第5卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 5, No. 5
1981年9月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Sept., 1981

多粒子体系的相对论运动方程(II)

阮图南
(中国科学技术大学)
朱熙泉　何祚庥　庆承瑞
(中国科学院理论物理研究所)
赵维勤
(中国科学院高能物理研究所)

摘　要

本文建立了多粒子体系的相对论运动方程. 多体相对论位势是多体 B-S 方程的不可约序列的确定重排列. 在只考虑两体不可约 B-S 核时，多体位势是两体位势的某种叠加.

一、引　言

多粒子体系的相对论量子力学基本上沿着两个方向发展. 第一个方向是以 Dirac 的 Hamiltonian 方法为基础的唯象理论[2]，其中关于两个粒子体系的 Bakamjian-Thomas 方程[3]，已开始获得实际应用. 但是，随着体系粒子数的增多，要想在如此众多的力学变数中确定一组满足 Poincáre 李代数的解，其任意性是太大了. 这就是说：完全唯象地给出多体系的 Hamiltonian 原则上依然是困难的. 第二个方向是以场论为基础的 Bethe-Salpeter 方程的多体推广[4]. 正如在以前工作中详细讨论过的那样[1]，B-S 方程中包含有非物理自由度. 这种非物理自由度的存在给我们带来了概念和解法上的巨大困难. 随着粒子数的增多，这种非物理自由度(即任何两个粒子的间隔处于类时)是更多了. 这使人很难有勇气哪怕是十分近似地用多体 B-S 方程处理实际问题. 所以，实际上多体相对论运动方程在这两个方向分别遇到了不同的困难. 随着高能强子与原子核相互作用理论的进展[5]，以及讨论强子结构本身的要求，这种情况是不应持续太久的.

在非相对论量子力学中，多体 Schrödinger 方程已久经实验考验. 如果用二次量子化的语言来表示，多体 Schrödinger 波函数可以记为

$$\chi_{p\zeta}(x_1\cdots x_N)=\langle 0|\psi(t\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(t\boldsymbol{x}_N)|\boldsymbol{p}\zeta\rangle, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 是多体系的质心动量，ζ 代表除此而外的一切所需要的量子数. $\psi(t, \boldsymbol{x}_i)$ 是满足某种 Hatree-Fock 方程的 Schrödinger 场量[6]. 我们说多粒子体系 Schrödinger 方程的成功，实际上意味着这种场论模型的成功. 因而在构造相对论多体量子力学时，没有必要放

本文 1980 年 4 月 1 日收到.

弃这种场论模型．换言之，一个相对论多体系的物理波函数仍然应该由(1.1)式表示．所不同的仅仅是 $\psi(tx_i)$ 应该是相互作用的相对论量子场．所谓建立多体系相对论运动方程就是从相对论量子场论出发推导(1.1)所满足的方程．这个工作也可以更直接地表述为从多体 B-S 方程出发推导(1.1)所满足的方程．因为从数学上讲，建立在 Feynman 场论基础上的 B-S 方程是一个严格的方程．

在文献[1]中，我们已就两体问题全面完成了这个推导．区别于其他三维相对论方程的工作[1)]，我们对 B-S 不可约核的重排列不依赖于三维格林函数的选择，而唯一地被推导等时波函数的方程这一要求所确定．这样建立的理论具有一个极为重要的优点：即我们可以把文献[1]的方法直接推广到多粒子体系上去，因为多体等时波函数的定义(1.1)也是完全确定的．但是想把其它三维相对论方程的工作推广到多体是十分困难的，因为所有那些选择三维格林函数的原则[2)]在多粒子体系中的力学意义是很难弄清楚的．

