

非周期系统束流包络分析

魏开煜

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文分析了非周期交变聚焦系统的束流包络。直接求解包络函数 β 的非线性方程

$$(\sqrt{\beta})'' + Q(x)\sqrt{\beta} - \frac{1}{(\sqrt{\beta})^3} = 0,$$

得到了 β 函数的精确分析表达式。利用这些分析表达式,讨论了束流包络极大值和极小值存在的判别条件,导出了计算包络极大值和极小值及其位置的精确公式。这是不同于常用的矩阵计算方法的另一种方法。二者可以相互校核。

一、引 言

对于交变聚焦系统,假如取系统的中心轨道为纵向坐标轴 Z ,沿束流前进的方向为正向;两个横向坐标轴 X, Y 分别在水平和铅直面内垂直于 Z 轴,并且 XYZ 构成右旋坐标系。那么束流的横向包络函数 β 的方程式具有如下的形式

$$(\sqrt{\beta_u})'' + Q_u(x)\sqrt{\beta_u} - \frac{1}{(\sqrt{\beta_u})^3} = 0, \quad u = x, y \quad (1.1)$$

式中“ $'$ ”表示对 Z 微分。对于非周期系统, $Q_u(x)$ 是非周期函数,一般地说, β_u 也将是非周期函数。但是在非周期系统中,亦可以用函数 $\beta_u, \alpha_u, \gamma_u$ 来描写束流发散度的形状。其中 β_u 和 α_u 被看做是独立的,它们之间有如下的关系

$$\alpha_u = \frac{1}{2} \beta_u', \quad \gamma_u = (1 + \alpha_u^2)/\beta_u. \quad (1.2)$$

束流包络及其导数可以通过 β_u, α_u 以及束流发散度的大小 ε_u 表示为

$$a_u = \sqrt{\varepsilon_u \beta_u}, \quad a_u' = \sqrt{\frac{\varepsilon_u}{\beta_u}} \cdot \alpha_u. \quad (1.3)$$

迄今,无论对于周期系统或非周期系统,人们都是通过单粒子轨迹的转换矩阵元来计算 β_u 和 α_u ,从而得到束流的发散度形状和包络。除了漂移节之外,方程(1.1)只用来定性讨论束流包络的极值问题。我们对于聚焦节,散焦节和漂移节分别直接求得了非线性

性方程 (1.1) 的精确解, 以函数 β_u 和 α_u 在各节边界上连续的条件把分节解相连接, 就构成了 β_u 和 α_u 的精确分析表达式. 运用这些表达式, 讨论了束流包络极值存在的确切判别条件. 导出了计算包络极值及其位置的精确公式.

运用所得到的分析公式, 计算了一个具体例子. 计算结果同《TR(1)》程序^[4]用矩阵方法在电子计算机上所得到的束流包络值进行了比较, 二者符合得很好. 说明两种方法是可以相互校核的.

二、函数 β_u 和 α_u 的分析表达式

如众所知, 对于四极透镜和漂移节, 有

$$Q_x = h \frac{eB'}{m_0c^2\gamma_p\beta_p}, \quad Q_y = -h \frac{eB'}{m_0c^2\gamma_p\beta_p}. \quad (2.1)$$

式中 e 和 m_0c^2 分别是粒子的电荷和静止能量; B' 是透镜磁场梯度; $\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}}$; $\beta_p = \frac{v}{c}$, v 是粒子的运动速度, c 是光速. $h = 1, -1, 0$ 分别为 x 方向的聚焦透镜、散焦透镜和两方向共同的漂移节. 对于偏转磁铁有

$$Q_x = \frac{1-n}{\rho^2}, \quad Q_y = \frac{n}{\rho^2}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{eB}{m_0c^2\gamma_p\beta_p}. \quad (2.2)$$

这里 B 是中心轨道上的磁场强度, n 是磁场梯度指数.

对于无加速的束流传输系统, γ_p 和 β_p 为常数, 故 $Q_u(x)$ 是分段为常数的阶梯函数. 在此情况下可以把各传输元件按照 Q_u 的常数值归并为三类标准节: $Q_u > 0$ 统称为聚焦节; $Q_u < 0$ 为散焦节; $Q_u = 0$ 为漂移节. 在 Q_u 为常数的各节中, 非线性方程 (1.1) 就成为可以精确求解的方程. 为书写方便, 以下省去下标 u , 所导公式对 x, y 方向都适用.

