第5卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 5, No. 4
1981年7月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1981

多扇环形结构永磁多极系统的三维场形分析

刘茂三　陈仁怀　吴文泰　李淑珍
（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

本文根据"均匀磁化"原理，利用谐波分析方法对一种新型结构的多极系统——多扇环形结构永磁多极场的场形进行了计算，得到了三维的解析表达式．用它可计算多极系统任一截面的磁场形态．

一、前　　言

永磁透镜是带电粒子束聚焦的重要元件之一．它很早就已较广泛地应用于电真空器件以及离子源等领域．近年来，由于稀土-钴磁性材料的发展，特别是由于采用了更合理的新颖磁路，即多扇环形结构，有效地克服了漏磁，永磁强聚焦透镜的应用已扩大到高能直线加速器及其输运系统[1-3]．无疑，这必将对加速器技术产生重要影响．本文分析这种新型结构多极场的磁场形态．

这方面的研究工作，我们是从1978年末开始的[4]．我们所作的假设条件是：每个磁体（磁极是由许多磁体组成的）处处都被均匀磁化，即磁体内各点磁化强度 M 的大小与方向均相同．这个前提在实际上是不难实现的．对某些各向异性的永磁材料（例如钐钴合金），在其易磁化方向上，其返回导磁率 $\mu_r \simeq 1$，而在垂直于易磁化方向上，其导磁率 $\mu_\perp \simeq 1$．这种材料的去磁曲线为一根45度直线，即在易磁化方向上，磁化强度恒为常量，而在垂直于易磁化方向上，磁化强度恒为零．故对这类材料，是不难获得并保持"均匀磁化"的．

根据"均匀磁化"原理，任一体积为 V' 的均匀磁化磁体在无电流或自由空间电荷的空间任一点所产生的标量磁位为[5]

$$\phi(r,\theta,z) = M_r\int_{V'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{\rho}\right)dV' + M_\theta\int_{V'}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)dV' + M_z\int_{V'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\rho}\right)dV', \tag{1}$$

式中

本文1980年3月17日收到．

$$\rho=\sqrt{r^2+r'^2+(z-z')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')},$$

M_r 等为均匀磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 在相应方向上的分量．带“′”的坐标表示积分动点坐标；不带“′”的表示观测点坐标．

空间任一点的磁场强度则为

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\phi. \tag{2}$$

我们根据上述原理，利用解析分析方法对多扇环形结构多极系统的磁场形态进行了计算，得到磁场按谐波分布的三维表达式．

二、多扇环形结构永磁多极系统的磁场形态

由位于同一圆周上均匀排布的若干组扇状（也可为其他形状）磁体所构成的多极系统，我们称之为多扇环形结构多极系统．不难想象，各个磁体的充磁方向应是连续渐变并具某种对称的(多极对称)，见文献 [8] 中图 1，此多扇结构 N 极系统由一组 N 扇沿径向均匀磁化、另一组 N 扇沿角向均匀磁化；另外还有 n 组 (n 为偶数)每组各有 N 扇沿斜向均匀磁化1)(方向连续渐变)的磁体所构成，对称分布于一圆环区域内，环的内半径为 R_1，外半径 R_2；纵向长度 $2L$．各组扇面磁体的张角分别为 2α, 2β 及 2γ；扇间夹角为 $\dfrac{2\pi}{(n+2)N}$；斜向磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与径向的夹角分别为 φ_1, $\varphi_2\cdots\varphi_{\frac{n}{2}-1}$, $\varphi_{\frac{n}{2}}$ 及 $(\pi-\varphi_{\frac{n}{2}})$, $(\pi-\varphi_{\frac{n}{2}-1})\cdots(\pi-\varphi_2)$, $(\pi-\varphi_1)$．另外又设各扇磁体的磁化强度绝对值均相同2)，且等于 M，磁化方向则如图 1 所示．根据 (1) 式，此 N 极系统在空间任一点所产生的标量磁位为

