+c+4)(b+c+d+5)}{(b+2)(b+c+3)(b+c+d+4)} \\
C_2 &= \frac{(a+b+1)(c+2)(c+d+3)}{(b+2)(c+1)(c+d+2)} \\
C_3 &= \frac{(a+b+c+2)(d+2)c}{(b+c+3)(c+1)(d+1)} \\
C_4 &= \frac{(a+b+c+d+3)(c+d+1)d}{(b+c+d+4)(c+d+2)(d+1)} \\
\frac{\theta'}{\theta} &= \frac{(b+1)(b+c+2)(b+c+d+3)}{a(b+2)(b+c+3)(b+c+d+4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
O_{11}^{[4^a3^b2^c1^d]} = \frac{\theta'}{\theta}\{&O_{11}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} + C_1O_{11}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}(n-1,n)O_{11}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} \\
&+ C_2O_{1P_1}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}(n-1,n)O_{P_11}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} \\
&+ C_3O_{1P_2}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}(n-1,n)O_{P_21}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} \\
&+ C_4O_{1P_3}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}(n-1,n)O_{P_31}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}\}
\end{aligned}
$$

同样可推导出 $O_{q1}^{[\lambda]}$ 的表达式：

$$
\begin{aligned}
O_{q_11}^{[4^a3^b2^c1^d]} &= \frac{\theta'}{\theta}C_5O_{11}^{[4^a3^{b-1}2^{c+1}1^d]}(n-1,n)O_{P_11}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} \\
O_{q_21}^{[4^a3^b2^c1^d]} &= \frac{\theta'}{\theta}C_6O_{11}^{[4^a3^b2^{c-1}1^{d+1}]}(n-1,n)O_{P_21}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]} \\
O_{q_31}^{[4^a3^b2^c1^d]} &= \frac{\theta'}{\theta}C_7O_{11}^{[4^a3^b2^c1^{d-1}]}(n-1,n)O_{P_31}^{[4^{a-1}3^{b+1}2^c1^d]}
\end{aligned}
$$

其中 q_1，q_2，q_3 依次对应下列杨盘(图 6).

$(n-1, n)$ 的矩阵为：

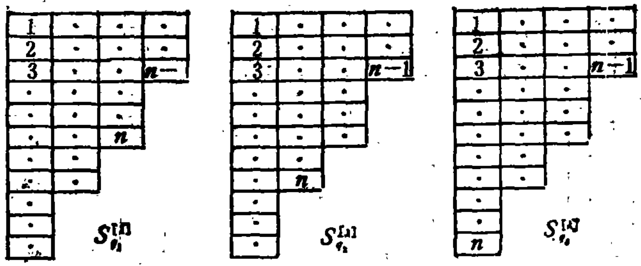


图 6

$$U_{q_1p}^{[\lambda]}=\sqrt{1-\frac{1}{(b+1)^2}},\ U_{q_2e}^{[\lambda]}=\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+2)^2}},\ U_{q_3j}^{[\lambda]}=\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+d+3)^2}}$$

从而可求出 C_5、C_6、C_7:

$$C_5=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+1)^2}}}=\frac{a(b+c+3)(b+c+d+4)}{(b+c+2)(b+c+d+3)}\sqrt{\frac{b+2}{b}}$$

$$C_6=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+2)^2}}}=\frac{a(b+2)(b+c+d+4)}{(b+1)(b+c+d+3)}\sqrt{\frac{b+c+3}{b+c+1}}$$

$$C_7=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+d+3)^2}}}=\frac{a(b+2)(b+c+3)}{(b+1)(b+c+2)}\sqrt{\frac{b+c+d+4}{b+c+d+2}}$$

四、更高的对称型

$$[\lambda]=[5^a4^b3^c2^d1^e],\ 5a+4b+3c+2d+e=n$$

$$\begin{aligned}O_{11}^{[\lambda]}=\frac{\theta'}{\theta}\{&O_{11}^{[\lambda']}+C_1O_{11}^{[\lambda']}(n-1,n)O_{11}^{[\lambda']}+C_2O_{1P_1}^{[\lambda']}(n-1,n)O_{P_11}^{[\lambda']}\\&+C_3O_{1P_2}^{[\lambda']}(n-1,n)O_{P_21}^{[\lambda']}+C_4O_{1P_3}^{[\lambda']}(n-1,n)O_{P_31}^{[\lambda']}\\&+C_5O_{1P_4}^{[\lambda']}(n-1,n)O_{P_41}^{[\lambda']}\}\end{aligned}$$

标号 1, P_1, P_2, P_3, P_4 依次对应下列杨盘(图 7).

