温度不为零的自洽场方程
——HFB 方程的推广

王 顺 金
（兰 州 大 学）

摘　　要

为了研究壳效应以及对效应随核温度的变化，我们借助于变分原理扩展了 Sano 和 Yamasaki 的工作，把 HFB 方程推广到核温度不为零的情况．当核温度 $\theta \to 0$ 时，推广的 HFB 方程过渡到通常的 HFB 方程．而在高温极限下，得出费米气体模型的结果．

在核结构理论中，对于相互作用的处理，一般采用自洽场表象．这种表象对于基态附近的若干核态是好的近似，但是对于较高激发态并不是最佳的表象．在核反应统计理论中，不仅需要知道原子核的基态，而且涉及原子核的激发态．因此，对于核反应统计理论，存在一个选择最佳表象的问题．另一方面，实验上早就发现了壳效应和对效应随激发能增加而趋于消失的证据[1]．通常的自洽场理论虽能较好地说明壳效应和对效应，却不能描述这些效应随激发能的变化关系．这也要求推广通常的自洽场表象，使之反映激发能效应．温度不为零的自洽场方程[2]或许能满足这方面的需要．

一、温度不为零的自洽场方程

为了建立温度不为零的自洽场方程，需要把推导零温度的自洽场方程的方法加以推广．零温度的自洽场方程的推导有多种途径，最常见的途径是基态能量的变分原理．设 $\Phi_0 = |\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_A\rangle$ 是独立粒子系统的基态波函数，由基态能量的条件极值

$$\delta\langle\Phi_0|H|\Phi_0\rangle = 0,\ \langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1, \tag{1}$$

可得通常的自洽场方程．

另一途径是引进含参数的平均势场，用基态能量变分原理去确定势场参数．其步骤是：

(i) 把 H 分解为两部分

$$H = H_0(x) + H_1(x), \tag{2}$$

$H_0(x)$ 表示独立粒子系统的哈密顿量，x 是表征平均自洽场的参数，$H_1(x)$ 是剩余相互作用．

本文 1979 年 10 月 15 日收到．

(ii) 把 $H_0(x)$ 对角化，得独立粒子波函数的本征方程，其中包含参数 x. 设 $|\Phi_0(x)\rangle$ 是 $H_0(x)$ 的基态波函数，则有

$$\begin{cases} H_0(x)|\Phi_0(x)\rangle = E_0(x)|\Phi_0(x)\rangle, \\ \langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1. \end{cases} \tag{3}$$

(iii) 由 $E_0(x)$ 的变分极值条件

$$\delta E_0(x) = \delta\langle\Phi_0|H_0(x)|\Phi_0\rangle = 0, \tag{4}$$

可得确定 x 的方程. 注意到 $\delta H_0 = -\delta H_1 = -\dfrac{\delta H_1(x)}{\delta x}\delta x$，上式可写成

$$\left\langle\Phi_0\left|\frac{\partial H_1(x)}{\partial x}\right|\Phi_0\right\rangle = 0. \tag{5}$$

把 x 的方程与独立粒子波函数的本征方程联立，得自洽场方程. 由于 $\delta E_0(x) = 0$ 与 $\delta\langle\Phi_0|H|\Phi_0\rangle = 0$ 并不等价，此时所得的自洽场方程还不是通常的自洽场方程.

(iv) 适当选取 $H_0(x)$ 和 $H_1(x)$，同时使

$$\langle\Phi_0|H_1(x)|\Phi_0\rangle = 0, \tag{6}$$

这时由于 $\delta\langle\Phi_0|H|\Phi_0\rangle = \delta\langle\Phi_0|H_0|\Phi_0\rangle = 0$，所得的自洽场方程就是通常的自洽场方程.

上述途径的自然推广是：把 $H_1(x)$、$\dfrac{\partial H_1}{\partial x}$ 的基态平均值为零推广为统计热力学平均值为零. 即

(3) 推广(5)式：

$$S_p\left(e^{-H_0/\theta}\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)\Big/S_p(e^{-H_0/\theta}) = 0. \tag{7}$$

以此确定 x.