二、组态空间的等时多体 B-S 方程

N 个粒子的 B-S 波函数定义为

$$\psi(x_1\cdots x_N)=\langle 0|T\psi(x_1)\cdots\psi(x_N)|\boldsymbol{p}\zeta\rangle, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}$, ζ 的意义同(1.1)．N 体的 B-S 方程允许有各种等价的形式[4]．在每一种形式中，积分方程的传播子被选为由 N 体所划分出的各种子集团的总格林函数的乘积．一个最简单的形式是

$$\psi(x_1\cdots x_N)=\psi_0(x_1\cdots x_N)+\int G_0(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N)\cdot I(y_1\cdots y_N,\ z_1\cdots z_N)\psi(z_1\cdots z_N)\prod_{i=1}^{N}d^4(y_iz_i), \tag{2.2}$$

其中 ψ_0 是 N 个自由粒子波函数的乘积，满足

$$(i\partial\!\!\!/_j-m_j)\psi_0(x_1\cdots x_N)=0,\quad (j=1,2,\cdots,N) \tag{2.3}$$

$$G_0(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N)=\frac{1}{i}\prod_{j=1}^{N}iS_j^F(x_j-y_j)\beta_j. \tag{2.4}$$

I 是两体、三体、…、N 体的各种不可约图总和[4]，

$$\begin{aligned}I(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N)&=\sum_{i<j}I_{ij}(x_ix_j,\ y_iy_j)\prod_{k\neq i,j}\frac{1}{i}\beta_kS_k^{F^{-1}}(x_k-y_k)\\&+\sum_{i<j<k}I_{ijk}(x_ix_jx_k,\ y_iy_jy_k)\prod_{l\neq i,j,k}\frac{1}{i}\beta_lS_l^{F^{-1}}(x_l-y_l)+\cdots\\&+I_N(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N),\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $S_k^{F^{-1}}(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}(p\!\!\!/-m_k)$，而 $I_{i\cdots k}(x_i\cdots x_k,\ y_i\cdots y_k)$ 代表粒子 $i\cdots k$ 间完全连接的不可约图的总和．选择 N 个粒子皆为自由格林函数，或许并不是有实际意义的

1) 见文献[1]的引文[5—8]．
2) 见文献[1]的引文[5—8]．

散射过程所要求，可是相应于 (2.1) 的微分积分方程对于N体束缚态来说却是很对称的．为了今后推导的需要，这里也给出N体散射振幅的定义和方程，

$$\psi(x_1\cdots x_N)=\psi_0(x_1\cdots x_N)+\int G_0(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N)\cdot T(y_1\cdots y_N,\ z_1\cdots z_N)\psi_0(z_1\cdots z_N)\prod_{i=1}^{N}d^4(y_iz_i),\tag{2.6}$$

$$T(x_1\cdots x_N,y_1\cdots y_N)=I(x_1\cdots x_N,\ y_1\cdots y_N)+\int I(x_1\cdots x_N,\ u_1\cdots u_N)\cdot G_0(u_1\cdots u_N,\ v_1\cdots v_N)T(v_1\cdots v_N,\ y_1\cdots y_N)\prod_{i=1}^{N}d^4(u_iv_i).\tag{2.7}$$

和 (1.1) 相一致的多体相对论等时波函数定义为

$$\hat{\psi}(t,\ \boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=\langle 0|\psi(t\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(t\boldsymbol{x}_N)|\boldsymbol{p}\zeta\rangle=\psi(x_1\cdots x_N)|_{t_1=\cdots=t_N=t},\tag{2.8}$$

$$\hat{\psi}_0(t,\ \boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=\psi_0(x_1\cdots x_N)|_{t_1=\cdots=t_N=t}.\tag{2.9}$$

自由多粒子等时波函数满足下列方程．

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)\hat{\psi}_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=0,\tag{2.10}$$

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=i\frac{\vec{\partial}}{\partial t}-\sum_{j=1}^{N}H_j(-i\vec{\nabla}_j),\quad H_j(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{\alpha}_j\cdot\boldsymbol{p}+\beta m_j,\tag{2.11}$$

