

介子的瑞奇轨迹和 $SU(4)$ 质量关系

余寿绵
(山东大学)

摘 要

把满足约束 $p_i^2 - m_i^2 - U(x^2) = 0 (i=1, 2)$ 的二质点组的相对论力学应用于介子的 $SU(4)$ 层子模型。在 $U(x^2)$ 为无限深球方势阱情况下, 导出介子的质量谱。得到一组较精确的线性的质量关系。对于 O^- 介子, 代替 $\eta' - \eta_c$ 混合, 提出了 $\eta' - \eta_c$ 混合的猜测。指出瑞奇轨迹对 $J - M^2$ 直线有系统地偏离, 得到新的轨迹为 M^2 对 ζ_{nl}^2 的直线, 其中 $\zeta_{nl} = \alpha_{nl}$ 为球贝塞尔函数的零点, l 为轨道角动量。新轨迹与实验数据符合较好。

几年前, 高林 (Takabayasi) 等曾提出一个由二质点组成的复合粒子的相对论运动方程^[1]。最近小岛 (S. Kojima) 在此基础上提出一种改变了的模型^[2], 其中二质点的四动量 p_i 满足下面的约束方程组

$$p_i^2 - m_i^2 - U(x^2) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

式中

$$x^\mu = (x_1 - x_2)^\mu \quad (2)$$

为二质点的相对坐标。 m_i 为“自由极限”下二质点的静质量。 $U(x^2)$ 与 m_i 无关, 为描述相互作用的标量函数。当 $U(x^2) = -k^2 x^2$ 时, 此复合粒子的质量的平方和轨道角动量满足线性关系。把此结果应用于介子, 就能解释其瑞奇 (Regge) 轨迹的直线性。

然而, 如果仔细地考察实验数据就能看出介子的瑞奇轨迹并非严格的直线, 斜率 $\Delta J / \Delta m^2$ 系统地随 M^2 增大而明显地变小 (见第四节)。故谐振子势不一定是最好的近似。另一方面, 按照口袋模型的想法, $U(x^2)$ 似可设为无限深球方势阱。在此假定下, 我做了相应的计算。发现所得到的轨迹和实验数据符合得更好。此外, 从所得到的轨迹中可以看出 $U(x^2)$ 具有明显的 $SU(4)$ 对称性, $SU(4)$ 多重态的质量分裂主要来自层子的质量差。据此, 由运动方程可得一系列线性的质量关系。并由此推知 $\eta_c(548)$ 和 $\eta'(957)$ 的混合并不是必要的, 反之, η' 和 $\eta_c(2830)$ 却存在混合。下面第一节简述二质点组的相对论运动方程, 导出描述内部运动的波方程式; 第二节给出无限深球方势阱情况下的解, 并导出质量谱; 第三节把上面的结果应用于 $SU(4)$ 层子模型, 给出质量关系并讨论了 $\eta' - \eta_c$ 的混合; 第四节给出瑞奇轨迹, 与实验数据作了比较; 最后一节是小结和讨论。

一、二质点组的相对论运动方程

当坐标和动量存在约束 (1) 时, 哈氏量可设为

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\mu_i} [p_i^2 - m_i^2 - U(x^2)]. \quad (3)$$

其中 μ_i 为任意常数. 正则运动方程为

$$p_i^\mu = \mu_i \dot{x}_i^\mu, \quad \dot{p}_1^\mu = -\dot{p}_2^\mu = \frac{U'}{\mu} x^\mu; \quad (4)$$

式中

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (5)$$

$U'(x^2) \equiv \frac{d}{dx^2} U(x^2)$. 由运动方程 (4) 可知体系的四动量守恒

$$\dot{P}^\mu = \dot{p}_1^\mu + \dot{p}_2^\mu = 0 \quad (6)$$

取定时间变量使

$$x_i^0 = t, \quad (7)$$

则 $x^0 = 0, \dot{x}_i^0 = 1$. 故由 (4) 式有

$$p_i^0 = \mu_i, \quad \dot{\mu}_i = 0 \quad (8)$$

总能量为

$$p^0 = \mu_1 + \mu_2 \quad (9)$$

(8) 式说明 μ_i 为常数的假定与运动方程不矛盾.