(4) 适当选取 $H_0(x)$ 与 $H_1(x)$，同时使

$$S_p(e^{-H_0/\theta}H_1(x))/S_p(e^{-H_0/\theta}) = 0, \tag{8}$$

这是(6)式的推广.

(7) 式的意义是自由能的零级近似的变分为零：

$$\delta\Omega_0 = -\theta\delta\ln S_p(e^{-H_0/\theta}) = \frac{S_p\left(e^{-H_0/\theta}\dfrac{\partial H_1}{\partial x}\right)}{S_p(e^{-H_0/\theta})} = 0, \tag{9}$$

(9)式正是(4)式的推广.

(8) 式的意义是：自由能的一级微扰修正为 0. 实际上，按统计热力学微扰论，

$$\Omega = -\theta\ln S_p(e^{-H_0/\theta})$$

$$= -\theta\left\{\ln S_p e^{-H_0/\theta} + \ln\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{1/\theta}dt_1\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_n u_n(t_1\cdots t_n)\right]\right\}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} u_n = S_p(e^{-H_0/\theta}H_1(t_1)\cdots H_1(t_n))/S_p(e^{-H_0/\theta}), \\ H_1(t) = e^{H_0 t}H_1 e^{-H_0 t}, \end{cases} \tag{11}$$

由(8)式，知 $u_1 = 0$. 因此，在一级微扰近似下，上述自洽场表象是最佳表象.

以后，我们将遵循上述途径推广 HF 方程和 HFB 方程.

二、HFB 方程的推广

设在任意表象中，系统的哈密顿量为

$$H = \sum_{ij} t_{ij} a_i^+ a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl} a_i^+ a_j^+ a_l a_k, \tag{12}$$

其中

$$t_{ij} = \langle i|t|j\rangle, G_{ij,kl} = \langle ij|v|kl\rangle - \langle ij|v|lk\rangle. \tag{13}$$

按第一节的方法，把H分解为

$$H = H_0(X, K) + H_1(X, K), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} H_0(X,K) = &\frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}(2X_{il}X_{jk} + K_{ij}^* K_{kl}) \\ &+ \sum_{ij} t_{ij} a_i^+ a_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}[a_i^+ a_l X_{jk} + a_j^+ a_k x_{il}] \\ &- \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}[a_i^+ a_j^+ K_{lk} + a_l a_k K_{ij}^*], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} H_1(X, K) = &-\frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}(a_i^+ a_l + X_{il})(a_j^+ a_k + X_{jk}) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl} a_i^+ a_l a_j^+ a_k - \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}(a_i^+ a_l X_{jk} + a_j^+ a_k X_{il}) \\ &- \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl} X_{il} X_{jk} + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} G_{ij,kl}(a_i^+ a_j^+ + K_{ij}^*)(a_l a_k + K_{lk}). \end{aligned} \tag{16}$$

作正则变换，变到准粒子表象

$$a_i^+ = \sum\nolimits_\alpha (u_{i\alpha}^* b_\alpha^+ + v_{i\alpha}^* b_\alpha), \quad a_i = \sum\nolimits_\alpha (u_{i\alpha} b_\alpha + v_{i\alpha} b_\alpha^+), \tag{17}$$

正则变换要求

$$\{b_\alpha, b_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{b_\alpha^+, b_\beta^+\} = \{b_\alpha, b_\beta\} = 0, \tag{18}$$

从而得出 u, v 满足的条件：

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum\nolimits_i [u_{i\alpha}^* u_{i\beta} + v_{i\alpha}^* v_{i\beta}] = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum\nolimits_\alpha [u_{i\alpha}^* u_{j\alpha} + v_{i\alpha}^* v_{j\alpha}] = \delta_{ij}, \\ &\sum\nolimits_i [u_{i\alpha} v_{i\beta}^* + v_{i\alpha} u_{i\beta}^*] = 0, \quad \sum\nolimits_\alpha [u_{i\alpha} v_{j\alpha} + v_{i\alpha} u_{j\alpha}] = 0, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

逆变换为

$$b_\alpha^+ = \sum_i (u_{i\alpha} a_i^+ + v_{i\alpha}^* a_i), \qquad b_\alpha = \sum_i (u_{i\alpha}^* a_i + v_{i\alpha} a_i^+). \tag{20}$$

