

B-T 方程的复方位阱本征解

韩辉翼 甄长荫 耿天明
(北京师范大学)

吴慧芳
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

求解了复方位阱的 B-T 方程,得到了 $p\bar{p}$ 系统束缚态的窄宽度结构. 与非相对论近似的结果比较,能级位置的修正 $-\Delta E_1$ 最大可达几十个 MeV, 湮灭宽度的修正 $-\Delta E_2$ 最大可达十几个 MeV.

一、引 言

引用复方位阱并用薛定格方程研究 $p\bar{p}$ 系统的湮灭效应已得到了一系列窄宽度的束缚态结构^[1]. 但考虑到 $p\bar{p}$ 的位阱是很深的,与激发态对应的平均动能比较大,因此无论能级位置或湮灭宽度的相对论修正都不能忽略. 基于这一考虑,我们利用相对论的 B-T 方程对 $p\bar{p}$ 系统的束缚态进行研究. 为便于与非相对论近似的结果进行比较,选取相应的参数做了定量计算.

二、B-T 方程及对复方位阱的解

p, \bar{p} 粒子在位阱 $V(r)$ 中的 B-T 方程^[2] 是

$$(T_1 + T_2)\psi = (\varepsilon - V(r))\psi \quad (1)$$

T_1, T_2 分别为 p, \bar{p} 的动能算符,满足

$$\begin{aligned} T_1 j_l(kr) Y_{lm} &= \sqrt{k^2 + m_1^2} j_l(kr) Y_{lm}, \\ T_1 N_l(kr) Y_{lm} &= \sqrt{k^2 + m_1^2} N_l(kr) Y_{lm}. \end{aligned}$$

其中 j_l 为贝塞尔函数, N_l 为诺依曼函数, Y_{lm} 为球谐函数. m_1 为 p 的质量. 以上的关系式是取 $\hbar = c = 1$ 的自然单位.

T_2 也满足同样的关系.

对方位阱及 p, \bar{p} 的质量相等 ($m_1 = m_2$), 得

$$2T\psi = (\varepsilon - V)\psi. \quad (2)$$

其解为

$$\psi = A_1 j_l(kr) Y_{lm} + B_1 N_l(kr) Y_{lm},$$

从而得

$$2\sqrt{k^2 + m^2} = \varepsilon - V, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon - V)^2 - 4m^2}.$$

其中 $m = m_1 = m_2$. 考虑量纲后, $kr = \frac{1}{2\hbar c}\sqrt{(\varepsilon - V)^2 - 4m^2c^4}r$.

以下我们选取 V 是有限深度的复方位阱, 并对(2)式求解:

1. 设复方位阱为

$$V = \begin{cases} -V_0(1 + i\xi), & r \leq a_1 \quad (\text{区域 I}) \\ -V_0, & a_1 < r \leq a_2 \quad (\text{区域 II}) \\ 0, & r > a_2 \quad (\text{区域 III}) \end{cases}$$

对于束缚态, 令 $\varepsilon = 2mc^2 + E$, E 应为负值. 于是(2)

式变为

$$T\psi = \frac{1}{2}(E - V_1)\psi, \quad (3)$$

$$-V_1 = 2mc^2 - V.$$

对应位阱各区域的解, 波函数可以表示为

$$(\text{区域 I}): \psi_{nl}^I = A_{nl}^I j_l(k_1 r) Y_{lm};$$

$$(\text{区域 II}): \psi_{nl}^{II} = A_{nl}^{II} j_l(k_2 r) Y_{lm} + B_{nl}^{II} N_l(k_2 r) Y_{lm};$$

$$(\text{区域 III}): \psi_{nl}^{III} = A_{nl}^{III} j_l(k_3 r) Y_{lm} + B_{nl}^{III} N_l(k_3 r) Y_{lm}.$$