等时的自由格林函数定义为

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,\ t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,\ t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\overleftarrow{D}(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=\delta(t-t')\prod_{i=1}^{N}\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i),\tag{2.12}$$

其中

$$\overleftarrow{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=-i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t}-\sum_{j=1}^{N}H_j(i\overleftarrow{\nabla}_j).\tag{2.13}$$

一个满足方程 (2.12) 的解是：(参见文献 [1] 附录)

$$g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,\ t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S_i^F(t-t',\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)\beta_i\prod_{j\neq i}iS_j(t-t',\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j)\beta_j.\tag{2.14}$$

在 (2.14) 中 $S_i^F(x)$ 和 $S_j(x)$ 分别是单粒子因果格林函数和反对易奇异函数．选取因果格林函数是为了使等时自由格林函数 g_0 与等时的 G_0 边条件相同，即

$$\lim_{t'\to\pm\infty}\int g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,\ t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)G_0(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N,\ z_1\cdots z_N)\prod_{i=1}^{N}d^3y_i=0,\tag{2.15}$$

为了从 B-S 方程 (2.2)—(2.7) 导出等时波函数 (2.8) 满足的方程．必须进行两个主要步骤：第一步，对方程 (2.6) 右边的多时平面波进行时间平移推到等时．这是 Krolikowski, Rzewuski[7] 首先应用并在文献 [1] 中所采用的方法．但文献 [1] 是以两个粒子中时间较早的一个为标准，利用推迟格林函数实现波函数的等时化，见文献 [1] (2.11) 式．在本文中将对这种方法作两点更动．首先把多时全部平移到质心时间，这种时间标准的选取显然更为自然．然后利用反对易奇异函数 $S(x)$ 进行时间平移，而不利用推迟格林函数．因为利用格林函数平移时间将在某些点上出现奇异性，这将使等时相互作用核包含人为的附加项．定义质心坐标和相对坐标．

$$X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,\quad t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i,\tag{2.16}$$

$$x_i^c=x_i-X,\quad (i=1,2,\cdots,N),\quad t_i^c=t_i-t.\tag{2.17}$$

多时平面波与等时平面的关系将为,见文献[1](A7)式,

$$\psi_0(x_1\cdots x_N)=\int U_2(x_1\cdots x_N,\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\hat{\psi}_0(t\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\prod_{i=1}^{N}d^3y_i,\tag{2.18}$$

$$U_2(x_1\cdots x_N,\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=\prod_{j=1}^{N}iS_j(t_j-t,\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j)\beta_j.\tag{2.19}$$

由于 $t_j-t=t_j^c$, $(j=1,2,\cdots,N)$, 所以 U_2 内并不包含质心时间 t,只与相对时间 t_j^c 有关. 可见(2.18)把多时波函数中的非物理自由度——相对时间全部分离到 U_2 中去了. 把(2.18)代入(2.6),并在两边取等时,则有

$$\hat{\psi}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=\hat{\psi}_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)+\int\{G_0TU_2\}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)$$
$$\cdot\hat{\psi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)dt'\prod_{i=1}^{N}d^3y_i,\tag{2.20}$$

其中

$$\{G_0TU_2\}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=\int G_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,u_1\cdots u_N)T(u_1\cdots u_N,v_1\cdots v_N)$$
$$\times U_2(v_1\cdots v_N,\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\delta\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^0-t'\right)\prod_{i=1}^{N}d^4(u_iv_i).\tag{2.21}$$

(2.20)的第二项可写为

$$\int\delta(t-t'')\prod_{i=1}^{N}\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_i'')\{G_0TU_2\}(t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'',t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\hat{\psi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)dt''dt'$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{N}d^3(x_i''y_i)=\int g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'')\vec{D}(t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'')\{G_0TU_2\}$$
$$\cdot(t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'',t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\hat{\psi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)dt''dt'\prod_{i=1}^{N}d^3(x_i''y_i).$$