在准粒子表象中，粒子数不守恒．为此，要用拉氏乘子法考虑平均粒子数守恒．引进 H_0',

$$H_0' = H_0 - \lambda \hat{n}, \tag{21}$$

$$\hat{n} = \sum_i a_i^+ a_i. \tag{22}$$

要求

$$S_p\{e^{-H_0'/\theta} \hat{n}\}/S_p\{e^{-H_0'/\theta}\} = A, \tag{23}$$

在准粒子表象中，要求 H_0' 对角化，得 u, v 满足的方程组：

$$\sum_{ij}\tilde{t}_{ij}(u_{i\alpha}^* u_{j\beta} - v_{i\beta}^* v_{j\alpha}) + \sum_{ijkl} G_{ij,kl}(u_{i\alpha}^* u_{l\beta} - v_{i\beta}^* v_{l\alpha})X_{jk} - \frac{1}{2}\sum_{ijkl} G_{ij,kl}(K_{lk}u_{i\alpha}^* v_{j\beta}^* + K_{ij}^* v_{l\alpha} u_{k\beta}) = E_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \tag{24}$$

$$\sum_{ij}\tilde{t}_{ij}u_{i\alpha}^* v_{j\beta} + \sum_{ijkl} G_{ij,kl}u_{i\alpha}^* v_{l\beta}X_{jk} - \frac{1}{4}\sum_{ijkl} G_{ij,kl}(K_{lk}u_{i\alpha}^* u_{j\beta}^* + K_{ij}^* v_{l\alpha} v_{k\beta}) = 0, \tag{25a}$$

$$\sum_{ij}\tilde{t}_{ij}v_{i\alpha}^* u_{j\beta} + \sum_{ijkl} G_{ij,kl}v_{i\alpha}^* u_{l\beta}X_{jk} - \frac{1}{4}\sum_{ijkl} G_{ij,kl}(K_{lk}v_{i\alpha}^* v_{j\beta}^* + K_{ij}^* u_{l\alpha} u_{k\beta}) = 0, \tag{25b}$$

其中

$$\tilde{t}_{ij} = t_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \langle i|t - \lambda|j\rangle. \tag{26}$$

在对角表象中，

$$H_0' = 常数 + \sum_\alpha E_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha, \tag{27}$$

此外

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial X_{il}} &= -\sum_{jk} G_{ij,kl}(a_j^+ a_k + X_{jk}) \\ &= -\sum_{jk} G_{ij,kl}\Big\{X_{jk} + \sum_{\alpha\beta}[(u_{j\alpha}^* u_{k\beta} - v_{j\beta}^* v_{k\alpha})b_\alpha^+ b_\beta + v_{j\beta}^* v_{k\alpha}\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad + u_{j\alpha}^* v_{k\beta} b_\alpha^+ b_\beta^+ + v_{j\alpha}^* u_{k\beta} b_\alpha b_\beta]\Big\},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial K_{ij}^*} &= \frac{1}{4}\sum_{kl} G_{ij,kl}(a_l a_k + K_{lk}) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{kl} G_{ij,kl}\Big\{K_{lk} + \sum_{\alpha\beta}[(v_{l\alpha}u_{k\beta} - u_{l\beta}v_{k\alpha})b_\alpha^+ b_\beta + u_{l\beta}v_{k\alpha}\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad + v_{l\alpha}v_{k\beta}b_\alpha^+ b_\beta^+ + u_{l\alpha}u_{k\beta}b_\alpha b_\beta]\Big\},\end{aligned} \tag{29a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial K_{lk}} &= \frac{1}{4}\sum_{ij} G_{ij,kl}(a_i^+ a_j^+ + K_{ij}^*) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{ij} G_{ij,kl}\Big\{K_{ij}^* + \sum_{\alpha\beta}[(u_{i\alpha}^* v_{j\beta}^* - v_{i\beta}^* u_{j\alpha}^*)b_\alpha^+ b_\beta + v_{i\beta}^* u_{j\alpha}^*\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad + u_{i\alpha}^* u_{j\beta}^* b_\alpha^+ b_\beta^+ + v_{i\alpha}^* v_{j\beta}^* b_\alpha b_\beta]\Big\}.\end{aligned} \tag{29b}$$

