

Bakamjian-Thomas 方程的大动量转移 散射振幅与核力排斥心的高度

潘缉智 王滩滩 赵维勤 鲍诚光

(中国科学院高能物理所)

摘 要

本文利用 Eikonal 波函数 Born 展开的方法,得到 B-T 方程的大动量转移散射振幅. 通过与质心系总能为 6.15 GeV 的 p-p 散射实验资料比较,在位阱取为 Gauss 型组合的前提下,定出核力排斥心的高度约为 0.37 GeV,因而否定了无限高硬排斥心的存在. 此外,用这一方法还可以研究其它高能粒子的强相互作用及其随能量变化的规律.

一、引 言

如所周知, Schrödinger 方程

$$V\psi = (E - T_1 - T_2)\psi \quad (1)$$

定义了唯象核力. 通过与实验资料比较,特别是通过对 350 MeV 以下低能相移的分析提供了有关核力外区的信息. Hamada-Johnson 力, Reid 软心力和 Turreil-Sprung 超软心力等模型都很好地解释了低能现象. 但这几种核力的排斥心却截然不同,原因就在于核力内区对低能实验不敏感. 所以,为了了解内区,就必须提高核子碰撞能量,研究有大动量转移的高能散射. 但能量增高时,由于相对论效应变得重要, Schrödinger 方程已不适用,有必要用 B-T 方程来代替它^[1,2].

B-T 方程是 Schrödinger 方程直接的相对论推广. 它把唯象核力的概念推广到较高能量的范畴. 本文将先提出一种求解 B-T 方程的方法,以得到大角度散射振幅,然后通过与实验资料比较,讨论核力排斥心的高度与力程.

二、B-T 方程的散射解

本文所用的方法,就是把文献 [3] 中用于 Schrödinger 方程的方法移植到 B-T 方程上.

在质心系中,两体定态 B-T 方程形式上与(1)完全相同,只是要把 Schrödinger 方程中的总能改为 $E = \sqrt{s} = \sqrt{k^2 + m^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}$, k 为初始相对动量. 动能算符 T_i 的定义则改为 $T_i = \sqrt{-\nabla^2 + m_i^2}$ 或

$$T_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{k^2 + m_i^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2)$$

这样,对于两核子体系, B-T 方程定义了它们之间的唯象核力 V . 当 $m_1 = m_2 = m$, 方程为

$$(E - 2T)\phi = V\phi, \quad (3)$$

两边作用以 T , 整理后可得

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = V'\phi, \quad (4)$$

这里

$$V' = \frac{E + 2T}{4} V. \quad (5)$$

散射振幅^[1]

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | V' | \phi \rangle = -\frac{E}{8\pi} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | V | \phi \rangle = -\frac{E}{8\pi} \langle f | V | \phi \rangle. \quad (6)$$

可以证明(见附录,其中(A 23)是考虑全部修正的严格表达式),

$$\langle f | V | \phi \rangle = \langle f | V | \phi_i^c \rangle + \frac{\Delta k}{E} \langle \phi_i^c - f | h'_i | \phi_i^c \rangle - \frac{1}{2E} \langle \phi_i^c | V^2 | \phi_i^c \rangle + \text{高次项} \quad (7)$$

这里 $h'_i = [(\mathbf{k} + i\nabla_{\parallel})^2 - \nabla_{\perp}^2]/2k$, $\nabla_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

以入射方向 \mathbf{k} 为 z 轴,以出射方向 \mathbf{n} 为 z_f 轴.

$$\phi_i^c = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{E}{4k} z}$$

和

$$\phi_f^c = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{+\frac{E}{4k} z_f}$$

分别是 B-T 方程沿入射和出射方向的 Eikonal 解.

展开式(7)中的首项就是通常的 Eikonal 振幅. 对于小角度散射, ϕ_i^c 是 ϕ 的好的近似,能量愈高近似愈好. 第二项即修正项,由于随动量转移的增加 h'_i 的作用明显加强,所以它的贡献也逐渐增大. 而含 V^2 的项是 B-T 方程所特有的,在 Schrödinger 方程相应的解中不存在. 由于本文不考虑角度很大的散射(例如 $>90^\circ$), (7)式中其余的高级修正项不予考虑.