对上 D 算子进行分部积分,利用条件(2.15),则表面项消去. 定义 U_1 和等时散射振幅

$$U_1(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,y_1\cdots y_N)=\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)G_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,y_1\cdots y_N),\tag{2.22}$$

$$\hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)=\{U_1TU_2\}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N),\tag{2.23}$$

其中 $\{U_1TU_2\}$ 的定义见(2.21). 这样方程(2.20)可以写为

$$\hat{\psi}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)=\psi_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)+\int g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N,t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'')\hat{T}(t''\boldsymbol{x}_1''\cdots\boldsymbol{x}_N'',t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)$$
$$\times\hat{\psi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)dt''dt'\prod_{i=1}^{N}d^3(x_i''y_i),\tag{2.24}$$

方程(2.8)、(2.24)给出多体系的等时波函数,自由等时格林函数和等时散射振幅的定义.

整个推导的第二个步骤是由等时散射振幅 $\hat{T}$ 和等时自由格林函数 g_0 返回等时不可约核. 为此定义

$$G_0'(x_1\cdots x_N, y_1\cdots y_N) = \int U_2(x_1\cdots x_N, \boldsymbol{u}_1\cdots \boldsymbol{u}_N) g_0(t\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N, t'\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_N)$$
$$\cdot U_1(t'\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_N, y_1\cdots y_N)dt' \prod_{i=1}^{N} d^3(u_i v_i), \tag{2.25}$$

并令 B-S 散射振幅 T 按照传播子 G_0' 重新排列，

$$T(x_1\cdots x_N, y_1\cdots y_N) = I'(x_1\cdots x_N, y_1\cdots y_N) + \int I'(x_1\cdots x_N, u_1\cdots u_N)$$
$$\times G_0'(u_1\cdots u_N, v_1\cdots v_N) T(v_1\cdots v_N, y_1\cdots y_N) \prod_{i=1}^{N} d^4(u_i v_i), \tag{2.26}$$

比较 (2.26) 与 (2.7) 有

$$I' = I + I(G_0 - G_0')I', \tag{2.27}$$

即重排列核 I' 是原始 B-S 核的一个无穷序列，其传播子是 B-S 自由格林函数与 G_0' 之差．散射振幅的重排列方法是 Blankenbecler-Sugar[8] 在讨论动量表象三维散射振幅的方程时首次采用的．在方程 (2.26) 两边按 (2.23) 取等时，立得等时散射振幅满足的积分方程，

$$\hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N) = \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)$$
$$+ \int \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, u^0\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N) g_0(u^0\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N, v^0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_N)$$
$$\times \hat{T}(v^0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N) d(u^0v^0) \prod_{i=1}^{N} d^3(u_i v_i), \tag{2.28}$$

其中

$$\hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N) = \{U_1 I' U_2\}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N), \tag{2.29}$$

$\{U_1 I' U_2\}$ 的定义同 (2.21)．由方程 (2.28)、(2.24) 可得等时波函数满足的积分方程．

$$\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N) = \hat{\phi}_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N) + \int g_0(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, u^0\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N)$$
$$\times \hat{I}'(u^0\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\hat{\phi}(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N) d(u^0 t') \prod_{i=1}^{N} d^3(u_i y_i), \tag{2.30}$$

相应的微分积分方程是

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N)\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N) = \int \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)\hat{\phi}(t'\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_N)dt' \prod_{i=1}^{N} d^3 y_i. \tag{2.31}$$

这样就严格地得到一个多粒子体系的相对论运动方程．方程的核是 B-S 核的一个重排列．为了对这个重排列有所了解，可以讨论重排列格林函数 G_0' 的物理意义．把 (2.22) 代入 (2.25)，对 D 算子进行分部积分，利用边条件 (2.15) 消去表面项，则得 G_0' 的另一表述形式

$$G_0'(x_1\cdots x_N, x_1'\cdots x_N') = \int U_2(x_1\cdots x_N, \boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N) G_0(t\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_N, x_1'\cdots x_N') \prod_{i=1}^{N} d^3 u_i. \tag{2.32}$$

