第5卷 第1期　　高能物理与核物理　　Vol. 5, No. 1
1981年1月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Jan., 1981

非均匀介质中电磁级联方程的统一解析解[1)]

彭守礼　　　　赵树松
（云南大学）　（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

本文引入复卷积法解析地获得非均匀介质——分布密度为任意连续或有限个间断——中三维电磁级联方程的严格解. 它包含着 A 近似与 B 近似, 均匀与非均匀介质的统一描述,从而扩展了西村纯-镰田的古典结果.

一、引　　言

均匀介质中三维电磁级联理论在六十年代业已成熟[1]. 西村-镰田函数一直是计算电磁簇射分布的基础. 非均匀介质中的级联理论，具体的宇宙线研究都关注它的发展[2]，因为它(例如真实地球大气介质)将使等效级联单位变换下均匀介质级联方程不依赖物质特性的标度遭到破坏. 同时级联涨落所依赖的簇射始点起伏直接与介质密度变化率紧密相关[3],这些都带有相当的重要性而是均匀介质理论所未能描述的. 鉴于非均匀情况，传播方程略为复杂，求解变系数多变量的积分微分方程组，无论在解析解或数值解方面都较烦难,以致进展缓慢. 近年宇宙线研究能区不断提高，前 Monte Carlo 法与后解析法交混(Hybrid) 趋势加强. 解析法处于混合法后半段，簇射贯穿深度进入大气较稠密部分，密度效应成为超高能区不可忽视的图象[4]. 发展非均匀介质中传播的解析理论将是有意义的.

本文与 H. Oda[5] 不同，这里引入复卷积的算子表示法，解析地获得三维电磁级联在任意非均匀介质中的精确解，它适用于介质密度分布是任意的，即数学上是连续或有限个间断，从而推广了西村-镰田的经典结果. 由于介质是任意的，我们的结果便于自动返回均匀介质即 $\phi(t)=1$，从而易于作对比分析与修正.

运用这个解析解我们将在后文[6]讨论一些非均匀介质中所出现的一些有意义的物理问题：超高能下的横向分布，近水平簇射的非几何修正，传播介质跳变等. 三维解析结果有助于对簇射传播的整体行为的了解，并与 M. C 法起相辅相成的作用.

本文附录给出了适合于一大类非均匀介质中的宇宙线级联传播方程的解. 当积分微分方程中的积分核在函数变换下可分离变量，而微分算子阶数不大于二都可适用. 显然，标度的 π-N 级联方程是属于本法可解之列. 在电磁级联理论中采用本文的方法已找到在 Molière 近似下的级联方程的解析解[7].

本文 1979 年 11 月 27 日收到.

1) 贾桂斌同志曾参加过本文第四节的计算工作.

二、基本方程式

当一个初能为 E_0 的粒子(电子或光子)垂直射入非均匀介质. 在深度 t_0 展开级联,若在任意深度 t 处离簇射中心轴的空间点 $\boldsymbol{r}$ 上,散射角在 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}+d\boldsymbol{\theta})$ 内,能量在 $(E, E+dE)$ 间隔内的电子,光子数分别为 $\boldsymbol{\pi}(E_0, E, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, t)d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\theta}dE$, $\boldsymbol{\gamma}(E_0, E, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, t)d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\theta}dE$. 设传播介质是非均匀的,即介质密度的变化率与等效级联单位深度 t 的关系由任意模型函数 $\psi(t)$ 描述. 在最一般的 Landau 近似下,三维电磁级联基本方程式,当纳入介质非均匀模型函数后扩充为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\psi(t)}\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{\pi}=-\boldsymbol{A}'\pi+\boldsymbol{B}'\gamma+\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial E}+\frac{E_s^2}{4E^2}\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_1^2}+\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_2^2}\right), \tag{2.1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\psi(t)}\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{C}'\pi-\sigma_0\gamma. \tag{2.2}$$

