

量子色动力学中的 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 过程

黄朝商 戴元本

(中国科学院理论物理研究所)

摘 要

本文利用 QCD 的渐近自由性质, 求出一条腿动量平方固定另一条腿动量平方趋于无穷大时的波函数, 并把它应用于计算 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 过程 (其中 π 介子相对于层子喷注轴有大的横动量). 计算结果表明, 这个过程对 $e^+ + e^- \rightarrow$ 强子截面的贡献比 $e^+ + e^- \rightarrow g + q + \bar{q}$ 过程的贡献小得多.

通常在量子色动力学对 $e^+ + e^- \rightarrow$ 强子过程的计算中, 作为对最低阶图 $e^+ + e^- \rightarrow$ 层子对 $q\bar{q}$ 的修正, 考虑的是层子放出一个胶子的图形, 在本文中我们将考虑层子放出一个 π 介子的过程对量子色动力学计算的影响. 我们先从两条腿动量平方均趋于无穷大的渐近波函数求出一条腿动量平方固定另一条腿趋于无穷大时的波函数, 然后把它应用于计算 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 过程, 最后对结果进行一些讨论.

考虑截了腿的束缚态波函数 $\Gamma(p_1, p_2)$ 其中 p_1^2 (或 p_2^2) 在质壳上而 $|p_1^2|$ (或 $|p_2^2|$) 很大 (p_1, p_2 分别是层子、反层子的四动量). 我们来证明 p_2 在质壳上并不妨碍利用渐近自由得到 $\Gamma(p_1, p_2)$ 在 $|p_1^2| \rightarrow \infty$ 时的表示式. 它的领头项由图 1 表示, 其中束缚态波函数 $\chi(v_1, v_2)$ 满足条件 $|v_1^2|, |v_2^2| \ll |p_1^2|$, 因此在用费曼规范计算时

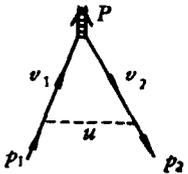


图 1

$$\Gamma(p_1, p_2) = g^2(\mu^2) C_2(F) \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4u \frac{\delta_{\mu\nu}}{u^2} \gamma_\mu \chi(v_1, v_2) \gamma_\nu, \quad (1)$$

其中 μ 为重积分减除点, $C_2(F)$ 为层子的 $SU(3)_c$ Casimir 算符, (1) 式中积分的主要贡献在 $|v_1^2|, |v_2^2| \gg m^2$ 的区域. 此区域中 $\chi(v_1, v_2)$ 的渐近形式在文献 [1, 2] 中用算符乘积展开式讨论过, 我们有

$$\chi(v_1, v_2) \sim \hat{P} \gamma_5 \phi(P \cdot v, v^2) = \hat{P} \gamma_5 \phi_P(v), \quad (2)$$

其中 $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, $P = v_1 - v_2 = p_1 - p_2$, 是束缚态的四动量.

令

$$P = (P_+, 0, 0, 0), \quad x = \frac{v^2}{P \cdot v} \simeq \frac{2v_{\pm}}{P_+}, \quad (v_{\pm} = v_0 \pm v_3)$$

则

$$u^2 \simeq \frac{1}{2} p_1^2 (1 - x). \quad (3)$$

由文献 [2] 知道, 如果在算符乘积展开式中的扭度为 2 的算符中只考虑自旋最小的项, 则

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 v_1 \int d^4 v_2 \phi_P(v) = a(1 - x^2), \quad (4)$$

其中

$$a = \frac{\sqrt{6}}{8} f_{\pi}. \quad (5)$$

由 (1)–(5) 式得到在 $p_1^2 \rightarrow \infty$ 时

$$\Gamma(p_1, p_2) = -\frac{\sqrt{6}}{2} f_{\pi} g^2(\mu^2) C_2(F) \frac{\beta}{p_1^2} \gamma_5. \quad (6)$$

注意, (3) 式和 (4) 式中的因子 $(1 - x)$ 在 (1) 式中消去, 因此 $1 - x \simeq 0$ 处的贡献不重要, u^2 和 p_1^2 是同一量级的。