所以一旦原始 B-S 方程的格林函数 G_0 确定以后，G_0' 和 I' 也就唯一确定了．并没有任何其他人为的性质．由 (2.32) 可见 G_0' 实际上是把平移函数 U_2 简单地作用在费曼格林函数 G_0 上的结果．将 G_0 的表式 (2.4) 代入得

$$G_0'(x_1\cdots x_N, x_1'\cdots x_N') = \frac{1}{i}\prod_{j=1}^{N} [\theta(t - t_j') i S_j^+(x_j - x_j')\beta_j$$
$$- \theta(t_j' - t) i S_j^-(x_j - x_j')\beta_j], \tag{2.33}$$

可见 U_2 的作用是把原来费曼格林函数中 θ 函数的 t_j 平移到它们的质心时间 t. 作为格林函数，G_0' 的时间传递方式较之 G_0 自然减少了. 这个差别完全被纳入重排列级数的高次项中. 应该指出本文选取反对易奇异函数为时间平移函数，因此 (2.33) 式较文献 [1] 的 (2.23) 式更为简单，并且物理意义清楚.

三、动量空间的多体等时 B-S 方程

本节给出动量表象中的多体等时波函数和散射振幅的方程，以及它们与 B-S 波函数和散射振幅的关系. 为此，首先定义质心四动量和相对四动量

$$P = \sum_{i=1}^{N} p_i, \tag{3.1}$$

$$p_i^c = p_i - \frac{1}{N} P, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.2}$$

在动量表象中 ϕ, G_0, I, T 以及相应的 $\hat{\phi}$, g_0, $\hat{I}'$, $\hat{T}$ 分别记为 $\phi(p_1\cdots p_N)$, $G_0(p_1\cdots p_N)$, $I(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N)$, $T(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N)$ 和 $\hat{\phi}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N)$, $g_0(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N)$, $\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N)$, $\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N)$. 等时波函数的定义 (2.8) 在动量表象为

$$\hat{\phi}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N) = \int 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^0 - P^0\right)\phi(p_1\cdots p_N)\prod_{i=1}^{N}\frac{dP_i^0}{2\pi}. \tag{3.3}$$

(2.18)、(2.19) 式的动量表象为

$$\phi_0(p_1\cdots p_N) = U_2(p_1^{c0}\cdots p_N^{c0}, \boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N)\hat{\phi}_0(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N), \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned} U_2(p_1^{c0}\cdots p_N^{c0}, \boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N) &= \int \prod_{j=1}^{N} iS_j(P_j)\beta_j \frac{dP^0}{2\pi} \\ &= \int \prod_{j=1}^{N} 2\pi\delta\left(p_j^{c0} + \frac{1}{N}P^0 - H_j(\boldsymbol{P}_j)\right)\frac{dP^0}{2\pi}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

由于在坐标表象中 U_2 与质心时间无关，所以在动量表象中 U_2 包含对质心能量的积分，即 (3.5) 式. 相应于 (2.32)，重排列格林函数 G_0' 的动量表象为

$$\begin{aligned} G_0'(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N) &= 2\pi\delta(P^0 - Q^0)\prod_{i=1}^{N}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i) \\ &\times G_0'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ p_1^{c0}\cdots p_N^{c0},\ q_1^{c0}\cdots q_N^{c0}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned} &G_0'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ p_1^{c0}\cdots p_N^{c0},\ q_1^{c0}\cdots q_N^{c0}) \\ &\quad = U_2(p_1^{c0}\cdots p_N^{c0},\ \boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N)G_0(P^0q_1^{c0}\cdots q_N^{c0},\ \boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (3.7) 可以看到 G_0' 对每个粒子的相对能量 $p_1^{c0}\cdots p_N^{c0}$ 是非对角的. 等时散射振幅 $\hat{T}$ 与不可约核 $\hat{I}'$ 则为