$S_1^{[\lambda']}$: 是将 1,2… $n-1$ 按次序填入.

$S_{P_1}^{[\lambda']}$: 先将 $n-1$ 填在第四列第末格，其它数字按次序填入. $S_{P_2}^{[\lambda']}$、$S_{P_3}^{[\lambda']}$、$S_{P_4}^{[\lambda']}$ 依此类推。

同样也可得一组公式:

$$O_{11}^{[\lambda']}=O_{11}^{[\lambda]}+O_{rr}^{[\mu]}+O_{ss}^{[\nu]}+O_{tt}^{[\rho]}+O_{uu}^{[\sigma]}+O_{AA}^{[\phi]}$$

$$O_{1P_1}^{[\lambda']}=O_{1v}^{[\lambda]}+O_{rw}^{[\mu]}+O_{sx}^{[\nu]}+O_{ty}^{[\rho]}+O_{uz}^{[\sigma]}+O_{AE}^{[\phi]}$$

$$O_{1P_2}^{[\lambda']}=O_{1e}^{[\lambda]}+O_{rf}^{[\mu]}+O_{sg}^{[\nu]}+O_{th}^{[\rho]}+O_{ui}^{[\sigma]}+O_{AC}^{[\phi]}$$

$$O_{1P_3}^{[\lambda']}=O_{1j}^{[\lambda]}+O_{rk}^{[\mu]}+O_{sl}^{[\nu]}+O_{tm}^{[\rho]}+O_{un}^{[\sigma]}+O_{AD}^{[\phi]}$$

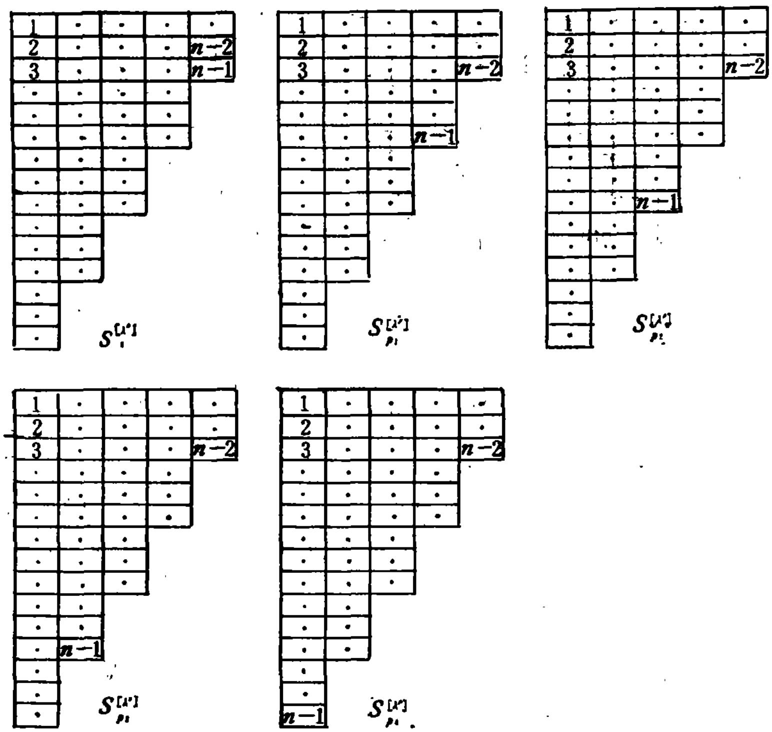


图 7

$$O^{[\lambda']}_{1P_4} = O^{[\lambda]}_{1F} + O^{[\mu]}_{rG} + O^{[\nu]}_{sI} + O^{[\rho]}_{tJ} + O^{[\sigma]}_{uL} + O^{[\phi]}_{AE}$$

标号 1, $r, s \cdots E$ 依次对应下列杨盘(图 8).

