第4卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 6
1980年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1980

变形核光学模型的绝热-玻恩近似解法

杨泽森
(北京大学)

摘要

本文提出用绝热——玻恩近似法求解变形核光学模型，即利用绝热近似法给出的波函数，按照类似于扭曲波玻恩近似的步骤来确定散射振幅. 这样得到的散射振幅,在结构上仍然与绝热近似振幅相似,但克服了后者的主要缺点.

引言

通常的耦合道光学模型求解方法[1]，有时计算过程太长，特别是有不少重要的变形核,基态自旋值比较高,这会使计算量大为增加. 因此,有必要寻找更简便的代替办法.

在变形核的情形，为了减小计算量，经常采用所谓绝热近似解法. 但它有一个明显的缺点：相应于余核不同激发态的非弹性散射振幅与激发能无关. 从实际使用的情况看到,这种近似法只能较好地给出弹性散射振幅和能量转移很小时（与入射能相比）的非弹振幅.

本文提出如下的改进办法：在绝热近似波函数的基础上，按照类似于扭曲波玻恩近似的步骤来确定散射振幅. 这样得到的散射振幅,不再具有绝热近似振幅的上述缺点,而且仍然保持着比较简单的结构，它相当于在绝热近似振幅中把各个分波的跃迁矩阵元换成与能量转移有关的新矩阵元,当能量转移可以忽略时,新矩阵元就变为绝热近似的矩阵元. 特别是,弹性散射振幅与绝热近似振幅是完全相同的.

一、散射振幅的表达式

在本文的叙述中,一律假定入射(及出射)粒子是中子. 再假定靶核是轴对称的,选取对称轴作为本体坐标系的第三轴. 设V代表光学势,它依赖于中子的坐标和自旋变量,又依赖于靶核的方位，用本体坐标系表达时记为V'，它与中子总角动量沿对称轴的分量是对易的.

设χ_{sm_s}代表中子的自旋态$\left(s=\frac{1}{2},\ m_s=\pm\frac{1}{2}\right)$, Φ_{nM_n}代表在靶核的一定转动带中的各个状态，$n=1, 2, \cdots, n$，表示按能级顺序的编号. 一定的n值代表一定的核自旋I_n，宇称Π_n和能量ω_n等，M_n为自旋投影. 为确定起见，假定靶核初态是Φ_{1M_1}. 定义

本文1978年12月26日收到.

$k_1=\sqrt{\frac{2\mu E_1}{\hbar^2}}$，其中 μ 为折合质量，E_1 为入射能（质心坐标系），选取入射方向作为 Z 轴方向．于是入射波可写成 $e^{ik_1z}\chi_{sm_s^0}\Phi_{1M_1}$，各因子分别描写入射时的相对运动、中子自旋态及靶核态．在光学势的作用下，中子及靶核状态都发生变化

$$\underset{(\text{入射波})}{e^{ik_1z}\chi_{sm_s^0}\Phi_{1M_1}} \xrightarrow{V} \underset{(\text{总波函数})}{\Psi}$$

令 $E_n=E_1+\omega_1-\omega_n$，$k_n=\sqrt{\frac{2\mu E_n}{\hbar^2}}$，则 Ψ 的渐近式如下：

$$\Psi \xrightarrow{r\text{大}} e^{ik_1z}\chi_{sm_s^0}\Phi_{1M_1}+\sum_{m_snM_n} q_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\ \varphi)\sqrt{\frac{k_1}{k_n}}\frac{e^{ik_nr}}{r}\chi_{sm_s}\Phi_{nM_n}.$$

散射振幅 $q_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\varphi)$ 可以用如下的矩阵元来表达

$$q_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\varphi)=-\sqrt{\frac{k_n}{k_1}}\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\varphi_{\boldsymbol{k}_n}\chi_{sm_s}\Phi_{nM_n}|V|\Psi\rangle \tag{1.1}$$

其中 $\varphi_{\boldsymbol{k}_n}(\boldsymbol{r})=e^{i\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{k}_n$ 的方向由 $(\theta\varphi)$ 决定，而 $|\boldsymbol{k}_n|=k_n$．当我们求出了 Ψ 之后，即可以通过它的渐近式或者利用 (1.1) 式来确定散射振幅．