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = \int\prod_{i=1}^{N}\frac{dP_i^0}{2\pi}2\pi\delta\left(\sum_{j=1}^{N}P_j^0 - P^0\right)\int\prod_{i=1}^{N}\frac{dq_i^0}{2\pi}$$

$$\times\, 2\pi\delta\left(\sum_{j=1}^{N} q_j^0 - Q^0\right) U_1(p_1\cdots p_N)T(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N)$$
$$\times\, U_2(q_1^{c0}\cdots q_N^{c0},\ \boldsymbol{q}_1\cdots \boldsymbol{q}_N) \tag{3.8}$$

$$\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = \int \prod_{i=1}^{N} \frac{dP_i^0}{2\pi}\, 2\pi\delta\left(\sum_{j=1}^{N} p_i^0 - P^0\right) \int \prod_{i=1}^{N} \frac{dq_i^0}{2\pi}$$
$$\cdot\, 2\pi\delta\left(\sum_{j=1}^{N} q_i^0 - Q^0\right) U_1(p_1\cdots p_N) I'(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N)$$
$$\times\, U_2(q_1^{c0}\cdots q_N^{c0},\ \boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N), \tag{3.9}$$

其中

$$U_1(p_1\cdots p_N) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j\neq i} iS_j^F(p_j)\beta_i. \tag{3.10}$$

相应于 (2.14) 等时多体自由格林函数的动量表象为

$$g_0(E\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r_i=\pm} r_i \frac{\Lambda_1^{(r_1)}\cdots\Lambda_i^{(r_i)}\cdots\Lambda_N^{(r_N)}}{E - \sum_{j=1}^{N} H_j(\boldsymbol{p}_j) + ir_i\varepsilon}. \tag{3.11}$$

例如，对于三体等时自由格林函数有，

$$g_0(E\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{E - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2) - H_3(\boldsymbol{p}_3) + i\varepsilon}\left\{\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \frac{2}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^-\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^+ + \frac{2}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \frac{1}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^- + \frac{1}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^- + \frac{1}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^-\Lambda_3^+\right\}$$
$$- \frac{1}{E - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2) - H_3(\boldsymbol{p}_3) - i\varepsilon}\left\{\Lambda_1^-\Lambda_2^-\Lambda_3^- + \frac{2}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^-\Lambda_3^+\right.$$
$$+ \frac{2}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^- + \frac{2}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^- + \frac{1}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^- + \frac{1}{3}\Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^+$$
$$\left. + \frac{1}{3}\Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+\right\}, \tag{3.11$'$}$$

其中　$\Lambda_i^{\pm} = \dfrac{E_i \pm H_i(\boldsymbol{p}_i)}{2E_i}$，　$E_i = \sqrt{\boldsymbol{p}_i^2 + m_i^2}$，　$H_i(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{p}_i + \beta_i m_i$.

由此可见，等时自由格林函数是质心时间的推迟与超前在旋量空间的组合. 例如在 (3 11)′ 中只要保证在 $\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+$ 空间推迟，在 $\Lambda_1^-\Lambda_2^-\Lambda_3^-$ 空间超前，其他比例系数即使完全任意，也仍然满足方程 (2.12)、(2.15)，即 (2.14) 并非唯一的解. 实际上，对多粒子体系给出边条件的可能是太多了，边条件 (2.15) 仅仅是一个限制. 但必须指出，边条件的任何规定并不影响方程 (2.31) 本身. 等时方程的不可约核 $\hat{I}'$ 对等时自由格林函数 g_0 的选取毫无关系，见 (2.32) 式.