考虑图 1 中的胶子线 u 及其两端顶角的辐射修正。在图 1 中的 $u - v_2 - p_2$ 顶点有 $|u^2| \gg |v_2^2| \gg |p_2^2|$, 故为紫外发散重整化相联的对数因子为 $\ln \frac{u^2}{\mu^2} \simeq \ln \frac{p_1^2}{\mu^2}$ 。同样, $p_1 - u - v_1$ 顶点及胶子内线的辐射修正也只产生这样的对数因子。因此, 如果选取 $\mu^2 = p_1^2$, 则辐射修正不产生与紫外发散相联系的大的对数因子。

这样, 我们得到 $p_2^2 = m^2, p_1^2 \rightarrow \infty$ 时束缚态项角为

$$\Gamma(p_1, p_2) = -2\sqrt{6} \pi f_{\pi} \alpha_s(p_1^2) C_2(F) \frac{\beta}{p_1^2} \gamma_5. \quad (7)$$

二、

现在我们计算由图 2 所表示的层子放出一个 π 介子的过程。在图中标明了各个粒子的动量。

为了能利用量子色动力学的渐近自由的性质, 我们限于讨论 $|p_2^2|$ 大的情况, 这相应于 π 介子相对于 $-p_1$ 有较大的横动量, 在以下的计算中将忽略层子质量 m 和 π 介子质量 m_{π} 。相应于图 2 的振幅为

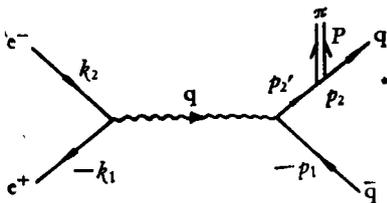


图 2

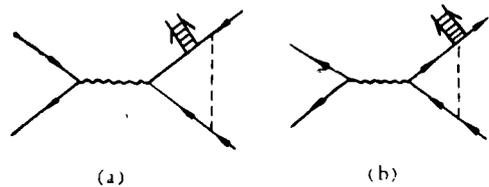


图 3

$$M = (2\pi)^4 (-i) \frac{e^2}{q^2} \bar{v}(k_1) \gamma_\mu u(k_2) N_\mu \quad (8)$$

其中

$$N_\mu = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \bar{v}(p_1) \gamma_\mu Q \frac{-1}{\not{p}'_2} \Gamma(p'_1, p_2) u(p_2), \quad (9)$$

这里 Q 为电荷矩阵, $\Gamma(p'_1, p_2)$ 为束缚态顶角, 在现在所讨论的情形, $p'_2 = 0$ 而 $|p'_2|$ 很大, 故可以利用上节得到的 (7) 式, 在考虑反层子放 π 介子的图形并对 π^+ 和 π^- 的贡献相加后得到 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 的总截面为

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}) = \sigma(e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}) \cdot 3f_\pi^2 \int_{S_{2\min}}^S \frac{\alpha_s^2(S_2)}{S_2^2} \left(2 - \frac{3S_2}{S} + \frac{S_2^3}{S^3} \right) dS_2, \quad (10)$$

其中

$$S = -q^2, \quad S_2 = |p'_2|^2, \quad \alpha_s(S_2) = \frac{g^2(S_2)}{4\pi} = \frac{1}{b \ln \frac{S_2}{\Lambda^2}},$$

$S_{2\min}$ 为引入的截断, q, \bar{q} 为 u 或 d 层子. (10) 式中的积分主要由 S_2 靠近 $S_{2\min}$ 处所贡献. 这是由于 (7) 式中束缚态顶角的因子 $\frac{1}{\not{p}'_2}$ 压低了 $|p'_2| = O(|q^2|)$ 处的贡献. (10) 式适用于 $S_{2\min}$ 足够大因而算符乘积展开式中高自旋项可以忽略的情况. 高自旋项的修正为 $(\ln \frac{S_2}{\Lambda^2})^{-r^n/b_0}$, ($n = 3, 5, \dots$) 的量级 (r^n, b_0 等符号的含义见文献 [1]).

在 α_s^2 阶对上述层子 (或反层子) 放出一个大动量 π 介子过程有贡献的还有如图 3 所示的费曼图, 计算表明, 图 3(a) 对截面的贡献比图 2 至少小一个量级. 而图 3(b) 的贡献包含在前面计算图 2 时所略去的渐近波函数算符乘积展开式中高自旋项 $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n} \psi$ 的贡献之中^[3]. 因此, 就领头项而言, $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 总截面如 (10) 式所示.

