第6卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 1
1982年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1982

s, d, g 玻色子相互作用中的三种极限

凌寅生
(江苏师范学院)

摘要

在 $I.B.M$ 中，当存在 s, d, g 玻色子时，玻色 Hamiltonian 具有 $U(15)$ 群结构. 本文讨论了 $U(15)$ 群的各种子群链. 特别详细研究了子群链

$$SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3),$$
$$SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3),$$
$$U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3).$$

同时给出了能谱公式.

仿照 Arima 的 $I.B.M$ 理论，同时存在 s, d, g 三种玻色子时，相互作用的 Hamiltonian 可以由 $U(15)$ 群的生成元所构成，称为具有 $U(15)$ 的群结构. 一般情况下，能谱只能用数值计算；在极限情况下，能谱可以有解析表式. 应用群论的方法，可以比较方便地导出这些解析表式.

一、$U(15)$ 群的生成元与对易关系

用 $b^+_{lm}(l=0,2,4;\ m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l)$ 表示玻色子产生算子 s^+, d^+_m, g^+_m；相应的玻色子消灭算子 s, d_m, g_m 记为 $b_{lm}(l=0,2,4;\ m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l)$. 定义

$$\tilde{b}_{lm}=(-1)^m b_{l,-m}, \tag{1}$$

在三维转动下，$\tilde{b}_{lm}$ 与 b^+_{lm} 一样，同为 l 阶不可约张量算子. 它们之间非零的对易关系为

$$[\tilde{b}_{l_1m_1}, b^+_{l_2m_2}]=(-1)^{m_1}\delta_{l_1l_2}\delta_{m_1,-m_2}. \tag{2}$$

定义 $SO(3)$ 的耦合张量算子

$$(b^+_{l_1}\tilde{b}_{l_2})^{(k)}_m=\sum_{m_1,m_2}\langle l_1m_1l_2m_2|km\rangle b^+_{l_1m_1}\tilde{b}_{l_2m_2}, \tag{3}$$

其中 $\langle l_1m_1l_2m_2|km\rangle$ 为 C-G 系数.

$(b^+_{l_1}\tilde{b}_{l_2})^{(k)}_m$ $(|l_1-l_2|\leqslant k\leqslant l_1+l_2;\ m=-k,-k+1,\cdots k-1,k)$ 之间的对易关系为[1,2]

$$[(b^+_{l_1}\tilde{b}_{l_2})^{(k_1)}_{m_1}, (b^+_{l_3}\tilde{b}_{l_4})^{(k_2)}_{m_2}]=\sum_{k,Q}[k_1,k_2,k]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k\\ m_1 & m_2 & -Q\end{pmatrix}$$

本文1981年1月30日收到.

$$\cdot(-1)^{Q}\left[(-1)^{k_1+k_2+k}\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l_4 & l_1 & l_2\end{Bmatrix}\delta_{l_2l_3}(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_4})_{Q}^{(k)}-\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l_3 & l_2 & l_1\end{Bmatrix}\delta_{l_1l_4}(b_{l_3}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{Q}^{(k)},\right] \quad (4)$$

其中

$$[k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1)}. \quad (5)$$

在对易关系(4)下,耦合张量算子

$$(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{m}^{(k)} \quad (|l_1-l_2|\leqslant k\leqslant l_1+l_2;\ m=-k, -k+1, \cdots k-1, k) \quad (6)$$

封闭. 它们的总数为 225 个,可以证明,它们是 $U(15)$ 群的生成元[3]. 用 s, d, g 符号表示,$U(15)$ 群的 225 个生成元为

$$\begin{aligned}
&(s^{+}s)_{0}^{(0)}\\
&(d^{+}\tilde{d})_{m}^{(k)} \quad (k=0—4)\\
&(s^{+}\tilde{d})_{m}^{(2)}\\
&(d^{+}s)_{m}^{(2)}\\
&(g^{+}\tilde{g})_{m}^{(k)} \quad (k=0—8)\\
&(s^{+}\tilde{g})_{m}^{(4)}\\
&(g^{+}s)_{m}^{(4)}\\
&(d^{+}\tilde{g})_{m}^{(k)} \quad (k=2—6)\\
&(g^{+}\tilde{d})_{m}^{(k)} \quad (k=2—6)
\end{aligned} \quad (7)$$

在上述 225 个生成元中去迹,即可得 $SU(15)$ 群的 224 个生成元.

由(4)式易得

$$[(b_l^{+}\tilde{b}_l)_{m_1}^{(k_1)}, (b_l^{+}\tilde{b}_l)_{m_2}^{(k_2)}]$$

$$=\sum_{k,Q}[k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k\\ m_1 & m_2 & -Q\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l & l & l\end{Bmatrix}(-1)^{Q}[(-1)^{k_1+k_2+k}-1](b_l^{+}\tilde{b}_l)_{Q}^{(k)}; \quad (8)$$

$$[(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_l)_{m_1}^{(k_1)}, (b_l^{+}\tilde{b}_l)_{m_2}^{(k_2)}]$$

$$=\sum_{k,Q}[k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k\\ m_1 & m_2 & -Q\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l & l_1 & l\end{Bmatrix}(-1)^{Q+k_1+k_2+k}(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_l)_{Q}^{(k)} \quad (9)$$

$$(l_1\neq l);$$

$$[(b_l^{+}\tilde{b}_{l_2})_{m_1}^{(k_1)}, (b_l^{+}\tilde{b}_l)_{m_2}^{(k_2)}]$$

$$=\sum_{k,Q}[k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k\\ m_1 & m_2 & -Q\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l & l_2 & l\end{Bmatrix}(-1)^{Q+1}(b_l^{+}\tilde{b}_{l_2})_{Q}^{(k)} \quad (10)$$

$$(l_2\neq l);$$

$$[(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{m_1}^{(k_1)}, (b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{m_2}^{(k_2)}]=0 \quad (l_1\neq l_2); \quad (11)$$

$$[(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{m_1}^{(k_1)}, (b_{l_2}^{+}\tilde{b}_{l_1})_{m_2}^{(k_2)}]$$

$$=\sum_{k,Q}[k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k\\ m_1 & m_2 & -Q\end{pmatrix}$$

$$\cdot(-1)^{Q}\left[(-1)^{k_1+k_2+k}\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l_1 & l_1 & l_2\end{Bmatrix}(b_{l_1}^{+}\tilde{b}_{l_1})_{Q}^{(k)}\right.$$

$$\left.-\begin{Bmatrix}k_1 & k_2 & k\\ l_2 & l_2 & l_1\end{Bmatrix}(b_{l_2}^{+}\tilde{b}_{l_2})_{Q}^{(k)}\right] \quad (12)$$