在所谓绝热近似法中[2]，首先是求出单粒子散射振幅 $f^A(\theta\varphi)$，即对于靶核的一定取向，求解中子被位势 V' 散射的单粒子薛定谔方程，从而确定中子波函数 ψ 的渐近式．设 T 为中子的动能算符，则绝热近似下的单粒子薛定谔方程为

$$(T+V')\psi=E_1\Psi, \tag{1.2}$$

ψ 的渐近式为

$$\psi \xrightarrow{r\text{大}} e^{ik_1z}\chi_{sm_s^0}+\sum_{m_s} f^A_{m_s^0m_s}(\theta\varphi)\frac{e^{ik_1r}}{r}\chi_{sm_s}. \tag{1.3}$$

单粒子散射振幅 $f^A_{m_s^0m_s}(\theta\varphi)$ 也可以写成矩阵元的形式

$$f^A_{m_s^0m_s}(\theta\varphi)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\varphi_{\boldsymbol{k}_1}\chi_{sm_s}|V'|\psi\rangle. \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{k}_1$ 的方向由 $(\theta\varphi)$ 决定，而 $|\boldsymbol{k}_1|=k_1$.

ψ 及 $f^A(\theta\varphi)$ 不仅依赖于中子的变量，而且与靶核的方位有关．最后的绝热近似散射振幅是指 f^A 在靶核初末态之间的矩阵元：

$$q^A_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\varphi)=\langle\Phi_{nM_n}|f^A_{m_s^0m_s}|\Phi_{1M_1}\rangle \tag{1.5}$$

这样的散射振幅与靶核初末态的联系太弱了，连能量转移的影响也反映不出来．

为了克服绝热近似法的这种缺点，本文的做法是：在散射振幅的一般表达式 (1.1) 中，把总波函数 Ψ 近似地换成 $\psi\Phi_{1M_1}$，于是得到

$$q_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\varphi)=-\sqrt{\frac{k_n}{k_1}}\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\varphi_{\boldsymbol{k}_n}\chi_{sm_s}\Phi_{nM_n}|V|\psi\Phi_{1M_1}\rangle. \tag{1.6}$$

改写成与 (1.5) 相应的形式，就是

$$q_{m_s^0 \; 1M_1, m_snM_n}(\theta\varphi)=\langle\Phi_{nM_n}|f_{m_s^01, m_sn}|\Phi_{1M_1}\rangle, \tag{1.7}$$

其中

$$f_{m_s^0 1, m_s n}(\theta\varphi) = -\sqrt{\frac{k_n}{k_1}}\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\varphi_{\boldsymbol{k}_n}\chi_{sm_s}|V'|\psi\rangle. \tag{1.8}$$

显然，在弹性散射的情形，(1.8) 与 (1.4) 完全一样，对于非弹性散射，(1.8) 式能够反映出能量转移的影响.

二、t 矩阵元

令

$$\mathscr{Y}_{ljm} = i^l \sum_{m_l m_s} \mathscr{Y}_{lm_l}(\boldsymbol{r}^0)\chi_{sm_s}\langle lm_l sm_s|jm\rangle$$

并用 $\mathscr{Y}'_{lj\bar{m}}$ 代表相对于本体坐标系来定义的函数. 即

$$\mathscr{Y}_{ljm} = \sum_{\bar{m}} \mathscr{D}^{j*}_{m\bar{m}}(g)\mathscr{Y}'_{lj\bar{m}}$$

其中 g 描写本体坐标系相对于空间坐标系的尤拉角，$\bar{m}$ 为中子总角动量沿靶核对称轴的投影. 于是

$$\varphi_{\boldsymbol{k}_n}(\boldsymbol{r})\chi_{sm_s} = 4\pi\sum_{lm_l}\sum_{jm} j_l(k_n r)Y^*_{lm_l}(\theta\varphi)\mathscr{Y}_{ljm}\langle lm_l sm_s|jm\rangle$$

$$= \frac{4\pi}{k_n r}\sum_{l}\sum_{\bar{m}}\sum_{jmm_l} F_l(k_n r)Y^*_{lm_l}(\theta\varphi)\mathscr{Y}'_{lj\bar{m}}\langle lm_l sm_s|jm\rangle\mathscr{D}^{j}_{m\bar{m}}(g).$$