求得 $(n-1, n)$ 的矩阵:

$$U^{[\lambda]}_{11} = -1 \quad U^{[\lambda]}_{vv} = \frac{1}{b+1} \quad U^{[\lambda]}_{ee} = \frac{1}{b+c+2} \quad U^{[\lambda]}_{jj} = \frac{1}{b+c+d+3} \quad U^{[\lambda]}_{FF} = \frac{1}{b+c+d+e+4}$$

$$U^{[\mu]}_{rr} = \frac{-1}{b+3} \quad U^{[\mu]}_{ww} = -1 \quad U^{[\mu]}_{ff} = \frac{1}{c} \quad U^{[\mu]}_{kk} = \frac{1}{c+d+1} \quad U^{[\mu]}_{GG} = \frac{1}{c+d+e+2}$$

$$U^{[\nu]}_{ss} = \frac{-1}{b+c+4} \quad U^{[\nu]}_{xx} = \frac{-1}{c+2} \quad U^{[\nu]}_{gg} = -1 \quad U^{[\nu]}_{ll} = \frac{1}{d} \quad U^{[\nu]}_{II} = \frac{1}{d+e+1}$$

$$U^{[\rho]}_{tt} = \frac{-1}{b+c+d+5} \quad U^{[\rho]}_{yy} = \frac{-1}{c+d+3} \quad U^{[\rho]}_{hh} = \frac{-1}{d+2} \quad U^{[\rho]}_{mm} = -1 \quad U^{[\rho]}_{JJ} = \frac{1}{e}$$

$$U^{[\sigma]}_{uu} = \frac{-1}{b+c+d+e+6} \quad U^{[\sigma]}_{zz} = \frac{-1}{c+d+e+4} \quad U^{[\sigma]}_{ii} = \frac{-1}{d+e+3} \quad U^{[\sigma]}_{nn} = \frac{-1}{e+2} \quad U^{[\sigma]}_{LL} = -1$$

$$U^{[\phi]}_{AA} = \frac{1}{a-1} \quad U^{[\phi]}_{BB} = \frac{1}{a+b+1} \quad U^{[\phi]}_{CC} = \frac{1}{a+b+c+2} \quad U^{[\phi]}_{DD} = \frac{1}{a+b+c+d+3}$$

$$U^{[\phi]}_{EE} = \frac{1}{a+b+c+d+e+4}$$

则有:

$$
\begin{aligned}
O_{11}^{[\lambda]} = \frac{\theta'}{\theta}\{ & (O_{11}^{[\lambda]} + O_{rr}^{[\mu]} + O_{ss}^{[\nu]} + O_{tt}^{[\rho]} + O_{uu}^{[\sigma]} + O_{AA}^{[\phi]}) \\
& + C_1(U_{11}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{rr}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{ss}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{tt}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{uu}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]} + U_{AA}^{[\phi]}O_{AA}^{[\phi]}) \\
& + C_2(U_{vv}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{ww}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{xx}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{yy}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{zz}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]} + U_{BB}^{[\phi]}O_{AA}^{[\phi]}) \\
& + C_3(U_{ee}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{ff}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{gg}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{hh}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{ii}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]} + U_{CC}^{[\phi]}O_{AA}^{[\phi]}) \\
& + C_4(U_{jj}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{kk}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{ll}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{mm}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{nn}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]} + U_{DD}^{[\phi]}O_{AA}^{[\phi]}) \\
& + C_5(U_{FF}^{[\lambda]}O_{11}^{[\lambda]} + U_{GG}^{[\mu]}O_{rr}^{[\mu]} + U_{II}^{[\nu]}O_{ss}^{[\nu]} + U_{JJ}^{[\rho]}O_{tt}^{[\rho]} + U_{LL}^{[\sigma]}O_{uu}^{[\sigma]} + U_{EE}^{[\phi]}O_{AA}^{[\phi]})\}
\end{aligned}
$$