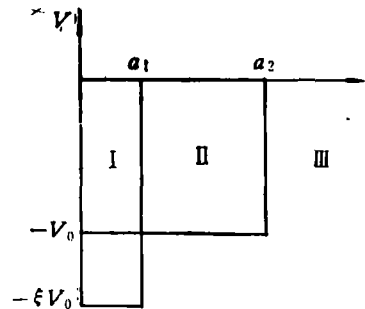


图 1

其中

$$k_1 = \frac{1}{2\hbar c} \sqrt{(E + V_0 + i\xi V_0 + 2mc^2)^2 - 4m^2c^4};$$

$$k_2 = \frac{1}{2\hbar c} \sqrt{(E + V_0 + 2mc^2)^2 - 4m^2c^4},$$

$$k_3 = \frac{1}{2\hbar c} \sqrt{(E + 2mc^2)^2 - 4m^2c^4}$$

2. 边界条件

i) 满足波函数的连续条件

$$\begin{aligned} \psi_{r=a_1}^I &= \psi_{r=a_1}^{II}, & \psi_{r=a_2}^{II} &= \psi_{r=a_2}^{III}, \\ \frac{d}{dr} \psi^I \Big|_{r=a_1} &= \frac{d}{dr} \psi^{II} \Big|_{r=a_1}, & \frac{d}{dr} \psi^{II} \Big|_{r=a_2} &= \frac{d}{dr} \psi^{III} \Big|_{r=a_2}. \end{aligned}$$

ii) 阱外的边界条件选为: 区域 III 的解, 除了随 r 指数衰减的因子外, 还有随 r 作指数振荡的因子并且当 $\xi = 0$ 时, 回到通常的束缚态的解.

应用以上的边界条件, 可以导出本征值 E 所满足的本征方程:

$$X_1(Y_1 + W_1) - X_2(Y_2 + W_2) = 0, \quad (4)$$

$$X_1 = j'_l(k_1 a_1), \quad X_2 = j_l(k_1 a_1),$$

$$Y_1 = j_l(k_2 a_1) [N_l(k_2 a_2) h_1 - N'_l(k_2 a_2)],$$

$$Y_2 = j'_l(k_2 a_1) [N_l(k_2 a_2) h_1 - N'_l(k_2 a_2)],$$

$$W_1 = N_1(k_2 a_1) [j_1'(k_2 a_2) - j_1(k_2 a_2) h_1],$$

$$W_2 = N_2'(k_2 a_1) [j_1'(k_2 a_2) - j_1(k_2 a_2) h_1],$$

$$h_1 = H_1^{(2)}(k_3 a_2) / H_1^{(1)}(k_3 a_2).$$

其中 $H_1^{(j)}$ 为第一类 Hankel 函数, $j_1'(kr) = \frac{d}{dr} j_1(kr)$, 等等.

由于 $V(r)$ 是复位阱, 本征值 E 必定是复量, 即

$$E = E_1 + iE_2.$$

E_1 代表束缚态能级的位置, $-2E_2 = \Gamma$ 代表该能级的湮灭宽度. 从本征方程 (4) 式的求解, 则可得到复方位阱束缚态各能级的位置及其宽度.

三、计算结果及其讨论

参数的选取, 其理由与参考文献 [1] 中是一样的. 我们用数值计算了 $l = 0, 1$ 的本征解.