三、结果和讨论

以下讨论 $P_{LAB} = 19.2 \text{ GeV}/c$ ($\sqrt{s} = 6.15 \text{ GeV}$) 的 pp 弹性散射.

若令

$$V = V_1 e^{-r^2/\beta_1^2} + V_1' e^{-r^2/\beta_1'^2} - V_2 e^{-r^2/\beta_2^2} - iV_3 e^{-r^2/\beta_3^2}, \quad (8)$$

即令核力中包含排斥心、吸引力和虚位阱的成分. 通过计算并与实验资料比较表明力程较长(0.8fm 左右), 强度较大(0.3 GeV 左右)的虚位阱对总截面及小角度散射朝前峰

($|t| \gtrsim 1$) 起决定性作用。一般来说, 虚位阱的强度愈大, 给出的小角度 $\frac{d\sigma}{dt}$ 愈大, 力程愈长, 给出的朝前峰愈陡; 而力程与虚位阱相近的吸引力成分的作用几乎完全被淹没。

对于 ($1 \lesssim |t| \lesssim 2.5$) 的区域, 排斥力和虚位阱同时起作用, 它们之间可能存在着干涉, 给出谷和第二个峰, 显然这一区域对核力的细节比较敏感。

对于 ($|t| \lesssim 2.5$) 的区域, 排斥心起主要的作用, 反之, 虚位阱此时几乎完全不起作用。图 1 给出当 $V'_1 = 0.03$, $\beta'_1 = 0.17$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0.31$, $\beta_3 = 0.82$ (强度和力程的单位分别为 GeV 和 fm, 下同) β_1 取为 0.43, V_1 分别取 1.05、0.44、0.34 和 0 时的计算结果, 在图中分别以曲线 I, II, III, IV 标出。曲线 IV 表明若把排斥心去掉, 虚位阱对这一区域的贡献比实验值小两个数量级。由于本文主要是研究排斥心, 因而我们的讨论也主要局限在这一区域。

在 (8) 式中把排斥心看成是两个高斯势的叠加 (即 V_1 和 V'_1 两部分, 其中 V_1 的力程较长, 强度也比较大)。发现 (V_1, β_1) 对很大一个动量转移区域起主要作用, 直到 $|t| \gtrsim 9$ 时 V'_1 的作用才逐渐显现出来。