比较系数得出确定 $C_1C_2\cdots\frac{\theta'}{\theta}$ 的方程组：

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\theta'}{\theta}(1 + U_{11}^{[\lambda]}C_1 + U_{vv}^{[\lambda]}C_2 + U_{ee}^{[\lambda]}C_3 + U_{jj}^{[\lambda]}C_4 + U_{FF}^{[\lambda]}C_5) \\
0 &= 1 + U_{rr}^{[\mu]}C_1 + U_{ww}^{[\mu]}C_2 + U_{ff}^{[\mu]}C_3 + U_{kk}^{[\mu]}C_4 + U_{GG}^{[\mu]}C_5 \\
0 &= 1 + U_{ss}^{[\nu]}C_1 + U_{xx}^{[\nu]}C_2 + U_{gg}^{[\nu]}C_3 + U_{ll}^{[\nu]}C_4 + U_{II}^{[\nu]}C_5 \\
0 &= 1 + U_{tt}^{[\rho]}C_1 + U_{yy}^{[\rho]}C_2 + U_{hh}^{[\rho]}C_3 + U_{mm}^{[\rho]}C_4 + U_{JJ}^{[\rho]}C_5 \\
0 &= 1 + U_{uu}^{[\sigma]}C_1 + U_{zz}^{[\sigma]}C_2 + U_{ii}^{[\sigma]}C_3 + U_{nn}^{[\sigma]}C_4 + U_{LL}^{[\sigma]}C_5 \\
0 &= 1 + U_{AA}^{[\phi]}C_1 + U_{BB}^{[\phi]}C_2 + U_{CC}^{[\phi]}C_3 + U_{DD}^{[\phi]}C_4 + U_{EE}^{[\phi]}C_5
\end{aligned}
$$

从而可得表达式：

$$
\begin{aligned}
O_{11}^{[5^a4^b3^c2^d1^e]} = \frac{\theta'}{\theta}\{ & O_{11}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} + C_1O_{11}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} \cdot \\
& \cdot (n-1, n)O_{11}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} + C_2O_{1P_1}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}(n-1, n)O_{P_11}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} \\
& + C_3O_{1P_2}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}(n-1, n)O_{P_21}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} \\
& + C_4O_{1P_3}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}(n-1, n)O_{P_31}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]} \\
& + C_5O_{1P_4}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}(n-1, n)O_{P_41}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}\}
\end{aligned}
$$

同样还可推导出：

$$O_{q_11}^{[5^a4^b3^c2^d1^e]} = \frac{\theta'}{\theta}C_6O_{11}^{[5^a4^{b-1}3^{c+1}2^d1^e]}(n-1, n)O_{P_11}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}$$

$$O_{q_21}^{[5^a4^b3^c2^d1^e]} = \frac{\theta'}{\theta}C_7O_{11}^{[5^a4^b3^{c-1}2^{d+1}1^e]}(n-1, n)O_{P_21}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}$$