$(l_1\neq l_2)$.

用对易关系(4)及其推论(8)—(12)，很容易在 $U(15)$ 群中找到下列子群：

(I) $U(5)$　25 个生成元为

$$(d^+\tilde{d})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}4;\ m = -k, -k+1, \cdots, k-1, k). \tag{13}$$

它们之间的对易关系

$$[(d^+\tilde{d})^{(k_1)}_{m_1}, (d^+\tilde{d})^{(k_2)}_{m_2}] = \sum_{k,Q} [k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ m_1 & m_2 & -Q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} (-1)^Q [(-1)^{k_1+k_2+k} - 1](d^+\tilde{d})^{(k)}_Q; \tag{14}$$

(II) $U(9)$　81 个生成元为

$$(g^+\tilde{g})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}8;\ m = -k, -k+1, \cdots, k-1, k). \tag{15}$$

它们之间的对易关系

$$[(g^+\tilde{g})^{(k_1)}_{m_1}, (g^+\tilde{g})^{(k_2)}_{m_2}] = \sum_{k,Q} [k_1, k_2, k]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ m_1 & m_2 & -Q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ 4 & 4 & 4 \end{Bmatrix} (-1)^Q [(-1)^{k_1+k_2+k} - 1](g^+\tilde{g})^{(k)}_Q \tag{16}$$

(III) $U(6)$　36 个生成元为

$$\begin{aligned} &(s^+s)^{(0)}_0 \\ &(d^+\tilde{d})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}4) \\ &(s^+\tilde{d})^{(2)}_m \\ &(d^+s)^{(2)}_m; \end{aligned} \tag{17}$$

(IV) $U(10)$　100 个生成元为

$$\begin{aligned} &(s^+s)^{(0)}_0 \\ &(g^+\tilde{g})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}8) \\ &(s^+\tilde{g})^{(4)}_m \\ &(g^+s)^{(4)}_m; \end{aligned} \tag{18}$$

(V) $U(14)$　196 个生成元为

$$\begin{aligned} &(d^+\tilde{d})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}4) \\ &(g^+\tilde{g})^{(k)}_m \quad (k = 0\text{—}8) \\ &(d^+\tilde{g})^{(k)}_m \quad (k = 2\text{—}6) \\ &(g^+\tilde{d})^{(k)}_m \quad (k = 2\text{—}6). \end{aligned} \tag{19}$$

从对易关系(14)易证，$U(5)$ 群 (I) 中有下列子群：

$SU(5)$　生成元 (24 个)

$$(d^+\tilde{d})^{(k)}_m \quad (k = 1\text{—}4;\ m = -k, -k+1, \cdots, k-1, k) \tag{20}$$

$SO(5)$　生成元 (10 个)

$$\begin{aligned} &(d^+\tilde{d})^{(1)}_m \\ &(d^+\tilde{d})^{(3)}_m; \end{aligned} \tag{21}$$

$SO(3)$　生成元 (3 个)

$$(d^+\tilde{d})^{(1)}_m. \tag{22}$$

从对易关系(16)易证，$U(9)$ 群 (II) 中有下列子群：

$SU(9)$ 生成元 (80 个)

$$(g^+\tilde{g})^{(k)}_m \quad (k=1\text{—}8;\ m=-k,\ -k+1,\ \cdots,k-1,\ k); \tag{23}$$

$SO(9)$ 生成元 (36 个)

$$\begin{array}{l} (g^+\tilde{g})^{(1)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(3)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(5)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(7)}_m; \end{array} \tag{24}$$

$SO(3)$ 生成元 (3 个)

$$(g^+\tilde{g})^{(1)}_m. \tag{25}$$

在 $U(6)$ 群 (III) 中有三种具有物理意义的子群链，Arima 等人对此已经进行了详细的讨论，这里不再细述[4—6]。

在 $U(10)$ 群 (IV) 中，除有子群 $U(9)$ 外，尚有子群

$SO(10)$ 生成元 (45 个)

$$\begin{array}{l} (g^+\tilde{g})^{(1)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(3)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(5)}_m \\ (g^+\tilde{g})^{(7)}_m \\ (s^+\tilde{g})^{(4)}_m + (g^+s)^{(4)}_m \end{array} \tag{26}$$

利用这些生成元，很容易构造群链

$$\begin{array}{l} U(15)\supset U(6)\otimes U(9) \\ U(15)\supset U(5)\otimes U(10) \\ U(15)\supset U(1)\otimes U(14)\supset U(1)\otimes(U(5)\otimes U(9)). \end{array} \tag{27}$$

如果相互作用的 Hamiltonian 可以表成有关群链中各子群的 Casimir 算子的函数，则在由 s^+,d^+,g^+ 所生成的玻色空间中，按照有关的群链来划分态，就可以得到 Hamiltonian H 的本征态，能谱也可以有解析表达式. 但用(27)式中的群链来构造 Hamiltonian H，参数一般比较多，我们引入下面的群链

$$\begin{array}{l} SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3), \\ SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3), \\ U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3). \end{array} \tag{28}$$

这时构造所得的唯象 Hamiltonian 包含的参数个数分别只有 2、3、4 个.