式中符号及其意义与文[1,8]同. 为方便略予说明: A', B', C' 为电磁级联过程的积分算子,其中全都采用原子电子壳层势对核电荷完全屏敝条件下的 B-H 截面. A', B' 分别表韧致辐射,正负电子对产生对电子数的贡献; C', $\sigma_0=0.7733$ 分别表韧致辐射,正负电子对产生对光子数的贡献. ε 是介质的游离能常数,则 $\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial E}$ 项是游离能损所致使的电子数在能区上的变化. $\frac{E_s^2}{4E^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right)$ 项则表示在 Mott 截面基础上 Fokker-Planck 近似下的多次库仑散射效应,而电子散射能量常数 $E_s=21\text{MeV}$. 显然上述扩散型的积微分方程组对三维电磁级联过程作了基本的描述. 当入射初始条件如前所述为一个粒子时,即 $t=0$, 电子始发簇射为 $\boldsymbol{\pi}(E_0, E, 0)=\delta(E-E_0)$; $\boldsymbol{\gamma}(E_0, E, 0)=0$, 光子始发簇射为 $\boldsymbol{\pi}(E_0, E, 0)=0$; $\boldsymbol{\gamma}(E_0, E, 0)=\delta(E-E_0)$. 本文将在这个初始条件下寻找方程组的严格解析解. 注意,方程组中当介质模型函数 $\psi(t)=h_0^{-1}(t+t_0)^{k}$ 时为真实的地球多元大气. 当 $\psi(t)=1$ 时,为均匀介质. 显见,簇射始点 t_0 在均匀介质中不便于研究.

处理非均匀介质方程(2.2)时,西村纯的经典方法当扩充为更一般的变换

$$\xi=\frac{\zeta}{x}+\rho(x),\quad \rho(x)=\int_0^t\psi^{-1}(\tau)d\tau;\quad t'=t. \tag{2.3}$$

变数 ξ 通过 $\rho(x)$ 反映介质密度的非均匀状况. 变换所得电子,光子始发的电子级联函数的傅立叶象 $M, N(p, q, s, \xi, t)$ 满足相同的方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_1(s+2p+q)\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_2(s+2p+q)\right]M(p, q, s, \xi, t)$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_0\right]\{p[\xi-\rho(t)]^2M(p-1, q, s, \xi, t)+q(s+2p+q)M(p, q, s, \xi, t)\}, \tag{2.4}$$

此时电磁积分算子的性质,由各种函数变换(傅氏,梅林)[1,8]已完全包含于年龄级联函数 λ_1, λ_2 之中. M, N 初刻条件不同: 对电子始发的电子级联函数为

$$M(0, 0, s, 0, t)=H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}, \tag{2.5}$$

对光子始发的电子级联函数为

$$N(0, 0, s, 0, t) = B(s)[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]^{-1}[e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}]. \tag{2.6}$$

求解方程 (2.4) (2.5—6) 是推算各种级联物理量、如纵、横向分布、迹长、能流等的基础.

三、解的结构

为统一处理差分微分方程(2.4—6)，现引入复卷积变换来结构解. 对深度 t 作拉氏变换 $\widetilde{M} = \int_0^\infty M e^{-\mu t} dt (Re\mu > 0)$，则自动计人初刻条件. 若对两个象函数定义复卷积：在复平面 μ 上当 $Re\mu = Re\mu' + Re\mu'' > 0$ 时有，

$$\tilde{\varphi}(\xi, \mu) * \widetilde{M}(p, q, s, \xi, \mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \tilde{\varphi}(\xi, \sigma)\widetilde{M}(p, q, s, \xi, \mu - \sigma)d\sigma,$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, \mu') = \int_0^\infty e^{-\mu' t}[\xi - \rho(t)]^2 dt. \tag{3.1}$$

c 是拉氏复反演围道，平行虚轴，大于 $\tilde{\varphi}$ 的收敛横标 $Re\mu_0'$. 则有

$$\begin{aligned}&[\mu - \lambda_1(s + 2p + q)][\mu - \lambda_2(s + 2p + q)]\widetilde{M}(p, q, s, \xi, \mu)\\ &= (\mu + \sigma_0)[p\tilde{\varphi}(\xi, \mu) * \widetilde{M}(p - 1, q, s, \xi, \mu) + q(s + 2p + q)\widetilde{M}(p, q\\ &\quad - 1, s, \xi, \mu)] + M_{in},\end{aligned} \tag{3.2}$$