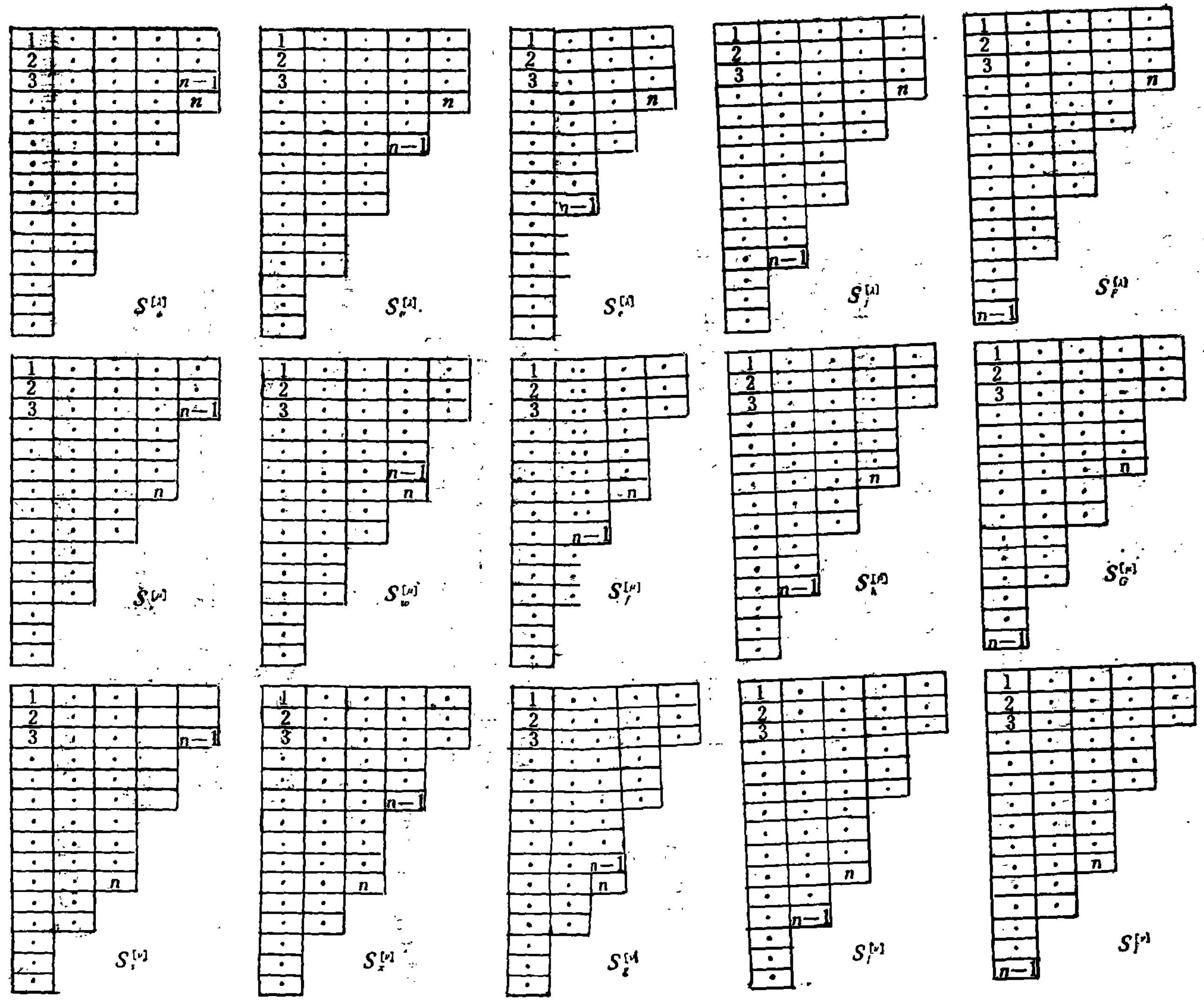
$$O_{q_31}^{[5^a4^b3^c2^d1^e]} = \frac{\theta'}{\theta}C_8O_{11}^{[5^a4^b3^c2^{d-1}1^{e+1}]}(n-1, n)O_{P_31}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}$$

$$O_{q_41}^{[5^a4^b3^c2^d1^e]} = \frac{\theta'}{\theta}C_9O_{11}^{[5^a4^b3^c2^d1^{e-1}]}(n-1, n)O_{P_41}^{[5^{a-1}4^{b+1}3^c2^d1^e]}$$

$\frac{\theta'}{\theta}$ 已给出，只需知 $(n-1, n)$ 的矩阵就可确定系数．q_1、q_2、q_3、q_4 对应下面杨盘(图 9)．

$$U_{q_1v}^{[\lambda]} = \sqrt{1 - \frac{1}{(b+1)^2}}, \qquad U_{q_2e}^{[\lambda]} = \sqrt{1 - \frac{1}{(b+c+2)^2}},$$

$$U_{q_3j}^{[\lambda]} = \sqrt{1 - \frac{1}{(b+c+d+3)^2}}, \qquad U_{q_4F}^{[\lambda]} = \sqrt{1 - \frac{1}{(b+c+d+e+4)^2}}$$