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta,z)=M\int_{R_1}^{R_2}r'dr'\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l-1}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial r'}\Bigg[\int_{\frac{2(l-1)\pi}{N}-\alpha}^{\frac{2(l-1)\pi}{N}+\alpha}\frac{d\theta'}{\rho}\\
&+\sum_{p=1}^{n/2}\cos\varphi_p\left(\int_{\frac{2[(l-1)(n+2)+p]\pi}{N(n+2)}-\gamma}^{\frac{2[(l-1)(n+2)+p]\pi}{N(n+2)}+\gamma}\frac{d\theta'}{\rho}-\int_{\frac{2[l(n+2)-p]\pi}{N(n+2)}-\gamma}^{\frac{2[l(n+2)-p]\pi}{N(n+2)}+\gamma}\frac{d\theta'}{\rho}\right)\Bigg]\\
&+\Bigg[\int_{\frac{(2l-1)\pi}{N}-\beta}^{\frac{(2l-1)\pi}{N}+\beta}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\left(\frac{d\theta'}{\rho}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n/2}\sin\varphi_p\left(\int_{\frac{2[(l-1)(n+2)+p]\pi}{N(n+2)}-\gamma}^{\frac{2[(l-1)(n+2)+p]\pi}{N(n+2)}+\gamma}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\left(\frac{1}{\rho}\right)d\theta'\right.\\
&\left.+\int_{\frac{2[l(n+2)-p]\pi}{N(n+2)}-\gamma}^{\frac{2[l(n+2)-p]\pi}{N(n+2)}+\gamma}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{V}_{d\theta'}\right)\Bigg]\Bigg\}dz'.\end{aligned} \tag{3}$$

利用下列积分公式和贝塞尔函数的谐波展开关系式[6,7]

$$\frac{1}{\rho}=\int_0^{\infty}e^{-|z-z'|\lambda}J_0(f\lambda)d\lambda, \tag{4}$$

1) 斜向磁化磁体内，磁化强度与径向夹角保持不变，在 z 方向，则不受磁化．

2) 实际上，对相应各组磁体分别取不同值，处理方法还是一样的．

$$J_0(f\lambda) = J_0(\lambda r)J_0(\lambda r') + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')\cos m(\theta - \theta'), \tag{5}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-|z-z'|\lambda} J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')d\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{rr'}} Q_{m-\frac{1}{2}}(x), \tag{6}$$

式中

$$f^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta'), \quad x = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}, \tag{7}$$

$Q_{m-\frac{1}{2}}(x)$ 为半整数阶勒让德函数.

将以上各式代入 (3) 式，对 θ' 积分后再求和，便不难得到多扇环形结构多极系统的标量磁位

$$\phi(r, \theta, z) = \frac{2M}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} r'dr' \int_{-L}^{L} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial r'} \left[\frac{Q_{m-\frac{1}{2}}(x)}{m\sqrt{rr'}} \left(S^{(m)} + \sum_{p=1}^{n/2} \cos\varphi_p S_{\varphi}^{(m,p)} \right) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{Q_{m-\frac{1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}} \left[C^{(m)} + \sum_{p=1}^{n/2} \sin\varphi_p C_{\varphi}^{(m,p)} \right] \right\} dz'. \tag{8}$$

式中 $S^{(m)} = 2N\sin m\alpha\cos m\theta$,

$$S_{\varphi}^{(m,p)} = (-1)^{\frac{6m+N}{2N}} 4N\sin m\gamma\sin m\frac{[(n+2)-2p]\pi}{N(n+2)}\cos m\theta,$$

$$C^{(m)} = (-1)^{\frac{6m+N}{2N}} 2N\sin m\beta\cos m\theta,$$

$$C_{\varphi}^{(m,p)} = (-1)^{\frac{6m+N}{2N}} 4N\sin m\gamma\cos m\frac{[(n+2)-2p]\pi}{N(n+2)}\cos m\theta. \tag{9}$$

其中 $m = \frac{N}{2}, \frac{3N}{2}, \frac{5N}{2} \cdots \frac{2K-1}{2}N \cdots$.