我们在 (4) 式中略去了 $(\ln \frac{S_2}{\Lambda^2})^{-r^n/b_0}$ 的项. 当 $S_2 = O(S)$ 时这些被略去的项是小的, 在 $S_2 = O(S)$ 的情形, 容易算出在质心系 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 的微分截面

$$\frac{d\sigma}{dz} \simeq \frac{\alpha_s^2(S) f_\pi^2}{S^2} 8\pi \left\{ z \left[\ln \frac{2-z(1+\cos\theta_{\min})}{1-\cos\theta_{\min}} - \frac{(1-z)(1+\cos\theta_{\min})}{2-z(1+\cos\theta_{\min})} \right] + \frac{4(1-z)^2}{z} \left(\frac{1}{1-\cos\theta_{\min}} - \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (11)$$

其中 $z = \frac{2|P|}{\sqrt{S}}$, θ_{\min} 是 π 介子动量 P 与 $-p_1$ 夹角的截断, 即截面以 $\alpha_s^2(S)/S^2$ 速率随 S 增大而下降.

层子放射 ρ 介子的过程 $e^+ + e^- \rightarrow \rho + q + \bar{q}$ 也可以用类似的方法计算.

三、

最后, 我们对结果作一些讨论, 假如减少对介子横动量的截断, 取 $S_{2\min} \ll S$, 由 (10)

可得

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}) / \sigma(e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}) \simeq \frac{6f_\pi^2}{S_{2\min}} \cdot \frac{1}{b^2 \ln^2 \frac{S_{2\min}}{\Lambda^2}}. \quad (12)$$

由于 π 介子衰变常数 $f_\pi \simeq 93\text{MeV}$ 是一个小量, 这只是一个小的修正。如果取 $\Lambda = 350\text{MeV}$, $\sqrt{S_{2\min}} = 1\text{GeV}$, 则(12)式右边的值约为 10^{-2} 。如 $\sqrt{S_{2\min}} = 700\text{MeV}$, 则(12)式右边的值约为 $\frac{1}{20}$, 这里的数值结果对 $S_{2\min}$ 的选取比较敏感, 考虑到 $S_{2\min}$ 小时应当计入(4)式中所略去的高自旋项及 α_s 高阶的贡献, 这些数字只能看作是很粗的对数量级的估计。

我们也计算了在 $S_{2\min} \ll S$ 情形下 π 介子相对于 $-p_1$ 的横动量的平均值, 结果为

$$\langle p_1^2 \rangle \simeq \frac{1}{6} S_{2\min} \ln \frac{S_{2\min}}{\Lambda^2}. \quad (13)$$

$\frac{1}{6} S_{2\min}$ 大体上是 π 介子横动量的量度。

总括起来, 比较可靠的结论是, 如果限于大横动量的 π 介子 (例如 $p_1^2 > \frac{1}{5} \text{GeV}^2$), 则 $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ 过程是不重要的, 它不能与通常量子色动力学计算层子胶子图的贡献相比。特别是 π 介子动量与 $-p_1$ 夹角有限时, 截面 $\propto \frac{1}{S^2}$, 但是以上计算也给出一些迹象, 表明如果减少对介子横动量的截断, $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{介子} + q + \bar{q}) / \sigma(e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q})$ 有可能达到 $\frac{1}{10}$ 。这可能是 $e^+ + e^- \rightarrow$ 强子实验截面比现有量子色动力学理论计算结果大一些的原因。只是由于我们现在还不能估计渐近波函数中相应于算符乘和展开式的高自旋(自旋大于 1) 项的贡献, 所以对于这一点无法作出可靠的结论。

参 考 文 献

- [1] 黄朝商, 高能物理与核物理, 4(1980), 761.
- [2] S. J. Brodsky et al., Preprint TH 2731-CERN (1979).
- [3] A. Duncan and A. H. Mueller, Preprint CU-TP-162 (1979).

THE PROCESS $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ IN QUANTUM CHROMODYNAMICS

HUANG CHAO-SHANG DAI YUAN-BEN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper we investigate the behavior of the B-S wave function as the squared momentum on one leg becomes infinite while the squared momentum on the other leg remains fixed by using the property of asymptotic freedom in QCD. Using the obtained wave function we compute the cross section of the process $e^+ + e^- \rightarrow \pi + q + \bar{q}$ (where the pion has large transverse momentum perpendicular to the axis of a straton jet). We find that the contribution of this process to the cross section of $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$ is much smaller than the process $e^+ + e^- \rightarrow g + q + \bar{q}$.