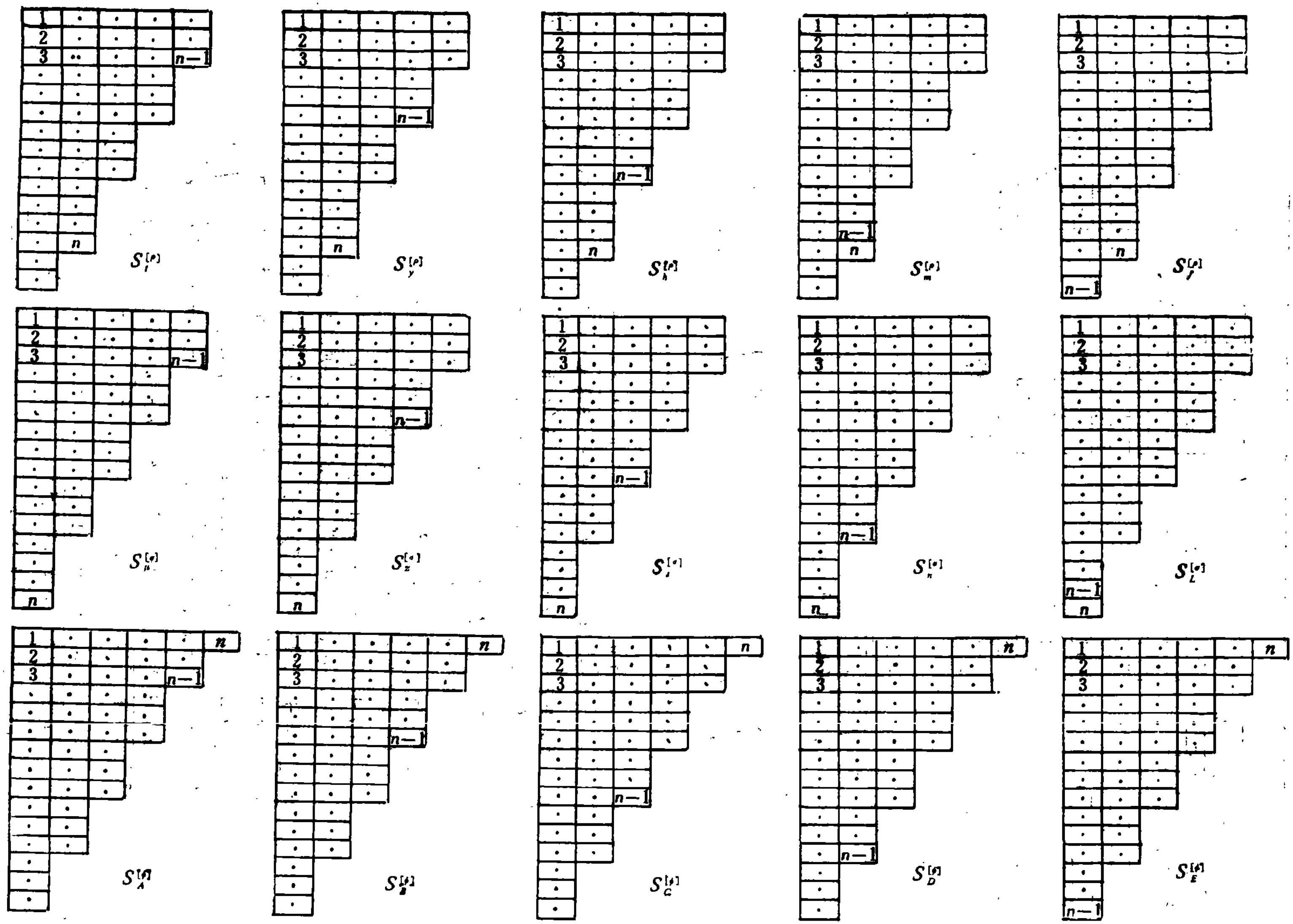

$S^{[\rho]}_{i}$
$S^{[\rho]}_{y}$
$S^{[\rho]}_{h}$
$S^{[\rho]}_{m}$
$S^{[\rho]}_{f}$
$S^{[\rho]}_{\mu}$
$S^{[\rho]}_{z}$
$S^{[\rho]}_{i}$
$S^{[\rho]}_{n}$
$S^{[\rho]}_{L}$
$S^{[\rho]}_{A}$
$S^{[\rho]}_{B}$
$S^{[\rho]}_{C}$
$S^{[\rho]}_{D}$
$S^{[\rho]}_{E}$