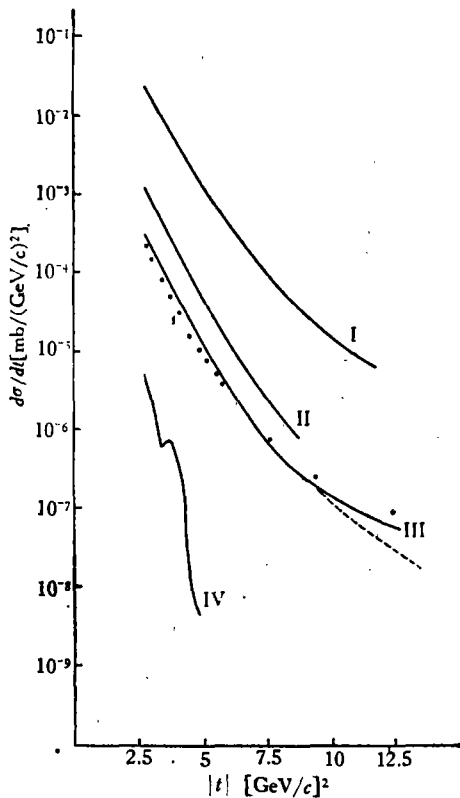


图 1

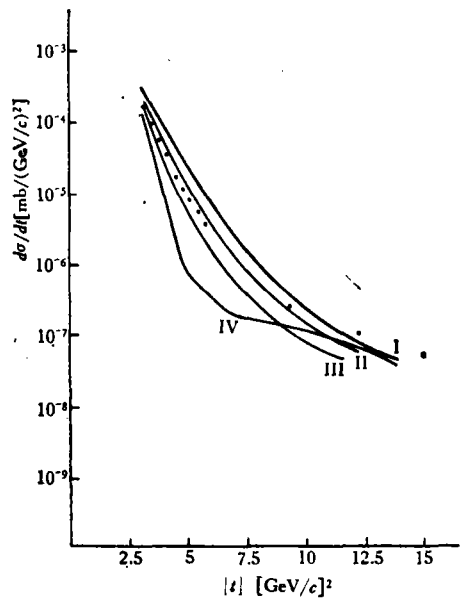


图 2

首先看截面随排斥心强度 V_1 的变化 (图 1)。计算结果表明, 排斥心强度的大小直接影响该区内 $\frac{d\sigma}{dt}$ 的大小。与图中黑点所示的实验值相比可定出 $V_1 \approx 0.34$ GeV 左右。这说明当能量很高时, 核力排斥心并不算高。当然, 所谓的“无限高硬排斥心”是不存在的。

然后讨论排斥心力程 β_1 对截面的影响。图 2 给出当 $V'_1 = 0.03$, $\beta'_1 = 0.17$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0.31$, $\beta_3 = 0.82$; V_1 取为 0.34, β_1 分别取 0.4、0.43、0.48、0.55 时的计算结果, 在图

中分别以曲线 I, II, III, IV 标出. 结果表明, 排斥心力程的大小直接影响该区内 $\frac{d\sigma}{dt}$ 的斜

率, 力程愈长, 斜率愈陡. 与黑点表示的实验值相比, 定出 $\beta_1 \approx 0.43 \text{fm}$.

当考虑更大的动量转移区域 ($|t| > 9$) 时, 为了解释实验, 需要再引入力程更短的排斥心成分. 图 1 中 $|t| > 9 (\text{GeV}/c)^2$ 的区域中, 曲线 III 下面的虚线表示 β_1 变为 0.20 时计算值从曲线 III 引起的变化. 显然, V_1' 和 β_1' 分别为 0.03 和 0.17 的曲线 III 更符合实验.