二、$SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 极限

算子 b^+_{lm}, $\tilde{b}_{lm}$ 可看成为在群链

$$SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3)\supset SO(2). \tag{29}$$

下按下列一系列不可约表示变换的张量算子

$$b^+_{lm}=T\{[1\bar{0}](4,\ 0)\}lm, \tag{30}$$

$$\tilde{b}_{lm} = T\{[0\bar{1}](0, 4)\}lm. \tag{31}$$

其中$[1\bar{0}]$为由 s^+, d^+, g^+ 玻色子所荷载的 $SU(15)$ 群的初等表示，$[0\bar{1}]$为对应的共轭表示. (λ, μ) 为 $SU(3)$ 群不可约表示的标志,与配分 (f_1, f_2) 间的关系为

$$\lambda = f_1 - f_2, \quad \mu = f_2. \tag{32}$$

在 $SU(15)$ 群下

$$[1\bar{0}]\otimes[0\bar{1}] = [1\bar{1}]+[0\bar{0}], \tag{33}$$

在 $SU(3)$ 群下

$$(4,0)\otimes(0,4) = (4,4)+(3,3)+(2,2)+(1,1)+(0,0) \tag{34}$$

根据算子耦合的理论[2] 可知,利用不可约张量算子 b^+_{lm}, $\tilde{b}_{lm}$, 可以耦合成不可约张量算子

$$\begin{aligned} &X\{[1\bar{1}](1, 1)\}LM \\ &= \sum_{\substack{l_1m_1\\l_2m_2}} \langle[1\bar{0}](4, 0)l_1m_1, [0\bar{1}](0, 4)l_2m_2|[1\bar{1}](1, 1)LM\rangle b^+_{l_1m_1}\tilde{b}_{l_2m_2} \\ &(L = 1, 2) \end{aligned} \tag{35}$$

应用 Racah 因式分解引理，广义耦合系数可以写成一系列 $I.S.F$ 和 C-G 系数的乘积

$$\begin{aligned} &\langle[1\bar{0}](4, 0)l_1m_1, [0, \bar{1}](0, 4)l_2m_2|[1\bar{1}](1, 1)LM\rangle \\ &= \langle[1\bar{0}](4, 0), [0\bar{1}](0, 4)\|[1\bar{1}](1, 1)\rangle\langle(4, 0)l_1, (0, 4)l_2\|(1, 1)L\rangle \\ &\times \langle l_1m_1l_2m_2|LM\rangle, \end{aligned} \tag{36}$$

$SU(15)\supset SU(3)$ 的 $I.S.F$

$$\langle[1\bar{0}](4, 0), [0\bar{1}](0, 4)\|[1\bar{1}](1, 1)\rangle = 1, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad &X\{[1\bar{1}](1, 1)\}LM \\ &= \sum_{\substack{l_1m_1\\l_2m_2}} \langle(4, 0)l_1, (0, 4)l_2\|(1, 1)L\rangle\langle l_1m_1l_2m_2|LM\rangle b^+_{l_1m_1}\tilde{b}_{l_2m_2} \\ &= \sum_{l_1,l_2} \langle(4, 0)l_1(0, 4)l_2\|(1, 1)L\rangle(b^+_{l_1}\tilde{b}_{l_2})^{(L)}_M \end{aligned} \tag{38}$$

$\langle(4, 0)l_1, (0, 4)l_2\|(1, 1)L\rangle$ 为 $SU(3)\supset SO(3)$ 的 $I.S.F$, 可以通过查表[7] 或计算求出.

因为$[1\bar{1}]$为 $SU(15)$ 群的正则表示,$(1,1)$为 $SU(3)$ 群的正则表示, $L = 1, 2$ 时(38)式所给出的 8 个算子

$$X\{[1\bar{1}](1, 1)\}LM, \quad (L = 1, 2; M = -L, -L+1, \cdots, L-1, L), \tag{39}$$

必为

$$SU(15)\supset SU(3) \tag{40}$$

群链的生成元.

应用 Vergados 的 $SU(3)\supset SO(3)$ $I.S.F$ 表[7] 可得 $SU(15)\supset SU(3)$ 的 8 个生成元为

$$X\{[1\bar{1}](1, 1)\}1M = \sqrt{\frac{1}{7}}(d^+\tilde{d})^{(1)}_M + \sqrt{\frac{6}{7}}(g^+\tilde{g})^{(1)}_M,$$

$$\begin{aligned} X\{[1\bar{1}](1, 1)\}2M = \sqrt{\frac{1}{70}}\Big\{ &4\sqrt{\frac{7}{15}}[(s^+\tilde{d})^{(2)}_M + (d^+s)^{(2)}_M] - 11\cdot\sqrt{\frac{2}{21}}(d^+\tilde{d})^{(2)}_M \\ &+ 36\cdot\sqrt{\frac{1}{105}}[(d^+\tilde{g})^{(2)}_M + (g^+\tilde{d})^{(2)}_M] - 2\cdot\sqrt{\frac{33}{7}}(g^+\tilde{g})^{(2)}_M\Big\} \end{aligned} \tag{41}$$

假如相互作用的 Hamiltonian 可以表成

$$H = -\varepsilon Q \cdot Q - \varepsilon' \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{L} \tag{42}$$