在介子的质心系中, p^0 即为介子的质量 M , 故 (9) 式成为

$$M = \mu_1 + \mu_2 \quad (10)$$

质心坐标的定义是

$$(\mu_1 + \mu_2)\bar{X} = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2. \quad (11)$$

取 $\bar{X} = 0$, 则

$$\mu_1 x + \mu_2 x_2 = 0. \quad (12)$$

令

$$p_1 = -p_2 = p, \quad (13)$$

则运动方程 (4) 成为介子内部的相对运动方程式

$$p = \mu \dot{x}, \quad \dot{p} = \frac{U'}{\mu} x. \quad (14)$$

而约束方程 (1) 成为

$$\mu_1^2 - p^2 - m_1^2 - U(x_2) = 0, \quad \mu_2^2 - p^2 - m_2^2 - U(x^2) = 0, \quad (15)$$

故可令

$$\varepsilon = \mu_1^2 - m_1^2 = \mu_2^2 - m_2^2, \quad (16)$$

于是 (15) 式成为

$$\mathbf{p}' + U = \varepsilon. \quad (17)$$

在(7)式所定的时间变量下, $x^2 = -\mathbf{x}^2 = -r^2$, 故 U 只是 r 的函数. 相对运动方程可由哈氏量

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p}'^2 + U - \varepsilon) \quad (18)$$

得到. 量子化后就得到波方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) + (\varepsilon - U)\phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (19)$$

这里 $\phi(\mathbf{x})$ 为介子内部运动的波函数. 这个方程虽然形式上和非相对论的定态薛定谔方程相似, 但实质上是不同的. 它并不是非相对论近似, 而且本征值 ε 只取决于 U 而与粒子的质量 m_i 无关. (19)式所确定的本征值 ε 通过关系式(16)、(10)和介子的质量联系起来, 从而得到介子的质量谱.

二、无限深球方势阱的解

定义 $U(r)$ 为

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (r < a), \\ +\infty & (r \geq a). \end{cases} \quad (20)$$

如所熟知, 在此情况下, 方程式(19)的解的径向部分是

$$\phi(r) = j_l(\sqrt{\varepsilon + U_0}r). \quad (21)$$

这里 $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ 为球贝塞尔函数, 为 l 轨道角动量.

本征值由边界条件

$$\phi(a) = j_l(\sqrt{\varepsilon + U_0}a) = 0 \quad (22)$$

所确定. $J_{l+\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的根为

$$x_{nl} = \zeta_{nl}\pi, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (23)$$

其中 n 为径向量子数. 于是 ε 的本征值为

$$\varepsilon_{nl} = -U_0 + \frac{\pi^2}{a^2} \zeta_{nl}^2, \quad (24)$$

x_{nl} 和 ζ_{nl}^2 的列于表(1). 以(24)代入(16), 得到

$$\mu_i^2(n, l) = m_i^2 - U_0 + \frac{\pi^2}{a^2} \zeta_{nl}^2. \quad (25)$$

再由(10)式得到介子的质量谱

$$M(n, l) = \mu_1(n, l) + \mu_2(n, l), \quad (26)$$

$M(n, l)$ 依赖于四个参数 m_1, m_2, U_0 和 a , 显示如下

$$\frac{1}{4} \left[M^2(n, l) - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^2(n, l)} \right] = -U_0 + \frac{\pi^2}{a^2} \zeta_{nl}^2. \quad (27)$$

注意这里 $n \neq 0, n = 0$ 的情况应个别讨论. 因为 $J_{l+\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的根 x_{nl} 当 $n = 0$ 时恒为 0, 不论 l 为何数, 于是有 $\varepsilon + U_0 = 0$. 但这时球贝塞尔函数恒等于 0, 故在此情况下,