in 表示初刻条件. 由一阶非线性系数的偏差分方程论知，上式的解可构造为两个常差分方程解之积. 当 p, q 相应为正整数 m, n 时令

$$\widetilde{M}(m, n, s, \xi, \mu) = \frac{\Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(m + 1)\Gamma(n + 1)}\widetilde{M}_1(m, n, \xi, \mu)\widetilde{M}_2(m, n, \xi, \mu), \tag{3.3}$$

则将(3.2)式分离为二常差分方程，其一

$$\begin{aligned}&\widetilde{M}_2(m, 0, s, \xi, \mu)\\ &= \frac{m(\mu + \sigma_0)}{[\mu - \lambda_1(s + 2m)][\mu - \lambda_2(s + 2m)]}\tilde{\varphi}(\xi, \mu) * \widetilde{M}_2(m - 1, 0, s, \xi, \mu)\\ &\quad + f(0, s, \mu)\delta_{0m},\end{aligned} \tag{3.4}$$

δ_{0m} 是克隆尼克符号，由初刻条件引起的. 分离所得的 $\widetilde{M}_2$ 与 $\tilde{\varphi}$ 密度项紧紧相关. 这正是描写 A 近似下三维级联的横向结构. 不过以复杂的复卷积形式表现出来. 由附录 A 得解为

$$M_2(m, 0, s, \xi, t) = \Gamma(m + 1)\sum_{i=1,2,}\sum_{l=0}^{m}\mathfrak{M}_{2,l}^{i}(m, s, \xi, t)e^{\lambda_l^i t},$$

$$\mathfrak{M}_{2,l}^{i}(m, s, \xi, t) = H^i(s + 2l)Q_l^i(m, s, \xi, t)P_l^i(m, s, \xi, t), \tag{3.5}$$

特殊函数 P_l^i, Q_l^i 依赖介质的非均匀结构.

其二:

$$\widetilde{M}_1(0, n, s, 0, \mu) = \frac{(\mu + \sigma_0)n(s + n)}{[\mu - \lambda_1(s + n)][\mu - \lambda_2(s + n)]}\widetilde{M}_1(0, n - 1, s, 0, \mu), \tag{3.6}$$

以同一初刻条件 M_{in} 的差分解为

$$\begin{aligned}&M_1(0, n, s, 0, \mu)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1,2}\frac{\Gamma(s + n + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(s + 1)\Gamma(n - j + 1)}H^i(s + j)K_{ij}(s + n)F_{ij}(s)e^{\lambda_j^i t},\end{aligned} \tag{3.7}$$

H^i, K_{ij}, F_{ij} 是级联理论中熟知的特殊函数[1]. 显见 (3.6) 恰描写在 B 近似下的纵向级联发展. 返回做逆得 B 近似下的一般解为实卷积型

$$M(m, n, s, \xi, t) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} \int_0^t M_1(n, m, s, 0, \tau) M_2(n, m, s, \xi, t-\tau) d\tau \qquad (3.8)$$

至此解析地获得三维电磁级联方程 (2.4) 的统一严格解: 包括非均匀大气中三维电磁级联在 A 近似下的解为 (3.5) 式, B 近似下的解为(3.8)式, 以往仅得到均匀大气中三维 A 近似下的全部解和 B 近似下的部份解. 解 (3.14) 式的结构说明, 三维电磁级联发展中无论介质均匀或非均匀, 其 A 近似的横向结构与 B 近似的纵向结构是相互影响的. 当其拉氏象 M 分离变量 (3.3) 表明, 最后在纵横合成三维整体的 B 近似解时, 须沿介质深度作实卷积运算, 其物理图象是不考虑. 游离能损的高能 A 近似下横向传播的早 (晚) 期将与考虑了游离能损的 B 近似纵向发展的晚(早)期互相合成, 这是游离能损对 A 近似影响必然的"平均"结果.