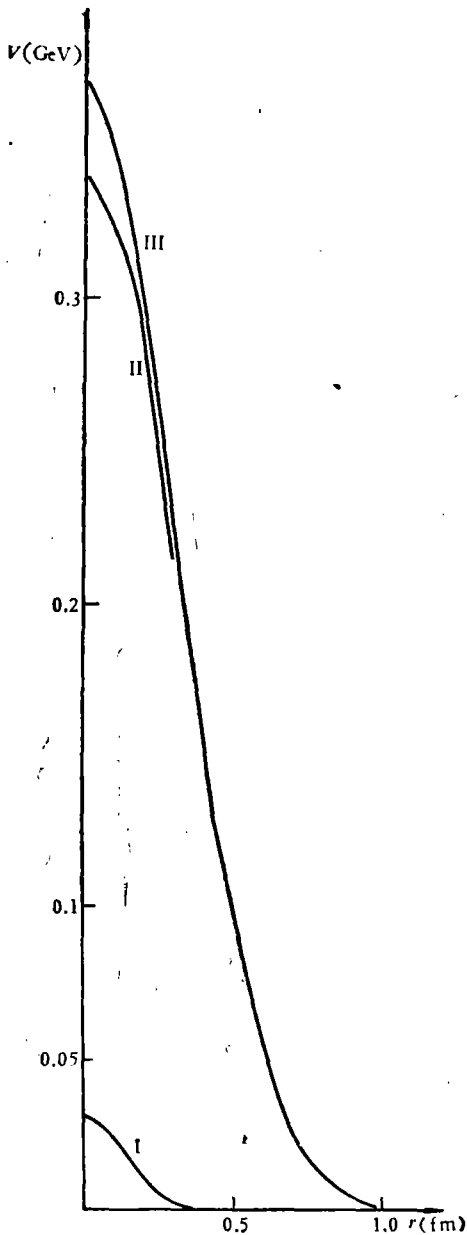


图 3

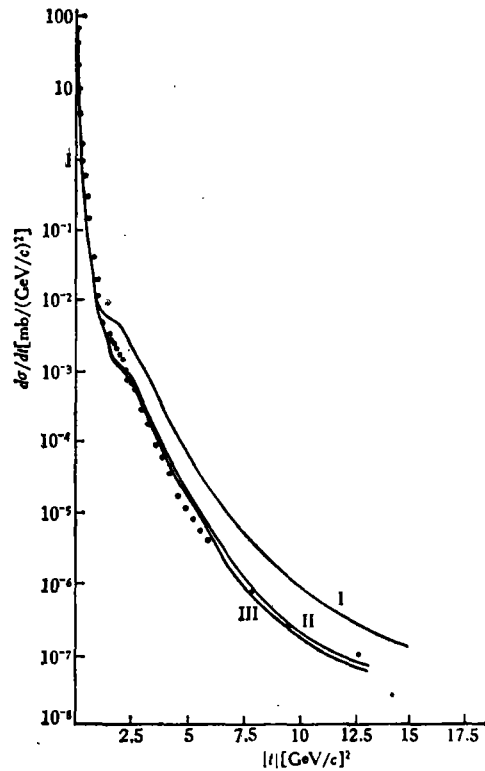


图 4

至此, 我们对排斥心的强度、力程和形状有了一个较为清楚的概念. 图 3 给出了两部分排斥心的贡献 (I, II) 及总的排斥心的形状 (III), 其高度约为 0.37 GeV. 若选择适当的虚位阱, 就能较好地解释 σ_T , $\frac{d\sigma}{dt}$ 等. 图 4 给出了一组与实验符合较好的位阱参数 $V_1 = 0.34$, $\beta_1 = 0.43$, $V_1' = 0.03$, $\beta_1' = 0.17$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0.31$, $\beta_3 = 0.82$ 计算的 $\frac{d\sigma}{dt}$. 其

中曲线 I 表示零级项, 即 (7) 式第一项的结果, 曲线 II 表示加入 h_i 修正的结果, 曲线 III 表示 (7) 前三项的结果。但是, 由此计算的朝前振幅实虚比 ρ 仅为 -0.1 左右, 比人们预期的值^[5] -0.26 要小, 这一点目前尚不能解释。如果考虑能量更高的区域, 排斥心的高度将有所下降。这也可以由 $\frac{d\sigma}{dt}$ 在 ($2.5 \lesssim |t| \lesssim 9$) 区域的实验值随能量增高的下降而看到。

附 录 A

散射振幅的 Eikonal-Born 展开

由正文中得到方程 (4)

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = V'\psi, \quad (\text{A1})$$

并把 V' 变为

$$V' = \frac{EV}{2} + \frac{T - E/2}{2} V. \quad (\text{A2})$$

算子 $\nabla^2 + k^2$ 可展为

$$\nabla^2 + k^2 = 2k(k + i\nabla_{\parallel}) - (k + i\nabla_{\parallel})^2 + \nabla_{\perp}^2, \quad (\text{A3})$$

代入 (A1) 中, 可得包含相对论修正及横动量、纵动量变化修正的方程

$$\left(k + i\nabla_{\parallel} - \frac{EV}{4k}\right)\psi = h_i\psi. \quad (\text{A4})$$