(21) 式不再是 (19) 式的解。事实上, 当 $\varepsilon + \nu_0 = 0$ 时, (19) 式成为

$$\Delta\psi = 0. \quad (28)$$

它在势阱内有一个平方可积并且满足边界条件的解

$$\psi(r) = N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (29)$$

这个解是否对应于物理粒子, 要看条件 $\varepsilon + U_0 = 0$ 能否给出实数的层子能量 μ_i . 以 $\varepsilon = \mu_i^2 - m_i^2$ 代入此条件, 得到

$$\mu_i^2 = m_i^2 - \nu_0, \quad (30)$$

所以 (29) 式对应于物理态的条件是 $m_i^2 > U_0$. 因为 (28) 式没有 $l \neq 0$ 的、而且满足边界条件的解, 可以推知这个 $n = 0$ 的态没有轨道激发态。然而在新介子中, 层子质量很大, 那么这个态就可能存在。在第四节中将讨论这种可能性。

三、介子的质量关系

把上述结果应用于介子的 $SU(4)$ 层子模型, m_i 为四种味的层子质量 $m_u = m_d$, m_s 和 m_c . 在第一节中曾假定 U 与 m_i 无关, 现在进一步假定 U 为 $SU(4)$ 对称。但是考虑到层子的自旋, 对于正常 J^P 和反常 J^P 的两类介子, U 应有差别。下面分别考察这两类介子的基态。

1. 矢量介子 假定矢量介子属于 SU_4 的理想混合, 则公式 (26) 给出

$$M_\rho = 2\mu_u, \quad M_{K^*} = \mu_u + \mu_s, \quad M_{D^*} = \mu_u + \mu_c, \quad M_{F^*} = \mu_s + \mu_c \quad (28.1)$$

$$M_\omega = 2\mu_u, \quad M_\phi = 2\mu_s, \quad M_\psi = 2\mu_c \quad (28.2)$$

这里 ψ 为 ϕ/J 粒子, 于是有质量关系

$$\begin{aligned} M_\rho &= M_\omega, \quad M_{K^*} = \frac{1}{2} (M_\rho + M_\phi) \\ M_{D^*} &= \frac{1}{2} (M_\rho + M_\psi), \quad M_{F^*} = \frac{1}{2} (M_\phi + M_\psi) \end{aligned} \quad (31)$$

前二式是熟知的 $SU(3)$ 线性质量关系, 后二式联系新粒子和旧粒子。取 $M_\phi = 3100$, 得到 $M_{D^*} = 1935$, $M_{F^*} = 2060$, 误差小于 4%, 公式 (31) 当然也适用于它们的高激发态 (见第四节)。

2. 赝标量介子 公式 (28.1) 同样适用于赝标量介子, 于是有关系式

$$M_K + M_F = M_{K^*} + M_D \quad (32)$$

$I = 0$ 的三个态是

$$\left\{ \begin{aligned} |\eta_s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} |u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\rangle, \\ |\eta_c\rangle^0 &= \frac{1}{\sqrt{12}} |u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} - 3c\bar{c}\rangle, \\ |\eta'\rangle^0 &= \frac{1}{2} |u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

它们可能存在混合。我们假定 η_s 不和其他二介子混合。由类似 (28.1) 的公式可得

$$\begin{cases} M(u\bar{u}) = M(d\bar{d}) = M_K + M_D - M_F, \\ M(s\bar{s}) = M_K + M_F - M_D, \quad M(c\bar{c}) = M_D + M_F - M_K. \end{cases} \quad (34)$$

由 (33) 式, 有 $M_{\eta_s} = \frac{1}{6} [M(u\bar{u}) + M(d\bar{d}) + 4M(s\bar{s})]$, 以 (34) 代入得到

$$M_{\eta_s} = M_K + \frac{1}{3} (M_F - M_D) \quad (35)$$

代入实验质量 $M_{\eta_s} = 548$, $M_K = 490$, $M_D = 1865$, $M_F = 2030$, 上式两边相差不到 1%。由此可见旧理论中 $\eta_s - \eta'$ 混合似乎并不必要。 $\eta_s - \eta'$ 混合的根据是关于介子的 G, O 公式不精确。现在关系式 (35) 没有这个缺陷。从 (32) 式与 (35) 式中消去 $M_F - M_D$, G, O 关系(线性的)仍旧出现

$$M_K = \frac{1}{4} (3M_{\eta_s} + M_\pi). \quad (36)$$

可见 G, O 关系的不精确性来源于 (32), 亦即源于 π 介子的质量太小, 因此不能用 $\eta_s - \eta'$ 混合来解决。 π 介子质量太小的原因可能由于在 π 介子中二非奇异层子之间存在其他相互作用。