四、例: 真实地球大气

为了精确研究级联行为, 必须要考虑大气随深度递变的非均匀状况. 对真实地球大气, 多元大气模型是静态中较好者, 其密度随深度的变化规律, 在深度采用等效级联单位后, 可概括为

$$\phi(t) = \frac{\rho_0}{k}\left(\frac{k\gamma_0}{\rho_0 T_0}\frac{K}{K-1}\right)^{\frac{1}{K}}(t+t_0)^{\frac{1}{K}}, \qquad (4.1)$$

式中 $K = 1$、1.234、1.4、∞, 分别代表等温、标准、绝热和均匀大气. k, γ_0 为空气的辐射长度与温度直减率¹⁾; T_0, ρ_0 为海平面观测点气温与密度. 多元大气模型的优点, 是真实并便于对比分析. 引入多元标高常数 $h_0 = \frac{k}{\rho_0}\left(\frac{k\gamma_0}{\rho_0 T_0}\frac{K}{K-1}\right)^{-\frac{1}{K}}$, 作为横向宗量 $\boldsymbol{r}$ 的归一化单位, 则使 (2.1) 式中的 $\phi(t)$ 简化为 $(t+t_0)^{\frac{1}{K}}$ 而与 h_0 无关.

现计算横向结构函数, 依照西村的定义对电子, 光子始发的级联函数分别有极限

$$\lim_{\xi\to\rho(t)} M(p, q, s, \xi, t) = \mathfrak{M}(p, q, s, t), \quad \lim_{\xi\to\rho(t)} N(p, q, s, \xi, t) = \mathfrak{N}(p, q, s, t). \qquad (4.2)$$

对多元大气模型,

$$\lim_{\xi\to\rho(t)} \varphi(\xi, \alpha) = \varphi(t, \alpha) = \begin{cases} [t + t_0 - \alpha]^2, & \text{均匀} \\ b^{-2}[(t+t_0)^b - \alpha^b]^2, & \text{标准} \\ \ln^2\left[1 - \dfrac{t-\alpha}{t+t_0}\right], & \text{等温} \end{cases} \qquad (4.3)$$

式中 $b = \frac{K-1}{K}$, 现考查大气结构函数 P, Q 的渐近行为, 按习惯作法[9], 因依赖簇射年龄的系数数列 λ 有: $\lambda_i^1 \gg \lambda_i^2$ 以及 $\lambda_1' > \lambda_2' > \cdots > \lambda_m'$, 且当 $m\to\infty$ 时严格收敛于常数, 故在渐近行为中, 使 $\Lambda_K^{K_i} \to 0$ 仅在 P, Q 函数中分别保留 Λ_0^1, Λ_i^1 项的领头近似是成立

1) 等温大气的 $\gamma_0 = 0$

的，由链积分公式(附录 B) 计算得

$$
\begin{aligned}
P_l^1(m,s,t) &= \left(\prod_{K=0}^{l-1} H_K^1\right)\frac{1}{l!}\left[\frac{(t+t_0)^{2b+1}}{b^2}\right]^l \\
&\times \sum_{r=0}^{l}\sum_{s=0}^{r}\binom{l}{r}\binom{r}{s}\left(\frac{1}{2b+1}\right)^{l-r}\left(\frac{-2}{b+1}\right)^{r-s}\left(\frac{1}{\Lambda_0^1(t+t_0)}\right)^{L_P}\Gamma(L_P+1)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_l^1(m,s,t) &= \left(\prod_{K=l+1}^{m} H_K^1\right)\frac{1}{l!}\left[\frac{(t+t_0)^{2b+1}}{b^2}\right]^l \\
&\times \sum_{r=0}^{l}\sum_{s=0}^{r}\sum_{i=0}^{n-r}\sum_{j=0}^{r-s}\binom{l}{r}\binom{r}{s}\binom{l-r}{i}\binom{r-s}{j}\Lambda_l' e^{-\Lambda_l' t} \\
&\times B(s,L_Q)\,{}_1F_1(L_Q,L_Q+s+1,\Lambda_l^1(t+t_0)).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$L_P=(2b+1)l-b(r+s),\quad L_Q=(2b+1)i+(b+1)j$$