其中 $(\theta\varphi)$ 代表 $\boldsymbol{k}_n$ 的方向，$F_l(x)$ 是球贝塞函数 $j_l(x)$ 与 x 的积，当 $x\to\infty$，$F_l(x)\to \sin\left(x-\frac{l}{2}\pi\right)$. 令 $\Pi=(-1)^l$，则 l 由Π及 j 决定

$$l = j + \frac{1}{2}(-1)^{j+\frac{1}{2}}\Pi,$$

因此，$\varphi_{\boldsymbol{k}_n}\chi_{sm_s}$ 又可写成

$$\varphi_{\boldsymbol{k}_n}(\boldsymbol{r})\chi_{sm_s} = \frac{4\pi}{k_n r}\sum_{\Pi\bar{m}}\sum_{jmm_l} F_l(k_n r)Y^*_{lm_l}(\theta\varphi)\mathscr{Y}'_{lj\bar{m}}\langle lm_l sm_s|jm\rangle\mathscr{D}^{j*}_{m\bar{m}}(g). \tag{2.1}$$

对于 $\theta=0$，$n=1$ 及 $m_s=m_s^0$，有

$$e^{ik_1 z}\chi_{sm_s^0} = \frac{1}{k_1 r}\sum_{\Pi\bar{m}j_0}\sqrt{\pi(2l_0+1)}\,\langle l_0 0 sm_s^0|j_0 m_s^0\rangle\mathscr{D}^{j_0*}_{m_s^0\bar{m}}(g)[2F_{l_0}(k_1 r)]\mathscr{Y}'_{l_0 j_0\bar{m}}. \tag{2.2}$$

在 V' 的作用下，Π 与 $\bar{m}$ 是不变的，因此，由方程 (1.2) 及渐近式 (1.3) 确定的波函数 ψ 可表示为

$$\psi = \frac{1}{k_1 r}\sum_{\Pi\bar{m}j_0}\sqrt{\pi(2l_0+1)}\,\langle l_0 0 sm_s^0|j_0 m_s^0\rangle\mathscr{D}^{j_0*}_{m_s^0\bar{m}}(g)\sum_{j'} R^{\Pi\bar{m}}_{j'j_0}(r)\mathscr{Y}'_{l'j'\bar{m}}. \tag{2.3}$$

其中，径向函数由如下的耦合方程组和边条件决定

$$\frac{d^2}{dr^2}R^{\Pi\bar{m}}_{jj_0}(r) = \left(\mathscr{Y}'_{lj\bar{m}}\left|\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}V' + \frac{l(l+1)}{r^2} - k_1^2\right]\right|\mathscr{Y}'_{l'j'\bar{m}}\right)R^{\Pi\bar{m}}_{j'j_0}(r), \tag{2.4}$$

$$R^{\Pi\bar{m}}_{jj_0}(0) = 0, \tag{2.5}$$

$$R^{\Pi\bar{m}}_{jj_0}(r) \xlongequal{r\geq r_m} \delta_{jj_0}[F_{l_0}(k_1 r) + iG_{l_0}(k_1 r)] + \eta^{\Pi\bar{m}}_{jj_0}[F_l(k_1 r) - iG_l(k_1 r)]. \tag{2.6}$$

r_m 是外部区域与内部区域的分界点，$G_l(x)$ 是诺曼函数与 x 的积，当 $x\to\infty$ 时，$G_l(x)\to\cos\left(x-\frac{l}{2}\pi\right)$，$\eta^{\Pi m}$ 就是绝热近似下的单粒子散射矩阵.

把 (2.1) 式及 (2.3) 式代入 (1.8) 式，得出

$$f_{m_s^0 1, m_s n}(\theta\varphi)=\frac{i}{k_1}\sum_{\Pi m j_0}\sqrt{\pi(2l_0+1)}\,\langle l_0 0 s m_s^0|j_0 m_s^0\rangle \mathscr{D}^{j_0 *}_{m_s^0 m}(g)$$
$$\times\sum_{j m m_l}\mathscr{D}^{j}_{m m}(g)\,t^{\Pi m}_{nj,1j_0}Y_{l m_l}(\theta\varphi)\langle l m_l s m_s|jm\rangle, \tag{2.7}$$

其中

$$t^{\Pi m}_{nj,1j_0}=\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\sum_{j'}\int_0^{r_m}F_l(k_nr)\left(\mathscr{Y}'_{ljm}\left|\frac{2\mu}{\hbar^2}V'\right|\mathscr{Y}'_{l'j'm}\right)R^{\Pi m}_{j'j_0}(r)dr. \tag{2.8}$$

由 (2.3)、(2.6) 及 (1.3) 确定的 $f^A_{m_s^0 m_s}(\theta\varphi)$ 与 (2.7) 具有相似的结构，只是 $t^{\Pi m}_{nj,1j_0}$ 应该换成如下的 $t^{(A)\Pi m}_{jj_0}$:

$$t^{(A)\Pi m}_{jj_0}=\delta_{jj_0}-\eta^{\Pi m}_{jj_0}. \tag{2.9}$$

反过来说，本文方法归结为把绝热近似法中的单体跃迁矩阵元 $t^{(A)\Pi m}_{jj_0}$ 换成 (2.8) 式表示的新矩阵元 ($n=1$ 时不需要替换).