对于 η_c 和 η' , 假定存在混合:

$$|\eta_c\rangle^0 = |\eta_c\rangle \cos\theta + |\eta'\rangle \sin\theta, \quad |\eta'\rangle^0 = -|\eta_c\rangle \sin\theta + |\eta'\rangle \cos\theta. \quad (37)$$

则由类似于前面的方法可得

$$\frac{2M_D + M_F}{3} = \frac{M_{\eta_c} + M_{\eta'}}{2}. \quad (38)$$

以实验值代入, 设 η_c 为 $\pi(2830)$, η' 为 $\eta'(957)$, 则等式两边相差不足 2%, 混合角 $\theta = 18.8^\circ$ 。

以上的分析似乎说明 $\eta_c - \eta'$ 混合是符合实际的, 因而值得进一步探讨。

四、瑞奇轨迹

通常认为介子的瑞奇轨迹是 J 对 M^2 图形中的直线。仔细考察实验数据可知实验曲线对直线有系统的偏离。兹将 $\pi, \rho, \omega, \varphi$

轨 迹	$l=0$	$l=1$	$l=2$
π	0.84	0.68	
ρ	0.90	0.88	
ω	1.00	0.85	0.73
φ	0.80	0.69	0.56

$$\Delta J / \Delta M^2 = [M^2(l+1) - M^2(l)]^{-1} \rightarrow \text{递减}$$

四条轨迹上的斜率 $\Delta J / \Delta M^2 = 1 / [M^2(J+1) - M^2(J)]$ 列表如左。表中所用的粒子都是量子数已可靠地确定的粒子, 只有一个 $S(1935)$ 的 J^P 未肯定 ($J^P < 4$)。过去曾放入 ω 轨迹, 现放入 ϕ 轨迹。从这个表中可以看出斜率 $\Delta J / \Delta M^2$ 系统地随着 l

增加而减小。下面我们看到, 这种偏离正好是我们的公式所具有的。

$\pi, \rho, \omega, \varphi, \phi$ 都是单纯由一个层子 q 和它的反层子 \bar{q} 所组成, 它们的质量 $m_q = m_{\bar{q}}$, 从而 μ_1, μ_2 相等。所以瑞奇轨迹特别简单。以 $M_i = 2\mu_i$ 代入 (25) 式, 得到

$$\frac{1}{4} M_i^2(n, l) = \alpha_i + \beta_i \zeta_{ni}^2 \quad (39)$$

其中 $i = \rho, \omega, \varphi, \phi, \pi$ 分别指它们生成的轨道, 而

$$\alpha_i = m_i^2 - U_{0i}, \quad \beta_i = \pi^2/\alpha_i^2 \quad (40)$$

这里 U_0 和 α 附以下标 i 以允许不同轨迹的微小差异. 对于每一条轨迹, 以两个已知实验质量作为输入来确定参数 α_i 和 β_i , 从而算出其他激发态. 结果见附表 2. 关系式 (38) 说明 $M^2(n, l)$ 与 ζ_{ni}^2 成线性关系. 在 ζ_{ni}^2 对 $M^2(1, l)$ 的图上, 它们是直线, 以所定的 α_i 和 β_i 作直线, 发现几乎所有的实验质量皆落于直线上. 图 1 显示旧粒子的四条轨迹. 其中只有 ω 轨迹上的 $g(1688)$ 对直线有明显的偏离, 计算值为 1767 MeV, 相差 4.6%. 此外 ρ 轨迹上的 $T(2190)$ 被放入 $J^P = 4^+$, 而实验值为 $J^P = 3^-$.

至于粲粒子族, 假定 $\phi(3100)$ 为基态, $\phi(3550)$ 为轨道激发态 3^- , 所作直线见图 2. 2^+ 的计算值为 3310, 可与 $x(3410)$ 对应. 4^+ 态的计算质量为 3815, 靠近实验值 $\phi(3770)$, 但后者的 J^P 可能不合. ϕ 轨迹示于图 2.