其中 $\underset{\sim}{L}$ 为角动量算符

$$L_M = \sqrt{70}\, X\{[1\bar{1}](1,1)\}1M \tag{43}$$

$\underset{\sim}{Q}$ 为四极矩算符

$$Q_M = \sqrt{70}\, X\{[1\bar{1}](1,1)\}2M. \tag{44}$$

在 s^+, d^+, g^+ 所生成的玻色空间中，按照群链

$$SU(15) \supset SU(3) \supset SO(3) \tag{45}$$

分类的态，即为H的本征态，可记为

$$|[N](\lambda,\mu)KL;\alpha\rangle, \tag{46}$$

其中 $[N]$ 表示 $SU(15)$ 群的全对称表示；(λ,μ) 为 $SU(3)$ 群不可约表示的标志，α 表示所有其它所需要的附加量子数．能谱公式

$$\langle H\rangle = \left(\frac{3}{4}\varepsilon - \varepsilon'\right)L(L+1) - \varepsilon[\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda+\mu)]. \tag{47}$$

三、$SU(15) \supset SU(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$ 极限

在群链

$$SU(15) \supset SU(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \tag{48}$$

下，b^+_{lm}, $\tilde{b}_{lm}$ 可看成为不可约张量算子

$$b^+_{lm} = T\{[1\bar{0}](2000)\}lm, \tag{49}$$

$$\tilde{b}_{lm} = T\{[0\bar{1}](2222)\}lm. \tag{50}$$

其中 $(f_1 f_2 f_3 f_4)$ 为标志 $SU(5)$ 群不可约表示 Young 图的配分．

因为在 $SU(15)$ 群下

$$[1\bar{0}] \otimes [0\bar{1}] = [1\bar{1}] + [0\bar{0}], \tag{33}$$

在 $SU(5)$ 群下

$$(2000) \otimes (2222) = (4222) + (2111) + (0000) \tag{51}$$

所以，利用 b^+_{lm}, $\tilde{b}_{lm}$ 可耦合成不可约张量算子

$$\begin{aligned} X\{[1\bar{1}](2111)\}LM &= \sum_{\substack{l_1m_1\\ l_2m_2}} \langle [1\bar{0}](2000)l_1m_1, [0\bar{1}](2222)l_2m_2 | [1\bar{1}](2111)LM\rangle b^+_{l_1m_1}\tilde{b}_{l_2m_2} \\ &= \sum_{\substack{l_1m_1\\ l_2m_2}} \langle [1\bar{0}](2000), [0\bar{1}](2222) \| [1\bar{1}](2111)\rangle \langle (2000)l_1, (2222)l_2 \| (2111)L\rangle \\ &\quad \times \langle l_1m_1l_2m_2|LM\rangle b^+_{l_1m_1}\tilde{b}_{l_2m_2}. \quad (L = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{52}$$

$SU(15) \supset SU(5)$ 的 $I.S.F$

$$\langle [1\bar{0}](2000), [0\bar{1}](2222) \| [1\bar{1}](2111)\rangle = 1. \tag{53}$$

(52)式可以写成

$$X\{[1\bar{1}](2111)\}LM = \sum_{l_1l_2} \langle (2000)l_1, (2222)l_2 \| (2111)L\rangle (b^+_{l_1}\tilde{b}_{l_2})^{(L)}_M, \tag{54}$$

其中 $\langle(2000)l_1,(2222)l_2\|(2111)L\rangle$ 为 $SU(5)\supset SO(3)$ 的 $I.S.F.$

利用 $I.S.F$ 的计算公式可得[8]

$$\langle(2000)l_1,(2222)l_2\|(2111)L\rangle=(-1)^{\eta_1}\langle(2222)l_2,(2000)l_1\|(2111)L\rangle$$
$$=(-1)^{\eta_1}\sqrt{\frac{12}{7}}\langle(1111)2(1000)2\|(2111)L\rangle\langle(2222)l_2(1000)2\|(111)2\rangle$$
$$\cdot U(l_2 2L2;\ 2l_1), \tag{55}$$

其中 $U(l_2 2L2;\ 2l_1)$ 为 Racah 系数

$$U(l_2 2L2;\ 2l_1)=(-1)^{l_2+2+L+2}[2,l_1]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} l_2 & 2 & 2\\ 2 & L & l_1\end{Bmatrix}$$
$$=(-1)^{l_2+L}[2,l_1]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L\\ 2 & 2 & 2\end{Bmatrix}, \tag{56}$$

η_1 为只跟 $SU(5)$ 的表示 (2000)、(2222)、(2111) 有关的相因子，任意选择，不影响 $X\{[1\bar{1}](2111)\}LM$ 为群链

$$SU(15)\supset SU(5) \tag{57}$$

生成元的性质．今后我们选择 $\eta_1=0$.

由 $SU(5)\supset SO(3)$ $I.S.F$ 的正交关系、倒易关系[2] 可得

$$\langle(1111)2,(1000)2\|(2111)L\rangle=1,\quad (L=1,2,3,4) \tag{58}$$
$$\langle(2222)l_2,(1000)2\|(1111)2\rangle$$
$$=(-1)^{\eta_2}\cdot\sqrt{\frac{5(2l_2+1)}{15\times 5}}\langle(1000)2,(1000)2\|(2000)l_2\rangle$$
$$=(-1)^{\eta_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{15}}\cdot[l_2]^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

相因子 η_2 亦只跟 $SU(5)$ 群的表示有关，可选为零．

把(56)、(58)、(59)代人(55)得

$$\langle(2000)l_1,(2222)l_2\|(2111)L\rangle=(-1)^{l_2+L}\sqrt{\frac{4}{7}}[l_1,l_2]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L\\ 2 & 2 & 2\end{Bmatrix} \tag{60}$$