利用方程组 (2.4) 式可把 (2.8) 式改写如下：

$$t^{\Pi m}_{nj,1j_0}=\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\int_0^{r_m}F_l(k_nr)\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k_1^2\right]R^{\Pi m}_{jj_0}(r)dr$$
$$=\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\left\{F_l(k_nr_m)\left(\frac{dR^{\Pi m}_{jj_0}(r)}{dr}\right)_{r_m}-\left(\frac{dF_l(k_nr)}{dr}\right)_{r_m}R^{\Pi m}_{jj_0}(r_m)\right\}$$
$$+\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\int_0^{r_m}R^{\Pi m}_{jj_0}(r)\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k_1^2\right]F_l(k_nr)dr.$$

但 $F_l(k_nr)$ 满足 $\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k_n^2\right]F_l(k_nr)=0$，因此

$$t^{\Pi m}_{nj,1j_0}=\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\left\{F_l(k_nr_m)\left(\frac{dR^{\Pi m}_{jj_0}(r)}{dr}\right)_{r_m}-\left(\frac{dF_l(k_nr)}{dr}\right)_{r_m}R^{\Pi m}_{jj_0}(r_m)\right\}$$
$$+(k_1^2-k_n^2)\frac{i}{\sqrt{k_1k_n}}\int_0^{r_m}F_l(k_nr)R^{\Pi m}_{jj_0}(r)dr. \tag{2.10}$$

在 (2.10) 式的第一行中，只涉及 $r=r_m$ 点的函数值及微商，因此，当完成了绝热近似法中的计算，求出散射矩阵 $\eta^{\Pi m}$ 后，关于这部分的计算工作也就完成了. 但是第二行的积分涉及 $R^{\Pi m}_{jj_0}$ 在内部区域各点的值.

三、讨　　论

1. 我们看到，本文方法与绝热近似法的差别可归结为把跃迁矩阵元 $t^{(A)\Pi m}_{jj_0}$ 换成 (2.8) 或 (2.10) 式中的 $t^{\Pi m}_{nj,1j_0}$，后者是通过 k_n 而依赖于 n 的. 如果在 (2.10) 式中把 k_n 换成 k_1，则第一行变为 $t^{(A)\Pi m}_{jj_0}$ (第二行当然变为零). 因为，由 F_l 与 G_l 的关系式

$$G_l(k_1 r)\frac{dF_l(k_1 r)}{dr}-F_l(k_1 r)\frac{dG_l(k_1 r)}{dr}=k_1$$

可得到

$$\frac{i}{k_1}\left[F_l(k_1 r_m)\left(\frac{dR_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}(r)}{dr}\right)_{r_m}-\left(\frac{dF_l(k_1 r)}{dr}\right)_{r_m}R_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}(r_m)\right]=\delta_{jj_0}-\eta_{jj_0}^{\Pi\bar{m}},$$

2. 如果把 $F_l(k_n r)$ 及其微商改写如下

$$F_l(k_n r_m)=\frac{F_l(k_n r_m)}{F_l(k_1 r_m)}F_l(k_1 r_m),$$

$$\left(\frac{dF_l(k_n r)}{dr}\right)_{r_m}=\left(\frac{d}{dr}\frac{F_l(k_n r)}{F_l(k_1 r)}\right)_{r_m}F_l(k_1 r_m)+\frac{F_l(k_n r_m)}{F_l(k_1 r_m)}\left(\frac{dF_l(k_1 r)}{dr}\right)_{r_m}.$$

则 (2.9) 式又可写成

$$t_{nj,1j_0}^{\Pi\bar{m}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_n}}\frac{F_l(k_n r_m)}{F_l(k_1 r_m)}t_{jj_0}^{(A)\Pi\bar{m}}-\frac{i}{\sqrt{k_1 k_n}}\left(\frac{d}{dr}\frac{F_l(k_n r)}{F_l(k_1 r)}\right)_{r_m}F_l(k_1 r_m)R_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}(r_m)$$
$$+i\frac{(k_1^2-k_n^2)}{\sqrt{k_1 k_n}}\int_0^{r_m}F_l(k_n r)R_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}(r)dr,$$

这种形式也许能更清楚地表现出 k_n 的影响.