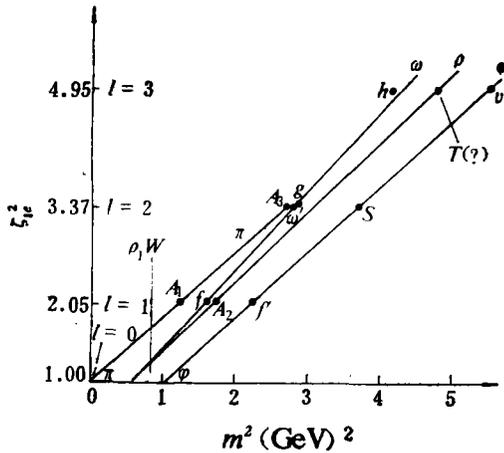


图 1 $\pi, \rho, \omega, \varphi$ 的瑞奇轨迹

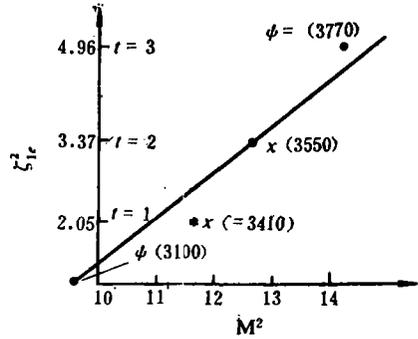


图 2

公式(38)同样可计算径向激发态. 对于 $\phi/J, n = 2, 3$ 的径向激发态 ϕ' 的计算值为 3655, ϕ'' 的计算值为 4433; 它们与 $\phi'(3685)$ 和 $\phi''(4410)$ 一致.

$l \neq 0$ 的介子如 K^*, D^*, F^* 等等由于层子的质量不等, 公式 (38) 不适用, 但仍可由 (25) 及 (26) 计算它们的激发态. 显然由 (27) 式可知它们轨迹不是直线. 前已指出公式 (31) 亦适用于高激发态. 对于矢量介子, 得到 K^* 的轨道激发态:

$$M_{K^*(2^+)} = 1412 \text{ MeV},$$

$$M_{K^*(3^-)} = 1810 \text{ MeV},$$

$$M_{K^*(4^+)} = 2270 \text{ MeV}.$$

前者有实验值对应, 后二可与文献 [3] 中计算的相比较.

在反常 J^P 的一类介子中, 基态介子 0^- 的 $l = 0$ 的态不是单纯由正反层子对所构成, 所以轨迹亦不成直线, 故未示于图中.

最后, 值得注意的是参数 $\alpha_i = m_i^2 - U_{0i}$. 对于所有旧粒子 α_i 为负, 即 $m_i^2 < U_{0i}$. 在第

二节中曾经指出,在此情况下不存在(29)式所给出的 $n=0$ 的态. 但对于粲粒子或由更重的层子 b 所组成的介子如 γ , 则这个态的存在就是可能的. 附表中给出 $\alpha_\phi = 2.087$, 由此得到 $\mu_\phi^2 = 2.087$ [公式(30)], 故 $M^2 = 8.34$, $M = 2.89 \text{ GeV}$, 尚无实验与之对应, 录此以资参考.

五、小 结

本文把小岛的由二质点组成的体系的相对论力学应用于介子的 $SU(4)$ 模型, 得到几点有兴趣的结果:

1. 不论“势函数” U 的具体形式如何, 只要假定它具有 $SU(4)$ 对称性就能得到一系列相当精确的线性的质量关系. 它清楚地表明质量分裂主要来自层子的质量差. 在实际介子中, U 的对称性破缺对质量分裂的影响很小. 特别对于赝标量介子, 我们得到的质量关系(35)和(36)精确度很高. 据此我们提出了 $\eta' - \eta_c$ 混合的论点. 这可能有助于对 η' 介子的某些行为的了解.