式中 Γ, B_1, F_1 分别为伽玛，贝塔以及退化超几何函数．一般地较精密地计算中年龄参数 s 值不超过5，即 $m<5$，故上述公式有一定实用价值．

因 $\left(\prod\limits_K H_K^{iK}\right)$ 因子是缓变函数，其贡献在讨论渐近行为时可暂略去．注意均匀大气 $(b=1)$ 与非均匀大气的极端情况 $(b=0)$ 之比，由于 $\left(\frac{1}{b}\right)^{2l}$ 因子的贡献是重要的，所以对非均匀介质的修正必须予以正视．

综上所述，可以判断 (A12—13) 式的精确表达式将是不完全伽玛函数与退化超几何函数的复杂组合，在具体研究时可通过快速傅立叶变换与数字梅林逆变换的配合[10]给 (3.5、3.7) 式以精确计算从而获得级联方程(2.2) 的数值解并圆满的应用于宇宙线的实际研究工作．

通过研究可以知道非均匀介质所引起的一些修正或效应是很有意义的，它将使超高能的横向分布有所变宽，引起簇射空间形状变化，西村-镰田函数中须引入有效辐射长度修正，高山近水平簇射的非均匀修正以及空气中始发再进入海水或乳胶迭或室等不同介质的跳变修正等，我们将运用本文的结果在另文[6]中予以详细讨论．

作者对杨桂宫教授的热情支持以及丁林恺，袁余奎、贾桂斌等同志的有益讨论在此一并表示谢意．

附录 A：一类复卷积型差分方程的解

在宇宙线级联传播方程中有一大类积分微分方程；包括电磁级联，π-N 级联在内．当积分核在能量比梅林变换下可分离变量时，物理上称满足这种条件的过程为标度的，则在一系列函数变换下，将导致如下类型的复卷积差分方程

$$\tilde{M}_z(m,\mu)=mf(m,\mu)\varphi(\mu)*\tilde{M}_z(m-1,\mu). \tag{A.1}$$

复卷积 $*$ 定义在复 μ 域上，(A.1) 已按 (3.4) 省去宗量 ξ, s．在下面求解前，为简洁起见，先陈述三个引理并不强调严格证明．

引理 1　假定 $\tilde{f}(t)\in c^\infty$，复卷积 (A.1) 存在且函数 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 点邻域内解析，则复卷积对定义在 c^∞ 上的算子 $\varphi(D)\left(D\equiv-\frac{\partial}{\partial\mu}\right)$ 有微分表示

$$\tilde{\varphi}(\mu)*\tilde{f}(\mu)=\varphi(D)\tilde{f}(\mu). \tag{A.2}$$

证：在 $t=0$ 点的解析性有 Taylor 展开且由 Abel 第一定理下为一致收敛

$$\varphi(t)=\sum_n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n. \tag{A.3}$$

复卷积存在可导致 $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\mu t}dt<\infty$ 的条件则下逐项积分保证，于是有

$$\tilde{\varphi}(\mu)*\tilde{f}(\mu)=\int_0^\infty \varphi(t)f(t)e^{-\mu t}dt=\sum_n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\int_0^\infty t^n f(t)e^{-\mu t}dt=\varphi(D)\tilde{f}(\mu),$$

显见 $\varphi(D)$ 在 (A.3) 形式上展开.