3. 把 (2.7) 代入 (1.7) 式,得出

$$q_{m_s^0\,1M_1,m_s nM_n}(\theta\varphi)=\frac{i}{k_1}\sum_{\Pi\bar{m}j_0}\sqrt{\pi(2l_0+1)}\langle l_0 0 s m_s^0|j_0 m_s^0\rangle$$

$$\cdot\sum_{jmm_l}t_{nj,1j_0}^{\Pi\bar{m}}Y_{lm_l}(\theta\varphi)\langle lm_l sm_s|jm\rangle\langle\Phi_{nM_n}|\mathscr{D}_{m_s^0\bar{m}}^{j_0 *}\mathscr{D}_{m\bar{m}}^{j}|\Phi_{1M_1}\rangle. \tag{3.1}$$

用 ϕ_Ω 描述靶核的内部态,其中 Ω 为靶核自旋沿对称轴的投影(约定 $\Omega\geqslant 0$). 再设 $\hat{\phi}_\Omega$ 代表 ϕ_Ω 的时间反演. 先看 $\hat{\phi}_\Omega$ 与 ϕ_Ω 正交的情形,这时有

$$\Phi_{nM_n}=\sqrt{\frac{2I_n+1}{16\pi^2}}\{\phi_\Omega\mathscr{D}_{M_n\Omega}^{I_n *}+(-1)^{I_n-\Omega}\hat{\phi}_\Omega\mathscr{D}_{M_n-\Omega}^{I_n *}\}$$

由此得到

$$\langle\Phi_{nM_n}|\mathscr{D}_{m_s^0\bar{m}}^{j_0 *}\mathscr{D}_{m\bar{m}}^{j}|\Phi_{1M_1}\rangle$$
$$=(-1)^{m+\Omega-\bar{m}-M_1}\sqrt{(2I_1+1)(2I_n+1)}\sum_{\lambda=0,\text{偶}}\frac{\langle j_0 m_s^0 j-m|\lambda m_s^0-m\rangle}{(2\lambda+1)}$$
$$\cdot\langle j_0\bar{m}j-\bar{m}|\lambda 0\rangle\langle I_1 M_1 I_n-M_n|\lambda m-m_s^0\rangle\langle I_1\Omega I_n-\Omega|\lambda 0\rangle. \tag{3.2}$$

再看 $\hat{\phi}_\Omega=\phi_\Omega$ 的情形,这时 $\Omega=0$, Φ_{nM_n} 为

$$\Phi_{nM_n}=\sqrt{\frac{2I_n+1}{8\pi^2}}\phi_\Omega\mathscr{D}_{M_n 0}^{I_n *}\delta_{I_n,\text{偶}}.$$

对于这种情况,注意 I_1, I_n 限于取 0, 2, $\cdots$ 等偶数, (3.1) 仍然适用.

4. 按照本文的方法进行实际计算时,基本的工作仍然是解绝热近似方程组 (2.4),求出 $\eta_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}$ 以及径向函数 $R_{jj_0}^{\Pi\bar{m}}(r)$,其次是按照 (2.10) 式确定 $n>1$ 时的 $t_{nj,1j_0}^{\Pi\bar{m}}$. 有了 t 矩阵元之后,就可用它们去代替绝热近似法中的 $t_{jj_0}^{(A)\Pi\bar{m}}$,从而计算散射振幅和截面.

参 考 文 献

[1] Ch. Lagrange, JAERI-M-5984(1975), 51, 58. S. Tanaka, JAERI-M-5984(1975), 212.
[2] T. Tamura, *Rev. Mod. Phys.*, 37(1965), 679.

THE ADIABATIC-BORN APPROXIMATION OF THE OPTICAL MODEL FOR DEFORMED NUCLEI

YANG ZE-SEN
(*Peking University*)

ABSTRACT

Scattering amplitudes are determined in a manner similar to DWBA, but the distorted wave function here is found from adiabatic hypothesis. The structure of the scattering amplitudes is still similar to that obtained from adiabatic approximation, but the main deficiency of the latter, namely the independence of the inelastic amplitudes on the energy loss, is overcome.