在 Q 为常数的各节中, 方程 (1.1) 可以降阶为

$$\frac{1}{2} \beta' = \pm \sqrt{-Q\beta^2 + W\beta - 1}. \quad (2.3)$$

式中 W 在各节中为不同的常数, 完全由本节的初始条件和 Q 值确定

$$W = Q\beta_0 + \gamma_0 \quad (2.4)$$

方程 (2.3) 是可以积分的. 当 $\beta' > 0$ 时右端取正号, $\beta' < 0$ 时取负号; 当 $\beta' = 0$ 时, 亦即, 当束流包络达到极值时, 得到 β 的极值方程为

$$-Q\beta_{\min}^2 + W\beta_{\min} - 1 = 0 \quad (2.5)$$

将方程 (1.1) 和 (2.5) 结合起来分析, 就可得到, 对于聚焦节 (当 $Q > 0$), 假如包络函数有极值的话, 可能是极大值, 也可能是极小值, 它们分别为

$$\beta_{\max} = \frac{W + \sqrt{W^2 - 4Q}}{2Q} \quad (2.6)$$

及

$$\beta_{\min} = \frac{W - \sqrt{W^2 - 4Q}}{2Q}. \quad (2.7)$$

对散焦节 ($Q < 0$), 假如包络函数有极值的话, 只可能是极小值, 它的表示式为

$$\beta_{\min} = \frac{\sqrt{W^2 - 4Q} - W}{-2Q}. \quad (2.8)$$

对于漂移节, 假如包络函数有极值的话, 也只可能是极小值

$$\beta_{\min} = \frac{1}{\gamma_0}. \quad (2.9)$$

求解方程 (2.3), 注意在 β 的极值前方程的右端改变符号, 并注意运用极值的表示式 (2.6)–(2.9) 就可以得到 β 函数的如下分析表达式:

1. 对于聚焦节 ($Q > 0$)

$$\beta = \frac{W}{2Q} + \frac{\sqrt{W^2 - 4Q}}{2Q} \sin \left[2\sqrt{Q}(Z - Z_0) + \sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \right], \quad \text{当 } \alpha_0 > 0 \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{W}{2Q} + \frac{\sqrt{W^2 - 4Q}}{2Q} \sin \left[\sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) - 2\sqrt{Q}(Z - Z_0) \right]; \quad \text{当 } \alpha_0 \leq 0 \quad (2.11)$$

2. 对散焦节 ($Q < 0$)

$$\beta = \frac{[Be^{2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)} - W]^2 - 4Q}{-4QB e^{2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)}}, \quad \text{当 } \alpha_0 \geq 0 \quad (2.12)$$

其中

$$B = \frac{1}{\beta_0} [1 + (|\alpha_0| + \sqrt{-Q}\beta_0)^2], \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{[Be^{-2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)} - W]^2 - 4Q}{-4QB e^{-2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)}},$$

$$\text{当 } \alpha_0 < 0 \text{ 及 } (Z - Z_0) \leq \frac{1}{2\sqrt{-Q}} \ln \left(\frac{B}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \quad (2.14)$$

$$\beta = \frac{[De^{2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)} - W]^2 - 4Q}{-4QD e^{2\sqrt{-Q}(Z-Z_0)}},$$

$$\text{当 } \alpha_0 < 0 \text{ 及 } (Z - Z_0) \geq \frac{1}{2\sqrt{-Q}} \ln \left(\frac{B}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \quad (2.15)$$

其中

$$D = \frac{W^2 - 4Q}{B}. \quad (2.16)$$

3. 对漂移节 ($Q = 0$)

$$\beta = \frac{1}{\gamma_0} \{1 + [\alpha_0 + \gamma_0(Z - Z_0)]^2\}, \quad \text{当 } \alpha_0 \geq 0 \quad (2.17)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma_0} \{1 + [|\alpha_0| - \gamma_0(Z - Z_0)]^2\}, \quad \text{当 } \alpha_0 < 0 \quad (2.18)$$

将上面 β 的各表示式对 Z 求一次导数, 就可以得到 α 的显函数表达式。但也可以用

比较简单的隐函数表达式计算 α , 由 (1.2) 和 (2.3) 即可得到 α 的隐函数表达式

$$\alpha = \pm \sqrt{-Q\beta^2 + W\beta - 1}. \quad (2.19)$$

在计算出各点的 β 值后, 代入 (2.19) 式并注意正确地取正负号, 就可以得到 α 值. 于是求解问题就全部得到解决.

三、 β 极值存在的条件及其精确位置

由上面 β 函数的各分析表达式, 可以得到 β 极值在各节中存在的确切判别条件和极值位置的精确计算公式.

1. 对于聚焦节 ($Q > 0$), β 函数的第 N 个极大值的位置为

$$(Z - Z_0)_{N\max} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{Q}} \left[\left(2N - \frac{3}{2}\right) \pi - \sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \right], & \text{当 } \alpha_0 > 0. \\ \frac{1}{2\sqrt{Q}} \left[\left(2N - \frac{1}{2}\right) \pi + \sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \right]; & \text{当 } \alpha_0 \leq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

第 N 个极小值的位置为

$$(Z - Z_0)_{N\min} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{Q}} \left[\left(2N - \frac{1}{2}\right) \pi - \sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \right], & \text{当 } \alpha_0 > 0. \\ \frac{1}{2\sqrt{Q}} \left[\left(2N - \frac{3}{2}\right) \pi + \sin^{-1} \left(\frac{2Q\beta_0 - W}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right) \right]; & \text{当 } \alpha_0 \leq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

假如以 L_F 表示聚焦节的长度, 则第 N 个极大值和极小值存在的判别条件为

$$L_F \geq (Z - Z_0)_{N\max} \quad (3.3)$$

和

$$L_F \geq (Z - Z_0)_{N\min} \quad (3.4)$$

这里要说明的是, 一般文献上定性的讨论只提到在聚焦节中可能有极大值. 但是实际上也可能出现极小值, 我们用矩阵计算程序《TR(1)》在电子计算机上也做了计算, 结果证明了本文关于聚焦节中也可能出现包络极小值的结论和计算公式是正确的. 聚焦节中出现包络极小值或多于一个极大值的情况相当于一个方向过聚焦和另一个方向的过散焦.