由此得

$$X\{[1\bar{1}](2111)\}1M=\sqrt{\frac{1}{7}}(d^+\tilde{d})^{(1)}_M+\sqrt{\frac{6}{7}}(g^+\tilde{g})^{(1)}_M,$$
$$X\{[1\bar{1}](2111)\}2M$$
$$=2\cdot\sqrt{\frac{1}{35}}[(s^+\tilde{d})^{(2)}_M+(d^+s)^{(2)}_M]-\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}(d^+\tilde{d})^{(2)}_M+\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{22}{7}}(g^+\tilde{g})^{(2)}_M$$
$$+\frac{12}{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{35}}[(d^+\tilde{g})^{(2)}_M+(g^+\tilde{d})^{(2)}_M],$$
$$X\{[1\bar{1}](2111)\}3M=-\frac{8}{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}(d^+\tilde{d})^{(3)}_M+\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{11}{7}}(g^+\tilde{d})^{(3)}_M$$
$$+\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{10}{7}}[(d^+\tilde{d})^{(3)}_M+(g^+\tilde{d})^{(3)}_M],$$

$$X\{[1\bar{1}](2111)\}4M = \frac{4}{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}(d^+\tilde{g})^{(4)}_M + \frac{1}{7}\cdot\sqrt{\frac{143}{35}}(g^+\tilde{d})^{(4)}_M$$
$$+\frac{1}{7}\cdot\sqrt{\frac{110}{7}}[(d^+\tilde{d})^{(4)}_M + (g^+\tilde{d})^{(4)}_M]$$
$$+2\cdot\sqrt{\frac{1}{35}}[(s^+\tilde{d})^{(4)}_M + (g^+s)^{(4)}_M]. \tag{61}$$

因为(2111)是 $SU(5)$ 群的正则表示,(61)中的24个算子一定是群链(57)的生成元.

如果我们令

$$U^{(k)}_m = \sqrt{7}\ X\{[1\bar{1}](2111)\}km,\quad (k=1,2,3,4) \tag{62}$$

则 $U^{(k)}_m$ 之间的对易关系即为(14).

由第一节中的讨论可知

$$U^{(1)}_m = \sqrt{7}X\{[1\bar{1}](2111)\}1m,\quad U^{(3)}_m = \sqrt{7}\ X\{[1\bar{1}](2111)\}3m, \tag{63}$$

为 $SO(5)$ 群的生成元;

$$U^{(1)}_m = \sqrt{7}\ X\{[1\bar{1}](2111)\}1m \tag{64}$$

为 $SO(3)$ 群的生成元.

采用[3]中的定义, $SU(5)$, $SO(5)$, $SO(3)$ 群的二次 Casimir 算符为

$$C_{2SU(5)} = 5\sum_{k=1,2,3,4}(-1)^k\cdot[k]^{1/2}(U^{(k)}\cdot U^{(k)})^{(0)}_0, \tag{65}$$

$$C_{2SO(5)} = 5\sum_{k=1,3}(-1)^k\cdot[k]^{\frac{1}{2}}(U^{(k)}\cdot U^{(k)})^{(0)}_0, \tag{66}$$

$$C_{2SO(3)} = L\cdot L, \tag{67}$$

其中

$$L_m = \sqrt{10}U^{(1)}_m. \tag{68}$$

如果相互作用的 Hamiltonian 可以表成

$$H = \varepsilon_1 C_{2SU(5)} + \varepsilon_2 C_{2SO(5)} + \varepsilon_3 C_{2SO(3)}, \tag{69}$$

则在 s^+, d^+, g^+ 所生成的玻色空间中,按照群链

$$SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3) \tag{70}$$

分类的态即为本征态,可用量子数

$$|[N](f_1f_2f_3f_4)(w_1w_2)L;\alpha\rangle \tag{71}$$

标志.其中 $[N]$ 为 $SU(15)$ 群的全对称表示; $(f_1f_2f_3f_4)$ 为标志 $SU(5)$ 群不可约表示 Young 图的配分; (w_1w_2) 标志 $SO(5)$ 群的不可约表示; L 为角动量; α 表示所有其它附加的量子数. 在上述本征态中, Casimir 算子的本征值为[3]

$$\langle C_{2SU(5)}\rangle = [f_1(f_1-1)+f_2(f_2-3)+f_3(f_3-5)+f_4(f_4-7)] - \frac{n^2-25n}{5}, \tag{72}$$

其中

$$n = f_1+f_2+f_3+f_4. \tag{73}$$

$$\langle C_{2SO(5)}\rangle = \frac{1}{2}[w_1(w_1+3)+w_2(w_2+1)], \tag{74}$$

$$\langle C_{2SO(3)}\rangle = L(L+1). \tag{75}$$

能谱公式

$$\langle H\rangle = \varepsilon_1\left\{[f_1(f_1-1)+f_2(f_2-3)+f_3(f_3-5)+f_4(f_4-7)] - \frac{n^2-25n}{5}\right\}$$
$$+\varepsilon_2\cdot\frac{1}{2}[w_1(w_1+3)+w_2(w_2+1)]+\varepsilon_3 L(L+1). \tag{76}$$

从 $SU(15)$ 的全对称表示 $[N]$ 向 $SU(5)$ 约化时，除全对称表示外，还会出现非全对称表示，所以 $SU(5)$ 的不可约表示要用 Young 图 $(f_1f_2f_3f_4)$ 标志。这是和 Arima 的 $SU(6)\supset SU(5)$ 极限不同的地方。

四、$U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 对称性

由第一节中的讨论可知，

$$\begin{array}{ll} (d^+\tilde{d})^{(k)}_m & (k=0\text{—}4) \\ (g^+\tilde{d})^{(k)}_m & (k=0\text{—}8) \\ (d^+\tilde{d})^{(k)}_m & (k=2\text{—}6) \\ (g^+\tilde{d})^{(k)}_m & (k=2\text{—}6) \end{array} \tag{19}$$

为 $U(14)$ 群的生成元；由第三节中的讨论可知

$$U^{(1)}_m = (d^+\tilde{d})^{(1)}_m + \sqrt{6}\,(g^+\tilde{g})^{(1)}_m, \tag{63'}$$
$$U^{(3)}_m = -\frac{8}{7}(d^+\tilde{d})^{(3)}_m + \frac{3}{7}\cdot\sqrt{11}\,(g^+\tilde{g})^{(3)}_m + \frac{3}{7}\cdot\sqrt{10}\,[(d^+\tilde{g})^{(3)}_m + (g^+\tilde{d})^{(3)}_m].$$