其中

$$h_i = h'_i + h'', \quad (\text{A5})$$

$$h'_i = [(k + i\nabla_{\parallel})^2 - \nabla_{\perp}^2]/2k, \quad (\text{A6})$$

$$h'' = \frac{T - E/2}{4k} V. \quad (\text{A7})$$

在高能时, (A2) 的第一项比第二项大得多, h_i 是一个小量, 作微扰处理, 略去时可得 (A4) 式的零级解 ψ_i^0 , 它满足 Eikonal 近似下的微分方程^[1]

$$(k + i\nabla_{\parallel})\psi_i^0 = \frac{EV}{4k}\psi_i^0 \quad (\text{A8})$$

其中

$$\psi_i^0 = e^{ikz - i\frac{E}{4k}z} \int_{-\infty}^z V dz' \quad (\text{A9})$$

于是 (A4) 式的形式解 ψ 可写为

$$\psi = \psi_i^0 + g h_i \psi_i^0. \quad (\text{A10})$$

这里 g 是方程 (A4) 的 Green 函数, 定义为

$$g \equiv 1 / \left(k + i\nabla_{\parallel} - \frac{EV}{4k} - h_i\right). \quad (\text{A11})$$

将 (A10) 代入文中 (6), 有

$$\langle f|V|\psi\rangle = \langle f|V|\psi_i^0\rangle + \langle f|V|g h_i \psi_i^0\rangle. \quad (\text{A12})$$

与 (A8) 对应, 令 ψ_i^1 满足微分方程

$$(k + i\nabla_{\parallel})\psi_i^1 = \frac{EV^*}{4k}\psi_i^1. \quad (\text{A13})$$

此处

$$\psi_i^1 = e^{ikz + i\frac{E}{4k}z} \int_z^{\infty} V^* dz' \quad (\text{A14})$$

(A13) 的形式解为

$$\psi_i^* = |f\rangle + g_i^* \frac{EV^*}{4k} |f\rangle. \quad (\text{A15})$$

其中 g_i^* 是方程 (A13) 的 Green 函数, 定义为

$$g_i^* \equiv (g_i)^* \equiv 1 / \left(k^- + i\nabla_{\rho f} - \frac{EV^*}{4k} \right). \quad (\text{A16})$$

将 (A15) 代入 (A12) 式中第二项, 并插入 $(g_i^*)^{-1} g_i^* = 1$, 类似文献 [3] 附录中的证明可知, g_i^* 具有 Hermite 性, 于是得

$$\langle f|V|gh_i\psi_i^* \rangle = \frac{4k}{E} \langle \psi_i^* - f | g_i^{-1} g h_i \psi_i^* \rangle. \quad (\text{A17})$$

由于 (A13) 式取共轭与 (A8) 式对应, 相应的非齐次方程的 Green 函数形式一样, 区别仅在 (A8) 是对初态微分, (A12) 是对末态微分, 于是 (A11) 又可写为

$$g = 1 / \left(k - i\nabla_{\rho f} - \frac{EV}{4k} - h_i \right), \quad (\text{A18})$$

$$h_i = h_i' + h', \quad (\text{A19})$$

$$h_i' = \frac{(k - i\nabla_{\rho f})^2 - \nabla_{\rho f}^2}{2k}. \quad (\text{A20})$$

注意到

$$2k(k + i\nabla_{\rho}) - (k + i\nabla_{\rho})^2 = 2k(k - i\nabla_{\rho}) - (k - i\nabla_{\rho})^2, \quad (\text{A21})$$

将 (A18) 代入 (A17), 化简后得到

$$\langle f|V|gh_i\psi_i^* \rangle = \langle \psi_i^* - f | (1 + h_i g) h_i \psi_i^* \rangle, \quad (\text{A22})$$

展开并与 (A12) 合并, 最后得到

$$\begin{aligned} \langle f|V|\psi \rangle &= \langle f|V|\psi_i^* \rangle + \frac{4k}{E} \langle \psi_i^* - f | h_i' | \psi_i^* \rangle \\ &- \frac{1}{2E} \langle \psi_i^* | V^2 | \psi_i^* \rangle - \frac{1}{2E} \langle h_i^* \psi_i^* | \tilde{g} V^2 | \psi_i^* \rangle - \frac{1}{2E} \langle \psi_i^* | V^2 g | h_i' \psi_i^* \rangle \\ &- \frac{1}{E} \langle \psi_i^* | [V, T] g h' | \psi_i^* \rangle + \frac{4k}{E} \langle h_i' \psi_i^* | g | h_i' \psi_i^* \rangle - \frac{1}{E} \langle h_i^* \psi_i^* | g [V, T] \tilde{g} | h' \psi_i^* \rangle \\ &- \frac{1}{2E} \langle h_i^* \psi_i^* | \tilde{g} V^2 g | h_i' \psi_i^* \rangle - \frac{4k}{E} \langle h_i^* \psi_i^* | \tilde{g} h g | h_i \psi_i^* \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