由统计热力学自洽场条件：

$$S_p\left\{e^{-H_0'/\theta}\frac{\partial H_1}{\partial X_{il}}\right\} = S_p\left\{e^{-H_0'/\theta}\frac{\partial H_1}{\partial K_{ij}^*}\right\} = S_p\left\{e^{-H_0'/\theta}\frac{\partial H_1}{\partial K_{lk}}\right\} = 0, \tag{30}$$

可得

$$\sum_{jk} G_{ij,kl}\left(X_{jk} + \sum_\alpha v_{j\alpha}^* v_{k\alpha}\right) + \sum_{jk\alpha} G_{ij,kl}(u_{j\alpha}^* u_{k\alpha} - v_{j\alpha}^* v_{k\alpha})\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1 + e^{-E_\alpha/\theta}} = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{kl} G_{ij,kl}\left(K_{lk} + \sum_\alpha u_{l\alpha}v_{k\alpha}\right) + 2\sum_{kl\alpha} G_{ij,kl}v_{l\alpha}u_{k\alpha}\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1 + e^{-E_\alpha/\theta}} = 0, \tag{32a}$$

$$\sum_{ij} G_{ij,kl}\left(K_{ij}^{*}+\sum_{\alpha} v_{i\alpha}^{*}u_{j\alpha}^{*}\right)+2\sum_{ij\alpha} G_{ij,kl}u_{i\alpha}^{*}v_{j\alpha}^{*}\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1+e^{-E_\alpha/\theta}}=0, \tag{32b}$$

由(23)式可得

$$\sum_{i\alpha} v_{i\alpha}^{*}v_{i\alpha}+\sum_{i\alpha}(u_{i\alpha}^{*}u_{i\alpha}-v_{i\alpha}^{*}v_{i\alpha})\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1+e^{-E_\alpha/\theta}}=A, \tag{33}$$

将方程组(24)、(25)适当组合，得等价的方程组

$$\sum_{j}\tilde{t}_{ij}u_{j\alpha}+\sum_{jkl}G_{ij,kl}X_{jk}u_{l\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{jkl}G_{ij,kl}K_{lk}v_{j\alpha}^{*}=E_\alpha u_{i\alpha}, \tag{34}$$

$$\sum_{j}\tilde{t}_{ij}v_{j\alpha}+\sum_{jkl}G_{ij,kl}X_{jk}v_{l\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{jkl}G_{ij,kl}K_{lk}u_{j\alpha}^{*}=-E_\alpha v_{i\alpha}. \tag{35}$$

利用(31)、(32)式消去(34)、(35)两式中的 X, K, 得

$$\sum_{j}(\Gamma_{ij}u_{j\alpha}+\Delta_{ij}v_{j\alpha}^{*})=E_\alpha u_{i\alpha}, \tag{36}$$

$$\sum_{j}(\Delta_{ij}u_{j\alpha}^{*}+\Gamma_{ij}v_{j\alpha})=-E_\alpha v_{i\alpha}. \tag{37}$$

(37)式的复共轭为

$$\sum_{j}(\Delta_{ij}^{*}u_{j\alpha}+\Gamma_{ij}^{*}v_{j\alpha}^{*})=-E_\alpha v_{i\alpha}^{*}, \tag{38}$$

其中

$$\Gamma_{ij}=\tilde{t}_{ij}+\sum_{kl\gamma}G_{ik,jl}\left[v_{k\gamma}^{*}v_{l\gamma}+(u_{k\gamma}^{*}u_{l\gamma}-v_{k\gamma}^{*}v_{l\gamma})\frac{e^{-E_\gamma/\theta}}{1+e^{-E_\gamma/\theta}}\right], \tag{39}$$

$$\Delta_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{kl\gamma}G_{ij,kl}\left[v_{k\gamma}u_{l\gamma}+2v_{l\gamma}u_{k\gamma}\frac{e^{-E_\gamma/\theta}}{1+e^{-E_\gamma/\theta}}\right]. \tag{40}$$