为 $SO(5)$ 群的生成元；

$$U^{(1)}_m = (d^+\tilde{d})^{(1)}_m + \sqrt{6}\,(g^+\tilde{g})^{(1)}_m \tag{64'}$$

为 $SO(3)$ 群的生成元。因此，在 $U(15)$ 群中可得群链

$$U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3). \tag{77}$$

如果相互作用的 Hamiltonian 可以表示成

$$H = \varepsilon_1 C_{1U(14)} + \varepsilon_2 C^2_{1U(14)} + \varepsilon_3 C_{2SO(5)} + \varepsilon_4 C_{2SO(3)} \tag{78}$$

其中 $C_{1U(14)}$ 为 $U(14)$ 群的一次 Casimir 算符：

$$C_{1U(4)} = \sum_m d^+_m d_m + \sum_m g^+_m g_m, \tag{79}$$

则在群链(77)的分类下，可以得到本征态

$$|[N],\, n_d+n_g,\, (w_1w_2)L_j\alpha\rangle \tag{80}$$

其中 n_d+n_g 表示 d 玻色子与 g 玻色子粒子数之和，标志了 $U(14)$ 群的全对称表示；α 为在群链(78)的分类下，所需要附加的量子数。

本征值

$$\langle H\rangle = \varepsilon_1(n_d+n_g)+\varepsilon_2(n_d+n_g)^2+\varepsilon_3\cdot\frac{1}{2}[w_1(w_1+3)$$
$$+w_2(w_2+1)]+\varepsilon_4 L(L+1). \tag{81}$$

当玻色子总数N一定时，$n_d + n_g$可以取值

$$0, 1, 2, \cdots, N.$$

因此，(81)中的第一项为简谐振动的能量.

五、和实验的比较

$SU(15)\supset SU(3)$极限，$SU(15)\supset SU(5)$极限和$U(15)\supset U(14)$极限中的Hamiltonian，分别和Arima理论中的$SU(6)\supset SU(3)$，$SU(6)\supset SO(6)$和$U(6)\supset U(5)$极限中的Hamiltonian形式相同或者很相象：

s, d IBM	*s, d, g IBM*
I. $U(6)\supset U(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 极限	I. $U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 极限
$H = \varepsilon_1 C_{1U(5)} + \varepsilon_2 C_{1U(5)}^2 + \varepsilon_3 C_{2SO(5)} + \varepsilon_4 C_{2SO(3)}$	$H = \varepsilon_1 C_{1U(14)} + \varepsilon_2 C_{1U(14)}^2 + \varepsilon_3 C_{2SO(5)} + \varepsilon_4 C_{2SO(3)}$
II. $SU(6)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 极限	II. $SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 极限
$H = -\varepsilon Q\cdot Q - \varepsilon' L\cdot L = \varepsilon_1 C_{2SU(3)} + \varepsilon_2 C_{2SO(3)}$	$H = -\varepsilon \underset{\sim}{Q}\cdot \underset{\sim}{Q} - \varepsilon' \underset{\sim}{L}\cdot \underset{\sim}{L} = \varepsilon_1 C_{2SU(3)} + \varepsilon_2 C_{2SO(3)}$
III. $SU(6)\supset SO(6)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 极限	III. $SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 极限
$H = \varepsilon_1 C_{2SO(6)} + \varepsilon_2 C_{2SO(5)} + \varepsilon_3 C_{2SO(3)}$	$H = \varepsilon_1 C_{2SU(5)} + \varepsilon_2 C_{2SO(5)} + \varepsilon_3 C_{2SO(3)}$

表1 $U(15)$的全对称表示[5]按群链$U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3)$的约化

$U(15)$	$U(14)$	$SO(5)$		$SO(3)$
$[N]$	$[n_{d+g}]$	(ω_1, ω_2)	n_Δ	L
[5]	[0]	(0, 0)	0	0
	[1]	(2, 0)	0	4, 2
	[2]	(4, 0)	0	8, 6, 5, 4
			1	2
		(2, 2)	0	6, 4, 3, 0
			1	2
	[3]	(6, 0)	0	12, 10, 9, 8, 7, 6
			1	6, 4, 3
			2	0
	[4]	(8, 0)	0	16, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8
			1	10, 8, 7, 6, 5
			2	4, 2
	[5]	(10, 0)	0	20, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10
			1	14, 12, 11, 10, 9, 8, 7
			2	8, 6, 5, 4
			3	2

由于引入了g玻色子，表示空间扩大，这给态的标志增加了麻烦，但是，可以包含比较多的谱项. 在Arima的理论中，当玻色子总数为N时，角动量的取值只能从0—$2N$，而且其中不包含$L = 1$与$2N - 1$的项. 引进g玻色子后，角动量的取值能从0—$4N$，$L = 1$与$2N - 1$的正宇称项也能够得到说明. 因此，大角动量项与1^+项、$(2N-1)^+$项能谱的出现，可以看作为存在高角动量玻色子的信息.