引理 2 广义勾西-Goursat 公式. 假定 $W(\mu)\in c^\infty$，且在 $\mu=\lambda$ 点无奇性则有狭义勾西-Goursat 公式的推广.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c W(\mu)e^{\mu t}\Phi(D)[\mu-\lambda]^{-1}d\mu=e^{\mu t}\Phi(t-D)W(\mu)|_{\mu=\lambda}, \tag{A.4}$$

证：按 (A.3) 意义展开 $\Phi(D)$，由勾西定理得

$$\begin{aligned}左端&=\frac{1}{2\pi i}\sum_n \Phi^{(n)}(0)\oint_c W(\mu)e^{\mu t}(\mu-\lambda)^{-n-1}d\mu\\ &=\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}(-D)^n[W(\mu)e^{\mu t}]|_{\mu=\lambda}=e^{\mu t}\Phi(t-D)W(\mu)|_{\mu=\lambda}.\end{aligned}$$

引理 3 算子连乘分解定理，在复域 μ 上给算子以编号 i 记为 $D_i\equiv-\frac{\partial}{\partial\mu_i}$，规定 D_i 仅作用在 $f(i,\mu_i)$ 上，则当 $i\neq j$ 时对易性 $D_jf(i,\mu_i)=f(i,\mu_i)D_j$ 成立，于是下列算子连乘分解定理正确

$$\begin{aligned}&f(m,\mu)\varphi(D)\{f(m-1,\mu)\varphi(D)\{\cdots\{f(1,\mu)\varphi(D)f(0,\mu)\}\cdots\}\}\\ &=\varphi(D_0+D_1+\cdots+D_m)\varphi(D_0+\cdots+D_{m-1})\cdots\varphi(D_0)\prod_{j=0}^m f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_m=\mu},\end{aligned} \tag{A.5}$$

展开 $\varphi(D)$ 算子，逐项地由归纳法可证.

现求解差分方程 (A.1) 式，递推有解后运用引理 1、3 得

$$\begin{aligned}\tilde{M}_2(m,\mu)&=\Gamma(m+1)f(m,\mu)\prod_{j=0}^{*m-1}\tilde{\varphi}(\mu)*f(j,\mu)\\ &=\Gamma(m+1)f(m,\mu)\prod_{j=0}^{m-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)\prod_{j=0}^{m-1}f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\cdots=\mu_m=\mu}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

求逆 $M_2=\frac{1}{2\pi i}\int_c \tilde{M}_2e^{\mu t}d\mu$，注意其中函数

$$f(l,\mu)=\frac{H_l^1}{\mu-\lambda_l^1}+\frac{H_l^2}{\mu-\lambda_l^2},\quad H_l^i=H_i(s+2l),\quad \lambda_l^i=\lambda_i(s+2l) \tag{A.7}$$

有极点 $\lambda_l^i(i=1,2;\ l=0,1,\cdots,m)$ 共 $2(m+1)$ 个. 取其中有确定 l 的一个极点 λ_l^i 之一计算留数对 $(i=1)$ 有

$$\Gamma(m+1)\int_c d\mu f(m,\mu)e^{\mu t}\left[\prod_{j=0}^{m-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{m-1}f(j,\mu_j)\right]\frac{H_l'}{\mu-\lambda_l^1}\Bigg|_{\mu_0=\mu_1\cdots=\mu}. \tag{A.8}$$

运用引理 2 令 $\prod_{j=l}^{m-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)=\Phi(D_l)$，须对 (A.8) 式中每个 $j\geq l$ 的求和项中的 D_l 作代换 $D_l\to t-D$ 得

$$\Gamma(m+1)H_l'e^{\lambda_l't}\prod_{j=l}^{m-1}\varphi\left(t-D+\sum_{\substack{K=0\\ K\neq l}}^{j}D_K\right)\prod_{j=l+1}^{m}f(j,\mu_j)\prod_{j=0}^{l-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)\prod_{j=0}^{l-1}f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\mu_1\cdots=\mu\ \ \mu=\lambda_l'}.$$

因算子 D 将作用在全部 $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{m}f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\mu_1\cdots=\mu}$ 的函数上再用引理 3 应有代换 $D\to\sum_{\substack{K=0\\ K\neq l}}^{m}D_K$ 后得这个

极点的留数：

$$\Gamma(m+1)H'_l e^{\lambda'_l t}\prod_{j=l+1}^{m}\varphi\left(t-\sum_{K=j}^{m}D_K\right)\prod_{j=l+1}^{m}f(j,\mu_j)\prod_{j=0}^{l-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)\prod_{j=0}^{l-1}f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu\ \mu=\lambda'_l}$$