在 (8) 式中令 $\varphi_p = p\varphi_0$，并对 p 求和；便得到多扇环形系统标量磁位的最后表达式

$$\phi(r, \theta, z) = \frac{4NM}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2K-1)N}\left[\sin\frac{2K-1}{2}N\alpha + (-1)^K\sin\frac{2K-1}{2}N\gamma\right.\right.$$
$$\cdot\left(\sin\frac{n+2}{4}\left(\varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)\frac{\sin\frac{n}{4}\left(\varphi_0 + \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}\right.$$
$$\left.\left. - \sin\frac{n+2}{4}\left(\varphi_0 + \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)\cdot\frac{\sin\frac{n}{4}\left(\varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}\right)\right]$$
$$\cdot\int_{R_1}^{R_2} r'dr'\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{2K-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}dz' + (-1)^K\left[\sin\frac{2K-1}{2}N\beta\right.$$
$$+ \sin\frac{2K-1}{2}N\gamma\left(\sin\frac{n+2}{4}\left(\varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot \frac{\sin\frac{n}{4}\left(\varphi_0+\frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0+\frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}$$

$$+\sin\frac{n+2}{4}\left(\varphi_0+\frac{2K-1}{n+2}\pi\right)\frac{\sin\frac{n}{4}\left(\varphi_0-\frac{2K-1}{n+2}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\frac{2K-1}{n+2}\right)}\Bigg)\Bigg]$$

$$\int_{R_1}^{R_2}dr'\int_{-L}^{L}\frac{Q_{\frac{2K-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}dz'\Bigg\}\cos\frac{2K-1}{2}N\theta. \tag{10}$$

将 (10) 式分别对 r 及 θ 微分，便可得到径向及角向磁场分量．我们看到，这种系统所产生的多极场，除主波 ($K=1$) 外，同时存在许多寄生的高次谐波，这些谐波越大，对多极系统的好场区越不利．因此应尽可能多地消除它们．经过分析，不难看出，要使寄生谐波最大限度地自动相互抵消，必须同时满足如下两个条件：(i) 每块磁体扇面张角均相等，即 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\varepsilon\pi}{N(n+2)}$；(ii) 斜向磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与径向夹角应始终保持 $\varphi_p=p\varphi_0=\frac{p\pi}{n+2}$．此时多极系统的径向及角向磁场分量[1)]主波可写成

$$H_r(r,\theta,z)=-2AM\cos\frac{N}{2}\theta\int_{R_1}^{R_2}r'dr'$$

$$\cdot\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{N-1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}-\frac{N}{2}\frac{Q_{\frac{N-1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}}\right]dz', \tag{11}$$

$$H_\theta(r,\theta,z)=ANM\sin\frac{N}{2}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'}{r}dr'$$

$$\cdot\int_{-L}^{L}\left[\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{N-1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}-\frac{N}{2}\frac{Q_{\frac{N-1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}}\right]dz'. \tag{12}$$

而残存的磁场寄生谐波为

$$H_r(r,\theta,z)=-\frac{4M(n+2)}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{R_1}^{R_2}r'dr'$$

$$\cdot\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\sin\frac{2(n+2)j-1}{2(n+2)}\varepsilon\pi}{2(n+2)j-1}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{2(n+2)j-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2(n+2)j-1}{2}N\frac{Q_{\frac{2(n+2)j-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}}\right]$$

$$\cdot\cos\frac{2(n+2)j-1}{2}N\theta+\frac{\sin\frac{2(n+2)j+1}{2(n+2)}\varepsilon\pi}{2(n+2)j+1} \tag{13}$$