例 1 $^{106}_{48}Cd_{58}$

$^{106}_{48}Cd_{58}$ 的玻色子总数 $N=5$，在 Arima 的理论中不能描述能谱中的 9^+ 项与 12^+ 项．因为 $^{106}_{48}Cd_{58}$ 位于壳层的开始部分，故试用 $U(15)\supset U(14)$ 极限来近似描述它的能谱．

$U(15)$ 的全对称表示[5]按群链

$$U(15)\supset U(14)\supset SO(5)\supset SO(3) \tag{77'}$$

的约化见表 1．$U(14)$ 的全对称表示 [3—5] 向 $SO(5)$ 约化时，我们只列出了 $SO(5)$ 的 w_1 最大的全对称表示．只要(81)式中的参数 $\varepsilon_3<0$，可以认为这些表示所给出的能级比较低．

记 $n_{d+g}=n_d+n_g$，当我们只考虑 $SO(5)$ 的对称性最高的全对称表示 $(2n_{d+g},0)$ 时，能谱公式(81)可以改写为

$$\begin{aligned}\langle H\rangle &= \varepsilon_1 n_{d+g}+\varepsilon_2 n_{d+g}^2+\varepsilon_3\cdot n_{d+g}(2n_{d+g}+3)+\varepsilon_4 L(L+1)\\ &= a n_{d+g}+6 n_{d+g}^2+\varepsilon_4 L(L+1).\end{aligned} \tag{82}$$

其中

$$a=\varepsilon_1+3\varepsilon_3,\quad b=\varepsilon_2+6\varepsilon_3. \tag{83}$$

取 $a=1394$keV．$b=-250.3$keV．$\varepsilon_4=17.50$keV．计算所得的 $^{106}_{48}Cd_{58}$ 的能级如图 1，表 2 所示．这里只调了 3 个参数，理论和实验的符合是满意的．

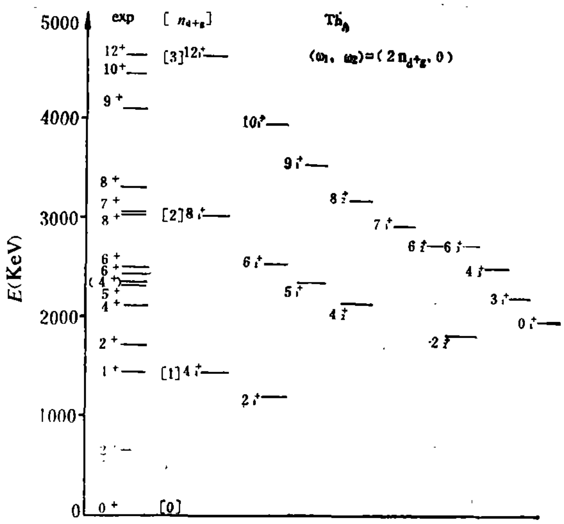

图 1　$U(15)\supset U(14)$ 极限下 $^{106}_{48}Cd_{58}$ 的能谱

参数 $a=1394$keV；$b=-250.3$keV；$\varepsilon_4=17.50$keV．

例 2 $^{176}_{72}Hf_{104}$

$^{176}_{72}Hf_{104}$ 具有转动谱，它的能谱中有 1^+ 项．

$^{176}_{72}Hf_{104}$ 的玻色子总数 $N=16$．$SU(15)$ 的全对称表示[16]向 $SU(3)$ 约化时可得

$$[16]=(64,0)\oplus(60,2)\oplus(58,3)\oplus(56,4)\oplus\cdots \tag{84}$$

由此可得 $^{176}_{72}Hf_{104}$ 的理论能谱如图 2 所示．

表 2 $U(15)\supset U(14)$ 极限下 ${}^{106}_{48}\mathrm{Cd}_{58}$ 能级理论值与实验值的比较

L^π	E_{th}(keV)	E_{exp}(keV)	L^π	E_{th}(keV)	E_{exp}(keV)
0_1^+	0	0	6_1^+	2522	2492
2_1^+	1248	633	6_2^+	2664	2503
4_1^+	1494	1494	6_3^+	2664	
2_2^+	1893	1717	7_1^+	2909	3084
0_2^+	1929		8_1^+	3047	3044
4_2^+	2137	2105	8_2^+	3189	3367
3_1^+	2139		(9_1^+)	3504	4121
5_1^+	2312	2331	10_1^+	3854	4436
(4_3^+)	2279	2339	12_1^+	4659	4660

参数 $a = 1394$keV. $b = -250.3$keV. $\varepsilon_4 = 17.50$keV.
实验数据取自 Nuclear Data Sheets 1980. 7 Vol. 30 No.

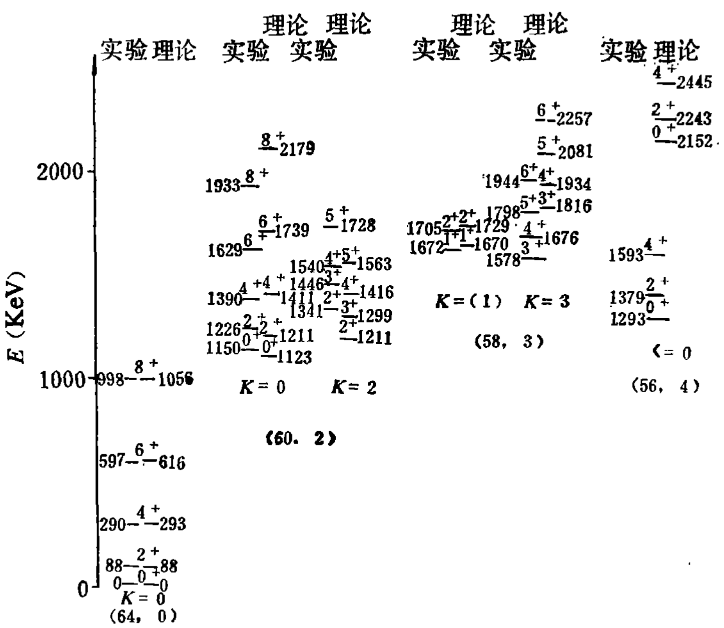

图 2 $SU(15)\supset SU(3)$ 极限下 ${}^{176}_{72}\mathrm{Hf}_{104}$ 能谱的理论值与实验值的比较
参数 $\varepsilon = 2.944$keV; $\varepsilon' = -12.46$keV
实验数据取自 Nuclear Data Sheets **19** (1976), 383.

例 3 $^{204}_{82}Pb_{122}$

$^{204}_{82}Pb_{122}$ 的玻色子总数 $N=2$，应用 Arima 理论只能描述 4 个谱项(图 3).