注意算子连乘已自然分为两个部分．令各为

$$Q'_{2l}(m,t)=\prod_{j=l+1}^{*m}\tilde{\varphi}(t-\mu)*f(j,\mu)=\prod_{j=l+1}^{m}\varphi\left(t-\sum_{K=j}^{m}D_K\right)\prod_{j=l+1}^{m}f(j,\mu_j)|_{\mu_{l+1}=\cdots=\mu_m=\mu},\quad (A.9)$$

$$P'_{2l}(m,t)=\prod_{j=0}^{*l-1}\tilde{\varphi}(\mu)*f(j,\mu)=\prod_{j=0}^{l-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}D_K\right)\prod_{j=0}^{l-1}f(j,\mu_j)|_{\mu_0=\cdots=\mu_{l-1}=\mu}.\quad (A.10)$$

同理可计算 $i=2$ 以及当 $l=0,1,\cdots,m$ 等所有极点的留数总计为

$$M_2(m,t)=\Gamma(m+1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{i=1,2}H_l^i Q_{2,l}^{\ i}(m,t)P_{2,l}^{i}(m,t)e^{\lambda_l^i t},\quad (A.11)$$

在恢复宗量 ξ, s 后即(3.5)式．实际计算 (A.9—10) 时，在复域 β_j 上将 (A.7) 改写成多元拉氏积分表象是便利的．

$$f(j,\mu_j)=H'_j\int_0^\infty e^{-[\mu_j-\lambda_j^1]\beta_j}d\beta_j+H_j^2\int_0^\infty e^{-[\mu_j-\lambda_j^2]\beta_j}d\beta_j,\quad (A.12)$$

其中要求 $\mathrm{Re}[\mu_j-\lambda_j^i]>0$，则 Q, P 函数化成重迭积分

$$Q_{2,l}^{i_l}(m,t)=\sum_{i_{l+1}\cdots i_m}\left(\prod_{j=l+1}^{m}H_j^{i_j}\right)\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=l+1}^{m}\varphi\left(t-\sum_{K=j}^{m}\beta_K\right)e^{-\sum_{j=l+1}^{m}(\mu_j-\lambda_j^{i_j})\beta_j}d\beta_{l+1}\cdots d\beta_m,\quad (A.13)$$

$$P_{2,l}^{i_l}(m,t)=\sum_{i_0\cdots i_{l-1}}\left(\prod_{j=0}^{l-1}H_j^{i_j}\right)\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=0}^{l-1}\varphi\left(\sum_{K=0}^{j}\beta_K\right)e^{-\sum_{j=0}^{l-1}(\mu_j-\lambda_j^{i_j})\beta_j}d\beta_0\cdots d\beta_{l-1},\quad (A.14)$$

$$i_j=1,2\quad(j=0,1,\cdots,m),\quad \mu_j=\lambda_l^{i_l}\quad(j=0,1,\cdots,m)$$

至此获得 (A.1) 方程的解表示．对于光子始发的簇射仅需作如下由初刻条件引起的代换．

$$H_1(s)\to B(s)[\lambda_1(s)-\lambda_2(s)]^{-1},\ H_2(s)\to B(s)[\lambda_1(s)-\lambda_2(s)]^{-1}.\quad (A.15)$$

上述积分结果已可用于实际计算，但它还有另一表象．引入变数变换

$$\sum_{j=K}^{m}\beta_j=\alpha_K(K>l);\quad \sum_{j=0}^{K}\beta_j=\alpha_K\quad(K<l),\quad (A.16)$$