多体等时波函数与散射振幅在动量表象的方程可以写为

$$\left[P^0 - \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{p}_i)\right]\hat{\phi}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N) = \int\frac{dQ^0}{2\pi}\prod_{i=1}^{N}\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3}$$
$$\cdot\,\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N)\hat{\phi}(Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N), \tag{3.12}$$

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = \hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) + \int\frac{dK^0}{2\pi}\prod_{i=1}^{N}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ K^0\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N) \times g_0(K^0\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N)\hat{T}(K^0\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N). \tag{3.13}$$

如果我们抽出能量、动量守恒的 δ 函数.

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = (2\pi)^4\delta(P-Q)\hat{T}_P(\boldsymbol{p}_1^c\cdots\boldsymbol{p}_N^c,\ \boldsymbol{q}_1^c\cdots\boldsymbol{q}_N^c), \tag{3.14}$$

$$\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,Q^0\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = (2\pi)^4\delta(P-Q)\hat{I}'_P(\boldsymbol{p}_1^c\cdots\boldsymbol{p}_N^c,\boldsymbol{q}_1^c\cdots\boldsymbol{q}_N^c), \tag{3.15}$$

其中

$$\hat{T}_P(\boldsymbol{p}_1^c\cdots\boldsymbol{p}_N^c,\boldsymbol{q}_1^c\cdots\boldsymbol{q}_N^c) = \int 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N}p_i^{c0}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{dp_i^{c0}}{2\pi}\int 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N}q_i^{c0}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{dq_i^{c0}}{2\pi} \times U_1(Pp_1^c\cdots p_N^c)T_P(p_1^c\cdots p_N^c,\ q_1^c\cdots q_N^c)U_2(q_1^c\cdots q_N^c), \tag{3.16}$$

$$\hat{I}'_P(\boldsymbol{p}_1^c\cdots\boldsymbol{p}_N^c,\ \boldsymbol{q}_1^c\cdots\boldsymbol{q}_N^c) = \int 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N}p_i^{c0}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{dp_i^{c0}}{2\pi}\int 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N}q_i^{c0}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{dq_i^{c0}}{2\pi} \times U_1(Pp_1^c\cdots p_N^c)I'_P(p_1^c\cdots p_N^c,\ q_1^c\cdots q_N^c)U_2(q_1^c\cdots q_N^c), \tag{3.17}$$

这样 (3.12)、(3.13) 就成为 $3N-3$ 维方程. 在质心系中, $\boldsymbol{P}=0$, $\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i^c$, 则有

$$\left[P^0-\sum_i H_i(\boldsymbol{p}_i)\right]\hat{\phi}_{P^0}(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N) = \int(2\pi)^3\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3} \times \hat{I}'_{P^0}(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ \boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N)\hat{\phi}_{P^0}(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N), \tag{3.18}$$

$$\hat{T}_{P^0}(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ \boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) = \hat{I}'_{P^0}(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ \boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N) + \int\prod_{i=1}^{N}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}(2\pi)^3 \times\delta\left(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{k}_i\right)\hat{I}'_{P^0}(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N,\ \boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N)g_0(P^0\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N)\times\hat{T}_{P^0}(\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_N,\ \boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N), \tag{3.19}$$

(3.18) 和 (3.19) 是多体 Schrödinger 方程和 Lippmann-Schwinger 方程的相对论推广，并与相应的多体 B-S 方程等价. 它的位势 $\hat{I}'$ 完全由场论严格决定.

四、关于等时位势的讨论

我们已经得到了多体系的相对论运动方程，多体系的等时位势可以从 B-S 不可约核出发由方程 (2.29) 给出. 一个自然的问题是，如果在 B-S 不可约图序列中略去两体以上的关联图，即只保留 (2.5) 式的第一项，这时多体系的等时位势能否表示为所有两体等时位势的和？为了使等时方程 (2.31) 或 (3.18) 在非相对论极限下过渡为通常的 Schrödinger 方程，同时也为了方程 (2.31) 或 (3.18) 实际求解的需要，这一点是特别予以期望的. 若只考虑两体不可约图的贡献，多体的 B-S 不可约核为

$$I(x_1\cdots x_N,y_1\cdots y_N) = \sum_{i<j}I_{ij}(x_ix_j,\ y_iy_j)\prod_{k\neq i,j}\frac{1}{i}\beta_kS_k^{F^{-1}}(x_k-y_k), \tag{4.1}$$