易证

$$\Gamma_{ij}^{*}=\Gamma_{ij},\quad \Delta_{ij}=-\Delta_{ji}, \tag{41}$$

(33)、(36)、(38)、(39)、(40)诸式就是推广的 HFB 方程的基本方程组．直接计算可知 $S_p(e^{-H_0'/\theta}H_1)=0$，即条件(8)满足．

推广的 HFB 方程是较普遍的统计热力学自洽场方程，对它取不同的极限，就可以过渡到 HFB 方程，推广的 HF 方程以及 Sano-Yamasaki 的 BCS 方程[2]．下面分别讨论几种情况下的极限过渡．

1. 向 HFB 方程的过渡

既然推广的 HFB 方程是 HFB 方程在温度不为零的区域的扩展，HFB 方程自然是推广的 HFB 方程的低温极限．注意到 $E_\alpha>0$，当 $\theta\to 0$ 时，

$$\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1+e^{-E_\alpha/\theta}}\to 0, \tag{42}$$

(32)、(39)、(40)诸式化为

$$\sum_{i\alpha}v_{i\alpha}^{*}v_{i\alpha}=A, \tag{43}$$

$$\Gamma_{ij}=\tilde{t}_{ij}+\sum_{kl\gamma}G_{ik,jl}v_{k\gamma}^{*}v_{l\gamma}, \tag{44}$$

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{kl\gamma} G_{ij,kl} v_{k\gamma} u_{l\gamma}, \tag{45}$$

(43)、(44)、(45)连同(36)、(38)诸式正是通常的 HFB 方程.

2. 向温度不为零的 HF 方程的过渡

因 HF 自洽场表象限于粒子表象，故要向温度不为零的 HF 方程过渡，只需要把正则变换(6)限于粒子之间的变换即可. 为此，令

$$K_{jk} = K_{jk}^* = 0, \tag{46}$$

$$v_{i\alpha} = 0, \quad u_{i\alpha} \neq 0, \tag{47}$$

这时，$\Delta_{ij} = 0$，(33)、(36)、(38)诸式退化为

$$\sum_{i\alpha} u_{i\alpha}^* u_{i\alpha} \frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1 + e^{-E_\alpha/\theta}} = A, \tag{48}$$

$$\sum_j \left[(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}) + \sum_{kl\gamma} G_{ik,jl} u_{k\gamma}^* u_{l\gamma} \frac{e^{-E_\gamma/\theta}}{1 + e^{-E_\gamma/\theta}} \right] u_{j\alpha} = E_\alpha u_{i\alpha}, \tag{49}$$

这正是温度不为零的 HF 方程. 如令 $E_\alpha = \mathscr{E}_\alpha - \lambda$，则上两式与 HF 方程的关系更为明确. 在低温极限下，(48)、(49)过渡到通常的 HF 方程.

3. 向 Sana-Yamasaki 方程[2]的过渡

Sana-Yamasaki 只讨论对力情况，所用的哈密顿量为：

$$H = \sum_k \varepsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\tilde{k}}^+ a_{\tilde{k}}) - \sum_{kk'} G_{kk'} a_k^+ a_{\tilde{k}}^+ a_{\tilde{k}'} a_{k'}$$

此处对 k 求和不包括时间反演态 $\tilde{k}$，而 $G_{kk'}$ 不包含反对称项. 他们用的正则变换为

$$a_k = u_k b_k - v_k b_{\tilde{k}}^+,$$

$$a_{\tilde{k}}^+ = u_k b_{\tilde{k}} + v_k b_k^+,$$

其中 u_k, v_k 为实数. 把我们的哈密顿量和正则变换与他们的比较，并注意本文的求和包括时间反演态，而 $G_{ij,kl}$ 包含反对称项，则可得下述对应规则