图 8

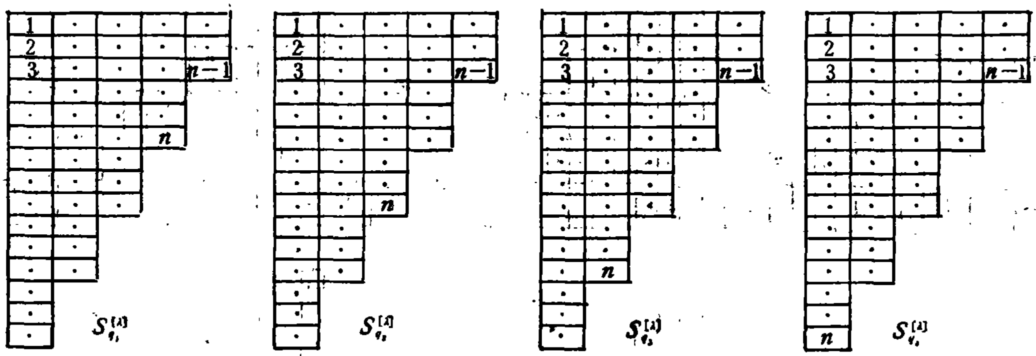


图 9

$$C_6=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+1)^2}}},\qquad C_7=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+2)^2}}}$$

$$C_8=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+d+3)^2}}},\qquad C_9=\frac{\theta}{\theta'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(b+c+d+e+4)^2}}}$$

下面列出所求得系数 C 及 $\frac{\theta'}{\theta}$：

$$C_1=\frac{-(a-1)(b+3)(b+c+4)(b+c+d+5)(b+c+d+e+6)}{(b+2)(b+c+3)(b+c+d+4)(b+c+d+e+5)}$$

$$C_2=\frac{(a+b+1)(c+2)(c+d+3)(c+d+e+4)}{(b+2)(c+1)(c+d+2)(c+d+e+3)}$$

$$C_3=\frac{(a+b+c+2)c(d+2)(d+e+3)}{(b+c+3)(c+1)(d+1)(d+e+2)}$$

$$C_4=\frac{(a+b+c+d+3)(c+d+1)d(e+2)}{(b+c+d+4)(c+d+2)(d+1)(e+1)}$$

$$C_5=\frac{(a+b+c+d+e+4)(c+d+e+2)(d+e+1)e}{(b+c+d+e+5)(c+d+e+3)(d+e+2)(e+1)}$$

$$\frac{\theta'}{\theta}=\frac{(b+1)(b+c+2)(b+c+d+3)(b+c+d+e+4)}{a(b+2)(b+c+3)(b+c+d+4)(b+c+d+e+5)}$$

$$C_6=\frac{a(b+c+3)(b+c+d+4)(b+c+d+e+5)}{(b+c+2)(b+c+d+3)(b+c+d+e+4)}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b}}$$

$$C_7=\frac{a(b+2)(b+c+d+4)(b+c+d+e+5)}{(b+1)(b+c+d+3)(b+c+d+e+4)}\cdot\sqrt{\frac{b+c+3}{b+c+1}}$$

$$C_8=\frac{a(b+2)(b+c+3)(b+c+d+e+5)}{(b+1)(b+c+2)(b+c+d+e+4)}\cdot\sqrt{\frac{b+c+d+4}{b+c+d+2}}$$

$$C_9=\frac{a(b+2)(b+c+3)(b+c+d+4)}{(b+1)(b+c+2)(b+c+d+3)}\cdot\sqrt{\frac{b+c+d+e+5}{b+c+d+e+3}}$$

这种方法可以推广到更高的对称类型中去.

参 考 文 献

[1] 孙洪洲, 北京大学学报, 2(1962).
[2] Rutherford, D. E. Substitutional Analysis (Edinburgh 1948).

THE EXPRESSION OF NORMAL UNITS

ZHUANG QIN
(*Northeast Normal University*)

ABSTRACT

By means of the theory of symmetric group, the expression of normal units of n particles in j-j coupling, l-s coupling and higher symmetry partition, is obtained.