2. 对散焦节 ($Q < 0$), β 极小值的位置为

$$(Z - Z_0)_{Dm} = \frac{1}{2\sqrt{-Q}} \ln \left(\frac{B}{\sqrt{W^2 - 4Q}} \right). \quad \text{当 } \alpha_0 < 0 \quad (3.5)$$

以 L_D 表示散焦节的长度, 极小值存在的条件是

$$L_D \geq (Z - Z_0)_{Dm}; \quad \alpha_0 < 0 \quad (3.6)$$

3. 对漂移节 ($Q = 0$). β 极小值的位置为

$$(Z - Z_0)_{0m} = \frac{|\alpha_0|}{\gamma_0}, \quad \text{当 } \alpha_0 < 0 \quad (3.7)$$

以 L_0 表示漂移节的长度, 则 β 函数极小值在漂移节中存在的条件为

$$L_0 \geq (Z - Z_0)_{0m}. \quad \alpha_0 < 0 \quad (3.8)$$

四、束流包络的计算举例

我们用上面导出的束流包络公式,计算了一个具体例子,这个例子如图1所示,是一个由两对透镜构成的非周期系统。 q_1q_2 为第一对透镜, q_3q_4 为第二对。透镜的有效长度为16cm,每对透镜中,二透镜的间距为2cm。两对透镜之间的长漂移节为80cm。我们计算了束流在一个方向的包络,假定(i)透镜的极性排列对这个方向是ODOFODOFO,透镜 q_1 和 q_4 的磁场梯度值为543.4高斯/厘米; q_2 和 q_3 的梯度为431.5高斯/厘米。(ii)能量为400keV的氙核束流,非规一化发散度为 $\varepsilon = 100$ 毫米·毫弧度。在 q_1 前面40cm处是一个初始束腰,这里取做 $Z = 0$,束流的包络及其导数在这里为 $a|_{z=0} = 0.5\text{cm}$, $a'|_{z=0} = 0$ 。

在上述条件下,用本文所导出的 β 函数的分析公式对束流在系统中的包络进行了计算。所用的氙核静止能量为 $m_0c^2 = 1877\text{MeV}$,动能为400keV时, $\gamma\beta\beta' = 0.020646$ 。计算所得到的包络 a 如图1中的曲线。在一系列特征点上的 a 值列在表1中。同时,我们也用《TR(1)》程序在电子计算机上对上述例子进行了数值计算。该程序计算束流包络用的是矩阵方法^[1],所得结果以 a_T 表示,也列在表1中。从各相同位置上 a 和 a_T 值的比较可以看出,二者符合得非常好。

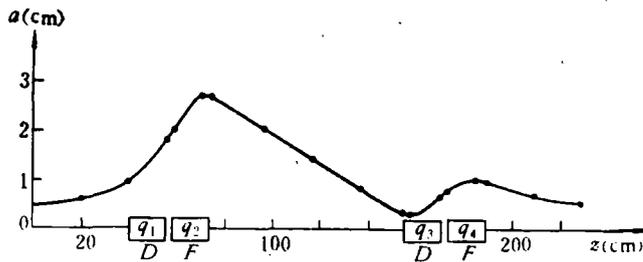


图 1

表 1

$Z(\text{cm})$	0	40	56	58	74	154	170	172	188	228
$a(\text{cm})$	0.50	0.94	1.83	2.04	2.66	0.33	0.64	0.72	0.95	0.50
$a_T(\text{cm})$	0.50	0.94	1.83	2.04	2.66	0.33	0.64	0.72	0.95	0.50

参 考 文 献

- [1] 魏开煜、陈伯飞、梁岫如、王林林,束流输运系统计算程序《TR(1)》汇编,中国科学院高能物理研究所内部报告(1979)。

THE BEAM ENVELOP ANALYSIS FOR NON-PERIODIC SYSTEMS

WEI KAI-YU

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The beam envelopes for non-periodic alternating gradient focusing system is analysed. The accurate analytic expressions of the beam envelop function β is obtained by solving the following non-linear differential equation:

$$(\sqrt{\beta})'' + Q(z)\sqrt{\beta} - \frac{1}{(\sqrt{\beta})^3} = 0,$$

The conditions of existing the maximum and the minimum of beam envelop are discussed. And we have derived the accurate formulae with which one can calculate the maximum and the minimum values of envelop and their position. The method developed in this paper is different from the conventional matrix computational method. Both methods can be checked by each other.