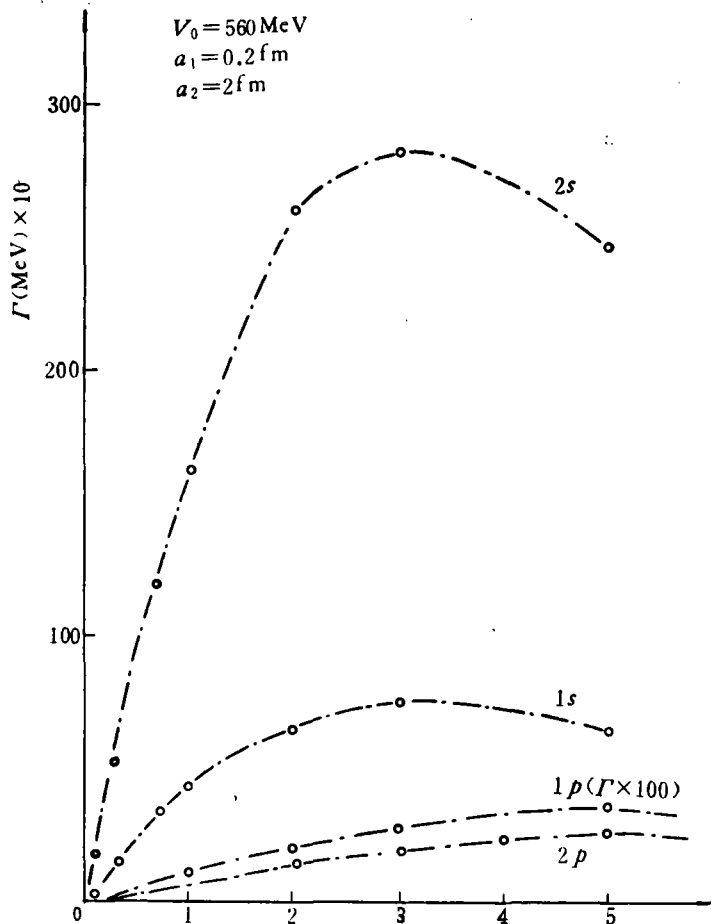


图2 能级宽度 Γ 随 ξ 的变化

$$V_0 = 560 \text{ MeV}; \quad a_1 = 0.2 \text{ fm}; \quad a_2 = 2 \text{ fm}$$

表 1 $V_0 = 560\text{MeV}$ $a_1 = 0.2\text{fm}$ $a_2 = 2\text{fm}$ S 波的 E_1 和 E_2

| ξ | 1s | | | | 2s | | | |
|-------|---------|--------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| | 相对论的结果 | | 非相对论的结果 | | 相对论的结果 | | 非相对论的结果 | |
| | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 |
| 0.1 | -483.29 | -0.24 | -481.14 | -0.32 | -271.68 | -0.89 | -252.01 | -0.94 |
| 0.3 | -483.22 | -0.72 | -481.10 | -0.76 | -271.46 | -2.65 | -251.95 | -2.66 |
| 0.7 | -482.92 | -1.64 | -480.92 | -1.71 | -270.36 | -5.97 | -251.37 | -6.05 |
| 1.0 | -482.55 | -2.19 | -480.70 | -2.39 | -269.04 | -8.18 | -250.63 | -8.49 |
| 3.0 | -479.08 | -3.79* | -478.01 | -5.57 | -256.28 | -14.23* | -241.17 | -20.56 |
| 5.0 | -476.46 | -3.19 | -475.09 | -6.48* | -247.02 | -11.83 | -230.06 | -24.32* |

能量以 MeV 为单位。

表 2 $V_0 = 560\text{MeV}$ $a_1 = 0.2\text{fm}$ $a_2 = 2\text{fm}$ P 波的 E_1 和 E_2

| ξ | 1p | | | | 2p | | | |
|-------|---------|---------|---------|-------|---------|--------|---------|-------|
| | 相对论的结果 | | 非相对论的结果 | | 相对论的结果 | | 非相对论的结果 | |
| | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 |
| 0.1 | -406.23 | -0.046 | -399.60 | -0.10 | -141.94 | -0.04 | -105.62 | -0.08 |
| 0.3 | -406.22 | -0.045 | -399.60 | -0.12 | -141.89 | -0.12 | -105.62 | -0.16 |
| 0.7 | -406.22 | -0.053 | -379.60 | -0.11 | -141.86 | -0.27 | -105.61 | -0.30 |
| 1.0 | -406.21 | -0.053 | -399.59 | -0.11 | -141.82 | -0.38 | -105.60 | -0.42 |
| 2.0 | -406.20 | -0.102 | -399.58 | -0.20 | -141.62 | -0.71 | -105.55 | -0.76 |
| 3.0 | -406.15 | -0.136 | -399.56 | -0.36 | -141.32 | -0.97 | -105.45 | -1.11 |
| 5.0 | -406.04 | -0.173* | -399.53 | -0.44 | -140.59 | -1.22* | -105.17 | -1.73 |
| 13.0 | -405.66 | -0.124 | -399.30 | -0.83 | -138.25 | -0.84 | -103.54 | -3.14 |