I_{ij} 是两个粒子的不可约图的总和. 这里我们只讨论重排列级数(2.27)的首项. 由 (2.29)

两个粒子 (i,j) 构成的两体系的等时位势是

$$\hat{I}_2(t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j, t'\boldsymbol{x}'_i\boldsymbol{x}'_j) = \int d^4(u_iu_j, v_iv_j)\delta\left(\frac{v_i^0 + v_j^0}{2} - t'\right)\{iS_i^F(t - u_i^0, \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{u}_i)\beta_i\delta(t - u_j^0)\delta(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}_j) + \delta(t - u_i^0)\delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{u}_i)iS_j^F(t - u_j^0, \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}_j)\beta_j I_{ij}(u_iu_j, v_iv_j)iS_i(v_i^0 - t', \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{x}'_i)\beta_i iS_j(v_j^0 - t', \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{x}'_j)\beta_j\} \tag{4.2}$$

将 (4.2) 代入 (2.29) 得 N 体等时位势

$$\hat{I}(t\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_N, t'\boldsymbol{x}'_1\cdots\boldsymbol{x}'_N) = \sum_{i<j}\int dz^0d^3(z_iz_j)\delta\left(t' - \frac{2z^0 + (N-2)t}{N}\right) \times \hat{I}_2(t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j, z^0\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_j) \times iS_i(z^0 - t', \boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{x}'_i)\beta_i iS_j(z^0 - t', \boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{x}'_j) \times \beta_j\prod_{k\neq i,j} iS_k(t - t', \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}'_k)\beta_k. \tag{4.3}$$

所以 N 体等时位势确实是两体等时位势之和．但是每个粒子都带有一个时间推移因子．这个结果是完全合理的．因为两体作用引起了 (i,j) 两粒子的质心时间从 $t\rightarrow z^0$ 的推移，同时也引起了整个体系质心时间的变化 $t\rightarrow t'$．要实现体系对质心时间的单时化，则 (i,j) 必须带有从 $z^0\rightarrow t'$ 的时间推移因子，而没有经受作用的粒子则需要从 $t\rightarrow t'$ 的时间推移．

参考文献

[1] 阮图南、朱熙泉、何祚庥、庆承瑞、赵维勤，高能物理与核物理，**5**(1981)，
[2] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.*, **21**(1949), 392.
[3] B. Bakamjian, L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, **92**(1953), 1300;
鲍诚光、赵维勤，高能物理与核物理，**2**(1978)，336.
[4] A. Klein, C. Zemach, *Phys. Rev.*, **108**(1957), 126.
[5] 朱熙泉、何祚庥、赵维勤、鲍诚光，中国科学，1980 年第 7 期，p. 645.
[6] D. Lurié, Particles and Fields, (1968 by John Wiley & Sons, New York).
[7] W. Krolikowski, J. Rzewuski, *Nuovo Cimento*, **2**(1955), 203.
[8] R. Blankenbecler, R. Sugar, *Phys. Rev.*, **142**(1966), 1051.

A RELATIVISTIC EQUATION OF MOTION FOR MANY-BODY SYSTEM (II)

Ruan Tu-nan
(*University of Science and Technology of China*)

Zhu Xi-quan　He Zuo-xiu　Qing Cheng-rui
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

Zhao Wei-qin
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

Abstract

A relativistic equation of motion for many-body system is established. The relativistic potential is a certain rearrangement of the irreducible series of many-body B-S equation. Considering the two-body irreducible B-S kernels only the many-body potential is expressed as a sum of two-body ones.