2. 在 U 为无限深球方势阱的假定下, 所得到的瑞奇轨迹不是 J 对 M^2 的直线, 而是 ξ_{nl}^2 对 M^2 的直线. 与实验数据符合得更好, 至少对于旧介子是如此. 对于新粒子, 可能亦有助于对实验数据的分析. 此外这些轨迹的斜率只依赖于势阱宽度 α_i . 由此可以估计介子的大小. 图1中可见诸轨迹的斜率基本上相等. 由表2所列的斜率 β_i 算出各条轨迹的介子半径皆在 $5(\text{GeV})^{-1}$ 左右.

表 1

(n, l)	x_{nl}	ξ_{nl}^2	(n, l)	x_{nl}	ξ_{nl}^2
(1, 0)	π	1	(2, 0)	2π	4
(1, 1)	4.49	2.05	(2, 1)	7.73	6.05
(1, 2)	5.76	3.37	(2, 2)	9.10	8.38
(1, 3)	6.99	4.95	(2, 3)	10.4	11.0
(1, 4)	8.18	6.79	(2, 4)	11.7	13.9

表 2

π	$\alpha_\pi = -0.278$ $\beta_\pi = 0.283$	介子 计算质量	$\pi(140)$ 输入	$A_1(1100)$ 输入	$A_2'(1640)$ 1644	? 2120
ρ	$\alpha_\rho = -0.114$ $\beta_\rho = 0.266$	介子 计算质量	$\rho(776)$ 输入	$A_2(1310)$ 输入	$g(1688)$ 1769	$T(2190)$ 2194
ω	$\alpha_\omega = -0.085$ $\beta_\omega = 0.238$	介子 计算质量	$\omega(783)$ 输入	$f(1270)$ 输入	$\omega'(1670)$ 1693	$h(2040)$ 2090
ϕ	$\alpha_\phi = -0.040$ $\beta_\phi = 0.300$	介子 计算质量	$\phi(1020)$ 输入	$f'(1515)$ 输入	$s(1935)$ 1970	$v(2350)$ 2400
ψ	$\alpha_\psi = 2.080$ $\beta_\psi = 0.316$	介子 计算质量	$\psi(3100)$ 输入	$\chi(3410)$ 3307	$\chi(3550)$ 输入	$\psi(3770)$ 3815

3. 层子质量问题迄今并无定论. 上述理论的缺点也是无法从截距 $\alpha_i = m_i^2 - U_0$ 来

估计 m_i , 因 U_0 是未知数. U_0 不能任意地取为 0. 因为 α_i 对于由较轻层子构成的介子都是负的, 所以如果取 $U_0 = 0$ 则 m_i 成为虚数. 能够计算的是层子质量的平方差. 由质量关系和 (16) 式可得

$$m_s^2 - m_u^2 = M_K(M_F - M_D) \cong 0.1 \text{ GeV}^2,$$

$$m_c^2 - m_u^2 = M_D(M_F - M_K) \cong 2.6 \text{ GeV}^2.$$

假定 m_u^2 可以忽略, 则有 $m_s \cong 0.32 \text{ GeV}$, $m_c \cong 1.6 \text{ GeV}$. 这与通常的估计一致.

参 考 文 献

- [1] T. Takabayasi, *Prog. Theor. Phys.*, **54** (1975), 563.
 [2] M. Fujigaki and S. Kojima, *Prog. Theor. Phys.*, **59** (1978), 1930, S. Kojima, *Prog. Theor. Phys.*, **61** (1979), 960.
 [3] Ngee-Pong Chang and C. A. Nelson, *Phy. Rev.*, **D19** (1979), 3336.

THE REGGE TRAJECTORY OF MESONS AND THE $SU(4)$ MASS RELATIONS

YU SHOU-MIEN

(Shandong University)

ABSTRACT

A relativistic equation of motion of a two particle system under the constraints $p_i^2 - m_i^2 - U(x^3) = 0$. ($i = 1, 2$), where $U(x^3)$ is an infinite spherical square well potential, is applied to the $SU(4)$ quark model of mesons. A set of linear mass relations are obtained. Instead of the linear relation between J and M^2 , the Regge trajectory obtained is a relation between $\rho_{n_i}^2$ and M^2 , where $\zeta_{n_i}\pi$ are zeros of the spherical Bessel functions. The new trajectory seems more satisfactory than the former one.