令 $\lambda_{K-1}^{i_{K-1}}-\lambda_K^{i_K}=\pm\Lambda_K^{i_K}$，当 $K>l$ 时为正，反之为负．Q, P 函数可写为

$$Q_l^{i_l}(m,s,\xi,t)=\sum_{i_{l+1}\cdots i_m}\left(\prod_{K=l+1}^{m}H_K^{i_K}\right)\int_0^\infty\int_0^{\alpha_{l+1}}\cdots\int_0^{\alpha_{m+1}}\left(\prod_{K=l+1}^{m}\varphi(\xi,t-\alpha_K)e^{-\sum_{K=l+1}^{m}\Lambda_K^{i_K}\alpha_K}\right)d\alpha_m\cdots d\alpha_{l+1},$$

$$(K>l)\quad (A.17)$$

$$P_l^{i_l}(m,s,\xi,t)=\sum_{i_0\cdots i_{l-1}}\left(\prod_{K=0}^{l-1}H_K^{i_K}\right)\int_0^\infty\int_0^{\alpha_{l-1}}\cdots\int_0^{\alpha_1}\left(\prod_{K=0}^{l-1}\varphi(\xi,\alpha_K)e^{-\sum_{K=0}^{l-1}\Lambda_K^{i_K}\alpha_K}\right)d\alpha_0\cdots d\alpha_{l-1}.$$

$$(K<l)\quad (A.18)$$

扩散方程的精确解可表成上述重迭的多元积分形式，一定程度上反映了级联传播的特征，介质结构 φ 以叠加方式构成级联特殊函数．计算 P, Q 特殊函数是研究非均匀介质中横向结构的关键．

附　　录　　B

(A.17—18) 式渐近估值需计算下列链状积分

$$\Psi(l, \alpha) = \prod_{K=0}^{l} \int_0^{\alpha_K} d\alpha_K \varphi(\alpha_K), \tag{B.1}$$

显然有

$$\frac{d\Psi(K, \alpha)}{d\alpha} = \varphi(\alpha)\Psi(K-1, \alpha) \tag{B.2}$$

引入生成函数

$$G(\alpha, r) = \sum_{K=0}^{\infty} r^K \Psi(K, \alpha), \tag{B.3}$$

改写 (B.1) 为

$$\frac{d}{d\alpha} G(\alpha, r) = r\varphi(\alpha)G(\alpha, r). \tag{B.4}$$

求解 (B.4) 并用 (B.3) 得 $\Psi(l, \alpha) = \frac{1}{l!}\left[\int_0^{\alpha} \varphi(\alpha)d\alpha\right]^l$. 对 $\Psi(l-1, \alpha)$ 作 Λ_0^l的拉氏变换得(4.4), 同理得(4.5).

参考文献

[1] J. Nishimura, Handbuch Der Physik, Vol. XLVI/2, p. 1—113, ed. by K. sitte, Springer-verlag, 1967.
[2] H. S. Green et al., *P. R.*, 88 (1952), 331; V. V. Guzhavin et al., Proc. 12th ICRC (1971), EAS-23.
[3] V. A. Astafiev, Proc. 15th ICRC (1977), EAS-448.
[4] 岬 晓夫等，东京大学宇宙线实验预印本，CRL Report-36-76-3.
[5] H. Oda et al., P. T. P., 54 (1975), 1720.
[6] 贾桂斌、彭守礼、赵树松，“非均匀介质中电磁级联传播的物理修正效应”(未发表).
[7] 彭守礼、赵树松，三维电磁级联的 Moliere 近似方程的精确解析解(内部报告).
[8] 彭守礼、贾桂斌、赵树松、屈超纯，全国第一届宇宙线超高能物理会议文集，1集(1978)，36.
[9] B. B. Гужавин, И. П. Иваненко, *ЖЭТФ*, **40** (1961), 1682.
[10] M. Dishon, G. H. Weiss, *J. Computa Phys.*, **28** (1978), 129.

GENERAL ANALYTIC SOLUTIONS OF THE THREE-DIMENSIONAL ELECTRON SHOWER EQUATIONS IN THE NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

PENG SHOU-LI (*Yunan University*)

ZHAO SHU-SONG (*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

An complex convolution method was introduced. Using this method the exact solutions of the three-dimensional electron shower equation in the non-homogeneous medium in which the density distribution function was continuous or finite discontinuous are obtained. These solutions included the approximation A and approximation B, the homogeneous and non-homogeneous medium case. Thus, the Nishimura-Kamata's classical results are extended.