其中 \tilde{g} 表示 g 的转置.

容易看出, 第一项是十项中唯一既没有 $1/E$ 因子, 又没有算符 h 的项, 因此, 在高能时, 这是起主要作用的项. 考虑到 h_i' , h_i' , h' 和 $[V, T]$ 作用在相应的 Eikonal 波函数上都是小量, 且 $V \ll E$, 可见, 第二、三项是一阶小量, 中间四项是二阶小量, 最后三项是三阶小量.

此外, 在计算二阶小量时, 可作下述近似处理

$$\therefore TV\psi = T(E - 2T)\psi = \left[2(\nabla^2 + k^2) - \frac{EV}{2} \right] \psi,$$

\therefore 可近似取

$$h' \psi_i^* \approx \frac{2(\nabla^2 + k^2) - EV}{4k} \psi_i^*.$$

同理, 令

$$\begin{aligned} TV^* \psi_i^* &\approx \left[2(\nabla^2 + k^2) - \frac{EV^*}{2} \right] \psi_i^*, \\ [T, V] \psi_i^* &\approx \left[2(\nabla^2 + k^2) - EV^* + \frac{V^{*2}}{2} \right] \psi_i^*, \end{aligned}$$

$$h^{*} \psi_{j}^{*} \approx \frac{2(\nabla^{2} + k^{2}) - EV^{*}}{4k} \psi_{j}^{*},$$

而中间的传播子则近似取为

$$g \approx 1/(\nabla^{2} + k^{2}) \approx \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k + i\nabla_{m}} + \frac{1}{k - i\nabla_{m}} \right)$$

其中 ∇_{m} 是沿入射和出射所夹角平分线的方向微商。

参 考 文 献

- [1] 鲍诚光、赵维勤, 高能物理与核物理, **2**(1978), 336; **3**(1979), 183; **3**(1979), 333.
 [2] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.*, **21**(1949), 392; B. Bakamjian, L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, **92**(1953), 1300; L. L. Foldy, *Phys. Rev.*, **122**(1961), 275; F. Coester, *Helv. Phys. Acta.*, **38**(1965), 7.
 [3] 卢世琪、朱熙泉、赵维勤、鲍诚光, 高能物理与核物理, **5**(1981), 121.
 [4] T. V. Allaby et al., *Phys. Lett.*, **28B**, 1(1968), 67.
 [5] D. I. Abarbanel, *Rev. Mod. Phys.*, **48**(1976), 435.
 [6] A. D. Krisch, Review Talk at 1977 Meeting of American Physical Society Division of Particles and Fields, October 7, 1977, Argonne.

SCATTERING AMPLITUDE WITH LARGE MOMENTUM TRANSFER CALCULATED FROM THE BAKAMJIAN-THOMAS EQUATION AND THE REPULSIVE CORE OF NUCLEAR FORCE

PAN JI-ZHI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

WANG WEI-WEI

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ZHAO WEI-QIN BAO CHENG-GUANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Using Born expansion of Elkonal wave function, a scattering amplitude with large momentum transfer is obtained for B-T equation. Comparing with the experimental data of p-p scattering at $\sqrt{s} = 6.15$ GeV, it is determined that the height of the repulsive core is about 0.37 GeV for a combined Gaussian potential, thus it is proved that an infinite hard repulsive core does not exist in the nuclear force. Besides, this method can be used to investigate the strong interaction and its variation with energy for other high energy particles.