$$t_{ij} \to \varepsilon_{ij}, \tag{50}$$

$$G_{ij,kl} \to +G_{i\tilde{i},k\tilde{k}} S_i S_k \to -2G_{ik}, \tag{51}$$

$$u_{k\alpha} \to u_{kk} = u_{\tilde{k}\tilde{k}} = u_k, \tag{52}$$

$$v_{k\alpha} \to v_{\tilde{k}k} S_k = -v_{k\tilde{k}} S_k = v_k, \tag{53}$$

$$S_k = (-1)^{j_k - m_k}, \tag{54}$$

$$K_{k\tilde{k}} \to K_k S_k, \quad X_{k\tilde{k}} = 0, \tag{55}$$

对本文的公式实行上述过渡，并采用 ε 的对角表象，由(39)、(40)式可得

$$\Gamma_i = \Gamma_{ii} = \left\{ (E_i - \lambda) - 2G_{ii}\left[v_i v_i + (u_i u_i - v_i v_i)\frac{e^{-E_i/\theta}}{1 + e^{-E_i/\theta}} \right] \right\}$$

$$= (\varepsilon_i - \lambda)^{1)}, \tag{56}$$

$$\Delta_i = \Delta_{ii} = \sum_k S_k G_{ik} v_k u_k \left(1 - 2\frac{e^{-E_k/\theta}}{1 + e^{-E_k/\theta}} \right) = \sum_k G_{ik} K_k. \tag{57}$$

(36)、(38)两式化为

1) (56)式第二项不对 i 求和，由于 v_i^2, u_i^2 很小，比之第一项可略去.

$$(\varepsilon_i-\lambda)u_i+\Delta_i v_i S_i=E_i u_i,\quad \Delta_i u_i-(\varepsilon_i-\lambda)v_i S_i=E_i v_i S_i,\tag{58}$$

由上方程解得

$$E_i^2=(\varepsilon_i-\lambda)^2+\Delta_i^2,\tag{59}$$

$$u_i^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_i-\lambda}{E_i}\right),\quad v_i^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_i-\lambda}{E_i}\right),\quad u_i v_i S_i=\frac{\Delta_i}{2E_i}.\tag{60}$$

运用(60)式,并对(32)式实行过渡,可得

$$\sum_k G_{ik}S_k\left\{K_k-\frac{\Delta_k}{2E_k}\left(1-2\frac{e^{-E_k/\theta}}{1+e^{-E_k/\theta}}\right)\right\}=0,\tag{61}$$

其解为

$$2E_kK_k=\text{fanh}\,\frac{E_k}{2\theta}\cdot\Delta_k,\tag{62}$$

至此得出 Sana-Yamasaki 的全部结果.

4. 高温极限 当 $\theta\to\infty$ 时,不同的 E_α 对 Θ 而言处于同等的地位,因而 $u_{i\alpha}$(或 $v_{i\alpha}$)对不同 α 有相同的数量级. 考虑到这一点,(33)式的唯一解是[1)]

$$v_{i\alpha}=0,\quad u_{i\alpha}\neq 0,\quad \sum_i u_{i\alpha}^*u_{i\alpha}=1,\tag{63}$$

$$\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1+e^{-E_\alpha/\theta}}\to\frac{A}{\Omega}\ (\Omega\ \text{为状态数},\ \Omega\to\infty),\tag{64}$$

这时

$$\Delta_{ij}=0,\tag{65}$$

$$\Gamma_{ij}=\tilde{t}_{ij}+\frac{A}{\Omega}\sum_k G_{ik,jk},\tag{66}$$

这表明对效应消失,相互作用的效果是使动能发生移动.

令

$$\Delta t_{ij}=\frac{A}{\Omega}\sum_k G_{ik,jk};\tag{67}$$

则(36)、(38)式退化为 $\sum_j[(t_{ij}-\lambda\delta_{ij})+\Delta t_{ij}]u_{j\alpha}=E_\alpha u_{i\alpha}.$ (68)

(68)式是 $u_{i\alpha}$ 的线性方程. 因此,在高温极限下,与非线性方程相联系的壳效应趋于消失.