1) 对纵向分量 H_z 我们不感兴趣．

$$\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}-\frac{2(n+2)j+1}{2}\right.$$

$$\left.\cdot N\cdot\frac{Q_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}}\right]\cos\frac{2(n+2)j+1}{2}N\theta\Bigg\}dz', \tag{14}$$

$$H_\theta(r,\theta,z)=\frac{2(n+2)NM}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\sin\frac{[2(n+2)j-1]\varepsilon\pi}{2(n+2)}\sin\frac{[2(n+2)j-1]}{2}N\theta$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'}{r}dr'\int_{-L}^{L}\left[\frac{\partial}{\partial r'}\frac{Q_{\frac{2(n+2)j-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}\right.$$

$$\left.+\frac{2(n+2)j-1}{2}N\frac{Q_{\frac{2(n+2)j-1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{r'\sqrt{rr'}}\right]dz'$$

$$+\sin\frac{[2(n+2)j+1]\varepsilon\pi}{2(n+2)}\sin\frac{2(n+2)j+1}{2}N\theta$$

$$\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'}{r}dr'\int_{-L}^{L}\left[\frac{Q_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{rr'}}\right.$$

$$\left.-\frac{2(n+2)j+1}{2}N\frac{Q_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N-\frac{1}{2}}(x)}{r\sqrt{rr'}}\right]dz'\Bigg\}. \tag{15}$$

式中

$$A=\frac{2(n+2)}{\pi}\sin\frac{\varepsilon\pi}{2(n+2)},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1 \tag{16}$$

ε 为填充系数. 从(16)式明显可见，当斜向磁体扇数无限增加，即 $n\to\infty$ 时，主波振幅达到最大值，$A\to\varepsilon$. 同时可以看出若干次寄生谐波均已自动消除(这是多扇结构很大的优点). 残留的最低次谐波数 $m=\frac{2n+3}{2}N$.

表1给出在二极、四极、六极、八极系统中，对应不同扇数的 A 值及最低谐波数 ($\varepsilon=1$). 例如16扇的四极系统 ($n=2, N=4$), 6次、10次谐波已自动消除，最低谐波为14次，而 $A=0.975$, 和理想情况 ($n\to\infty$) 仅差2.5%.

工作过程中，得到我所谢家麐先生、徐建铭同志的大力支持，并同北京钢铁研究院周杰民同志、北京大学西门纪业同志进行过有益的讨论，在此一并表示感谢.

表1 二～八极场对应不同扇数的 A 值与最低谐波数

N (极数)	2 (二极)				4 (四极)				6 (六极)				8 (八极)			
n (每极斜向磁化扇数)	0	2	4	6	0	2	4	6	0	2	4	6	0	2	4	6
$N(n+2)$(扇数)	4	8	12	16	8	16	24	32	12	24	36	48	16	32	48	64
m(最低谐波数)	3	7	11	15	6	14	22	30	9	21	33	45	12	28	44	60
A ($\varepsilon=1$)	0.900	0.975	0.989	0.994	同左				同左				同左			

参　考　文　献

[1] Б. П. Мурин, В. И. Рогачев, А. П. Федотов, "О возможности применения квадруполей с постоянными магнитами в Линейных ускорителях протонов на высокие энергии" ПТЭ, 19(2) (1976),

[2] R. F., Holsinger, ''The drift tube and beam line quadrupole permanent magnets for the NEN proton linac'' Proton Linear Accelerator Conference (1979).

[3] K. Halbach, ''Strong rare earth cobalt quadrupoles'' *IEEE* Transaction on nuclear science, June (1979).

[4] 刘茂三，吴文泰，李淑珍，"永磁透镜场形解析分析及其几何参数选择"(1979 年工作总结).

[5] Г. И. Будкер, Расчет параметров шимм при исправлении локальных неоднороностей в магнитном полем, Отчет ИЯП АНОССР (1951).

[6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжин, "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений" pp721, 993; 723. (1971) Москва. (Изд. пятое).

[7] Н. Н. Лебедев, "Специальные функции и их приложение" (1949) Москва.

[8] 刘茂三等，高能物理与核物理. 4(1980), 774.

ON THE ANALYSIS OF SEGMENTED RING OF PERMANENT MAGNET MULTIPOLE FIELDS

LIU MAO-SAN　CHEN REN-HUAI　WU WEN-TAI　LI SHU-ZHEN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Assuming uniform magnetization of individual magnet pieces, a three dimensional analytical expression for the magnetic field of a newly developed multipole structure of the permanent magnet segmented ring is derived.