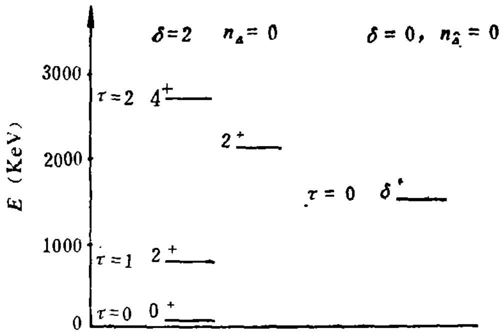

图 3　$SU(6)\supset SU(3)$ 极限下 $^{204}_{82}Pb_{122}$ 的理论能谱态矢量的标记：$|[N]\sigma\tau n_\Delta LM\rangle$

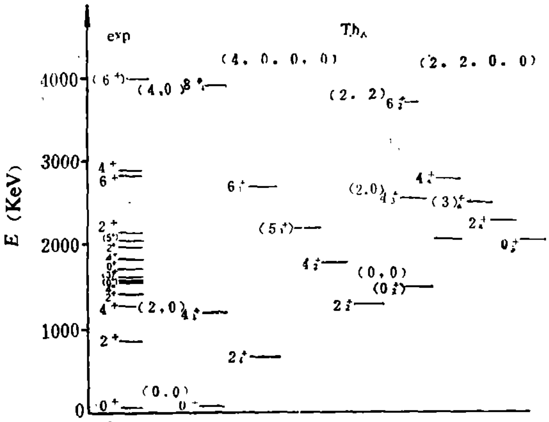

图 4　$SU(15)\supset SU(5)$ 极限下 $^{204}_{82}Pb_{122}$ 的能谱参数　$\varepsilon_1=117$keV，$\varepsilon_2=70$keV，$\varepsilon_3=40$keV，(f_1, f_2, f_3, f_4) 为 $SU(5)$ 群不可约表示的标志，(w_1, w_2) 为 $SO(5)$ 群不可约表示的标志

在 $SU(15)\supset SU(5)$ 极限中，群的约化为

表 3　$SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 的约化

$SU(15)$ $[N]$	$SU(5)$ (f_1, f_2, f_3, f_4)	$SO(5)$ (w_1, w_2)	$SO(3)$ L
[0]	(0, 0, 0, 0)	(0, 0)	0
[1]	(2, 0, 0, 0)	(2, 0)	4, 2
		(0, 0)	0
[2]	(4, 0, 0, 0)	(4, 0)	8, 6, 5, 4, 2
		(2, 0)	4, 2
		(0, 0)	0
	(2, 2, 0, 0)	(2, 2)	6, 4, 3, 2, 0
		(2, 0)	4, 2
		(0, 0)	0

表 4　$SU(15)\supset SU(5)$ 极限下 $^{204}_{82}Pb_{122}$ 能谱理论值与实验值的比较

L^π	E_{th}(keV)	E_{exp}(keV)	L^π	E_{th}(keV)	E_{exp}(keV)
0_1^+	0	0	$(5_1)^+$	2180	2065
2_1^+	590	899	2_4^+	2204	2103
4_1^+	1150	1274	$(3_1)^+$	2444	1605
2_2^+	1220	1354	4_3^+	2554	1817
(0_2^+)	1404	1582	6_1^+	2660	2808
4_2^+	1780	1563	4_4^+	2764	2897
0_3^+	1964	1728	(6_2^+)	3644	3996
2_3^+	1994	1958	8_1	3860	

参数 $\varepsilon_1=117$keV，$\varepsilon_2=70$keV，$\varepsilon_3=40$keV.

实验数据取自 Nuclear Data Sheets 1979. 8 Vol 27. No. 4

玻色子总数 $N \leqslant 2$ 时，态可以标记为

$$|[N](f_1, f_2, f_3, f_4)(w_1, w_2)LM\rangle.$$

当能谱公式(76)中的参数取成 $\varepsilon_1 = 117\text{keV}$, $\varepsilon_2 = 70\text{keV}$, $\varepsilon_3 = 40\text{keV}$ 时，理论计算的能谱数值和实验的比较见图 4，表 4：

综观偶偶核的能谱，在低能区大角动量的能级比较少见，s、d IBM 是一种很好的近似. 在高能区可以考虑引进高角动量的玻色子.

参 考 文 献

[1] F. Iachello: An Introduction to the interacting boson model dutch summer school (1980).
[2] B. G. Wybourne: Classical Groups For Physicists A Wiley-Interscience Publication (1974).
[3] B. F. 贝衣曼著 石生明译 群论及其在核谱学中的应用，上海科学技术出版社，(1963).
[4] A. Arima and F. Iachello. *Ann. Phys.*, **99**(1976), 253.
[5] A. Arima and F. Iachello: *Ann. Phys.*, **111**(1978), 201.
[6] A. Arima and F. Iachello: *Ann. Phys.*, **123**(1979), 468.
[7] J. D. Vergados: *Nucl. Phys.*, **A111**(1968), 681.
[8] 陈金全、王凡、高美娟，物理学报，**27**(1978), 31.

THREE LIMITS IN THE INTERACTIONS OF THE s, d, g, BOSONS

LING YIN-SHENG

(Jiangsu Teachers' College Ling Yinsheng)

ABSTRACT

In the *I. B. M.*, when s, d, g bosons are presented, the boson Hamiltonian has the structure of group $U(15)$. This paper deals with the various chains of subgroups of group $U(15)$. Especially, the following chains:

$$SU(15) \supset SU(3) \supset SO(3),$$
$$SU(15) \supset SU(5) \supset SO(5) \supset SO(3),$$
$$U(15) \supset U(14) \supset SO(5) \supset SO(3).$$

are studied in detail, The formulae of the energy spectra are also given.