由于核力的短程性质,以及(67)式对状态的平均,使得 Δt_{ij} 随 i、j 变化缓慢而近乎常数. 因此,在高温极限下,相互作用的效果是使核子的能量除动能之外发生了一个近乎常数的移动. 整个原核的能量

$$\begin{aligned}E&=S_p\{e^{-H_0'/\theta}H\}/S_p\{e^{-H_0'/\theta}\}\\&=\sum_\alpha t_{\alpha\alpha}\frac{e^{-(E_\alpha-\lambda)/\theta}}{1+e^{-(E_\alpha-\lambda)/\theta}}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta,\alpha\beta}\frac{e^{-(E_\alpha-\lambda)/\theta}}{1+e^{-(E_\alpha-\lambda)/\theta}}\cdot\frac{e^{-(E_\beta-\lambda)/\theta}}{1+e^{-(E_\beta-\lambda)/\theta}},\end{aligned}\tag{69}$$

1) 首先 (63)、(64) 式是 (33)式的可能解. 其次可证(33)式的其它可能解不存在. 还有两种可能解: 1) $u_{i\alpha}\neq 0$, $v_{i\alpha}\neq 0$ 的解,由于 $\frac{e^{-E_\alpha/\theta}}{1+e^{-E_\alpha/\theta}}\xrightarrow{\theta\to\infty}0$, 因此 (33) 式左边第二项可以略去, 故有 $\sum_{i\alpha}v_{i\alpha}^*v_{i\alpha}=A$, $|v_{i\alpha}|^2\propto\frac{A}{\Omega^2}$, 因 $u_{i\alpha}$ 与 $v_{i\alpha}$ 同量级,故 $|u_{i\alpha}|^2\propto\frac{A}{\Omega^2}$, 这样 uv 不满足(19)式: $\sum_i(|u_{i\alpha}|^2+|v_{i\alpha}|^2)=1$.

2) $u_{i\alpha}=0$, $v_{i\alpha}\neq 0$, 同理可得 $\sum_{i\alpha}|v_{i\alpha}|^2=A$ 这样的 $v_{i\alpha}$ 不满足 $\sum_i|v_{i\alpha}|^2=1$.

$$\lim_{\theta\to\infty} E = A\bar{t} + \frac{1}{2}A^2\frac{1}{\Omega^2}\sum_{i,j=1}^{\Omega} G_{ij,ij}(\Omega\to\infty), \tag{70}$$

其中 $\bar{t} = \frac{1}{\Omega}\sum_{\alpha}^{\Omega} t_{\alpha\alpha}$，正是费米气体的平均动能．因此，在高温极限下原子核的能量相对于费米气体模型发生了一个移动，这正是原子核统计理论所揭示的事实[3]．

三、结　论

我们从核反应实验所揭示的原子核的壳效应和对效应随激发能增加而趋于消失的事实出发，分析了通常的自洽场表象的局限性，认识到推广基态的自洽场表象使之适合于激发态的必要性；在 Sano 和 Yamasaki 的工作的启发下，获得了统计热力学自洽场表象的概念．运用这一概念，推广了 HFB 自洽场方程．本文的讨论表明，统计热力学自洽场表象的概念是一个合理而有用的概念，它是通常的自洽场表象的自然推广，并在自洽场理论与统计热力学的结合之处找到了自己的根据．运用统计热力学自洽场的概念与方法，人们有可能描述壳效应和对效应随激发能的变化关系．而这一点是通常的自洽场理论作不到的．

参　考　文　献

[1] 金炳年、陆中道、陈星蕖、王顺金，高能物理与核物理，**4**(1980)，236.

[2] M. Sano and S. Yamasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **29** (1963), 397.

[3] V. S. Ramamurthy, S. S. Kapoor and S. K. Kataria, *Phys. Rev. Lett.*, **25** (1970), 386.

THE SELF-CONSISTENT FIELD EQUATIONS AT FINITE NUCLEAR TEMPERATURE ——THE GENERALIZED HFB EQUATIONS

WANG SHUN-JIN

(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

In order to study the variation of shell effects as well as pairing effects with nuclear temperature, we have extended the work of Sano and Yamasaki to generalize the HFB equations to finite nuclear temperature with the help of variational principle. When nullear temperature $\theta\to 0$, sulh generalized HFB equations reduce to the conventional HFB equations. While the fermi gas model results can be obtained in the high temperature limit.