能量以 MeV 为单位。

表 1 和表 2 分别列出了 $V_0 = 560\text{MeV}$, $a_1 = 0.2\text{fm}$, 及 $a_2 = 2\text{fm}$ 时 S 波和 P 波的 E_1 和 E_2 的数值,并在相同的参数下,给出了非相对论近似的结果,以便比较。

以上所得到的结果表明:

1. 考虑相对论效应后,最主要的结果是能级向下发生移动,能级向下移动是由于束缚态相对论的动能值比非相对论近似的动能值小,因此考虑了相对论修正后,使相应能级的能量变低一些。激发能量越高,对应的平均动能越大,相对论的修正也就越大,因此能级向下的位移 ΔE 越大。例如, $\Delta E_{2s} > \Delta E_{1s}$, 等等。

2. 考虑相对论效应后,另一重要结果是湮灭宽度减小。因为能级向下移动,使粒子束缚更紧,对应的状态更稳定,因而湮灭宽度减小。

3. 宽度随湮灭半径 a_1 和 ξ 的变化趋势与非相对论近似的结果相同,即宽度随 a_1 的增加而增加(见表 3),宽度随 ξ 的增加而有一极大值,见表 1—2,其中打“*”号的表示 $-E_2$ 的极大值。但宽度的极大值比非相对论近似的结果小,这是因为相对论效应的修正使各能级的宽度减小,从而使极大值也因之减小。图 2 给出了湮灭宽度随 ξ 的变化结果。

表3 $V_0 = 760\text{MeV}$ $a_2 = 2\text{fm}$ $\xi = 1$ S波的 E_1 和 E_2 随 a_1 的变化

| a_1 (fm) | 1s | | 2s | | 3s | |
|---------------|---------|--------|---------|--------|---------|---------|
| | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 | E_1 | E_2 |
| 0.2 | -679.54 | -2.91 | -455.96 | -11.15 | -135.58 | -21.98 |
| 0.4 | -667.22 | -12.46 | -411.22 | -50.02 | -49.36 | -112.95 |
| 0.6 | -643.85 | -19.73 | -315.77 | -75.40 | | |
| 0.8 | -613.66 | -26.23 | -211.63 | -85.40 | | |

能量以 MeV 为单位。

综上所述,对 $p\bar{p}$ 系统的束缚态, B-T 方程与薛定格方程的解在定性上是一致的,得到了窄宽度的结构。但在数值上有几 MeV 到几十 MeV 的修正。所以要做与实验定量比较的计算时,相对论效应对其窄宽度结构的修正不能忽略。特别是能级越高,平均动能越大,则修正也越大。

最后作者对余友文和张宗焯同志的帮助和支持表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 吴慧芳、余友文、张宗焯,高能物理与核物理, 5(1981), 211.
 [2] B. Bakamjian, L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, 92(1953), 1300; L. L. Foldy, *Phys. Rev.*, 122(1961), 275; F. Coester, P. Havas, *Phys. Rev.*, 14D(1976), 1616.

EIGEN SOLUTION OF B-T EQUATION FOR COMPLEX SQUARE POTENTIAL WELL

HAN HUI-YI ZHEN CHANG-YIN GENG TIAN-MING
 (Peking Normal College)

WU HUI-FANG
 (Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

On solving the B-T equation for complex square well potential, the narrow width structures of bound states of $p\bar{p}$ system are obtained. Comparing it with the result of non-relativistic approximation, the maximum correction of position of energy level $-\Delta E_1$ is several tens MeV, the maximum correction of annihilated width $-\Delta E_2$ is about more than ten MeV.