# 相对运动、集体振动、单粒子激发相互耦合系统输运过程的理论描述

卓益忠 张竞上 吴锡真 马中玉
（中国科学院原子能研究所）

## 摘　　要

本文在对相对运动做经典近似的条件下，用与时间有关的投影算符方法，推导出相对运动，集体振动及单粒子激发的耦合方程。

这个理论适用于描述重离子深度非弹散射、核裂变等核反应输运过程。

应用输运观点来描述重离子深度非弹性散射和裂变过程已被许多人采用，特别是前者，已有不同的理论框架. Agassi[1], Norenberg[2], Hoffman 等[3] 认为在重离子碰撞过程中，相对运动动能直接传输(耗散)给单粒子激发，Broglia 等[4]则认为相对运动动能首先传输给集体振动. 但是从一些唯象的理论分析及 TDHF 理论，可以断定单粒子激发与集体激发是同时起作用的. 因此近来 Ko[5], Takigawa[6] 等试图把这两方面的理论统一起来，即同时考虑集体振动和单粒子激发两种能量耗散机制. 本文也是沿着这个方向做出努力，对相对运动也做经典近似，但对内禀自由度采用与时间有关的投影算符方法[7]，因而可以得到更加一般，更加自洽的理论框架.

考虑两个原子核相互碰撞(在质心系)，分别用 $\boldsymbol{r}$, $\alpha$, $x_i$ 表示相对运动、声子和单粒子的坐标. 假定系统哈密顿量可以分解为下面几部分

$$\begin{aligned} H &= H_1(\boldsymbol{r}) + H_2(\alpha) + H_3(x_i) + V_{12}(\boldsymbol{r}, \alpha) + V_{13}(\boldsymbol{r}, x_i) + V_{23}(\alpha, x_i) \\ &= H_1(\boldsymbol{r}) + h(\alpha, x_i, \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $H_1(\boldsymbol{r}) = P^2/2\mu + U(r)$ 是相对运动哈密顿量，其中 $\boldsymbol{P}$ 为相对动量，$U(r)$ 是相对运动位能，$h(\boldsymbol{r}, \alpha, x_i)$ 是内禀哈密顿量，$H_2(\alpha)$, $H_3(x_i)$分别为声子和单粒子哈密顿量，$V_{12}$, $V_{13}$, $V_{23}$ 为自由度间的相互作用.

首先我们对相对运动做经典近似，在考虑内禀激发的情况下，牛顿方程近似写为

$$\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{\partial U(R)}{\partial \boldsymbol{R}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\langle A_{tt'}|h(\boldsymbol{R}, \alpha, x_i)|A_{tt'}\rangle. \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{R}$ 是平均经典相对运动轨道，$\mu$ 为折合质量（严格说是惯量张量），$|A_{tt'}\rangle$ 是内禀波函数，它满足薛丁格方程：

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - h(\boldsymbol{R}, \alpha, x_i)\right\}|A_{tt'}\rangle = 0. \tag{3}$$

文本1979年7月20日收到.

$t'$ 为初始时刻,即 $|A_{t't'}\rangle = |A\rangle$ 为初始波函数,因此有:

$$|A_{tt'}\rangle = \exp\left(-i\int_{t'}^{t} h(R(t''), \alpha, x_i)dt''\right)|A\rangle, \tag{4}$$

这样 (2) 可写为

$$\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{\partial U(R)}{\partial \boldsymbol{R}} - \left\langle A_{tt'}\left|\frac{dh(\boldsymbol{R}, \alpha, x_i)}{d\boldsymbol{R}}\right|A_{tt'}\right\rangle. \tag{5}$$

这与 Takigawa[6] 由弗曼路径积分得到的方程相同[见(3.19)式].

为了求解 (2)、(5) 必需研究内禀态特性,下面讨论内禀态运动. 令总内禀自由度的密度矩阵

$$F(t) = |A_{tt'}\rangle\langle A_{tt'}|, \tag{6}$$

内禀自由度哈密顿量为

$$h(t) = H_2(\alpha) + H_3(x_i) + V_{12}(\boldsymbol{R}, \alpha) + V_{13}(\boldsymbol{R}, x_i) + V_{23}(\alpha, x_i), \tag{7}$$

相应的刘吾维算符为

$$L(t) = L_2(\alpha) + L_3(x_i) + L_{12}(R, \alpha) + L_{13}(R, x_i) + L_{23}(\alpha, x_i). \tag{8}$$

按文献[7]的做法, 把 $F(t)$ 分为"有关"部分 $F_r(t)$ 与"无关"部分 $F_i(t)$, 而"有关"部分是声子密度矩阵与单粒子密度矩阵的乘积, $F_r(t) = C(t)\rho(t)$, 这里 $C(t)$ 为声子密度矩阵, $\rho(t)$ 为单粒子密度矩阵,而它们的关联被包含在 $F_i(t)$ 之中. 引入与时间有关的投影算符:

$$P(t) = C(t)T_{rc} + \rho(t)T_{r\rho} - C(t)\rho(t)T_r \tag{9}$$

$$F(t) = P(t)F(t) + (1 - P(t))F(t) \tag{10}$$

$$= F_r(t) + F_i(t) \tag{11}$$

对与时间有关的哈密顿量 $h(t)$, 仍按文献 [7] 的做法,若忽略初始关联, 得到集体振荡和单粒子激发的耦合主方程

$$\dot{C}(t) = -i(L_2 + \langle L_{23}\rangle_{\rho,t} + L_{12}(t))C(t) - \int_0^t dt' T_{r\rho}\Delta_t L_{23} g(t,t')\Delta_{t'} L_{23} C(t')\rho(t'), \tag{12a}$$

$$\dot{\rho}(t) = -i(L_3 + \langle L_{23}\rangle_{c,t} + L_{13}(t))\rho(t)$$

$$- \int_0^t dt' T_{rc}\Delta_t L_{23} g(t, t')\Delta_{t'} L_{23} C(t')\rho(t'). \tag{12b}$$

在上式中

$$\langle L_{23}\rangle_{c,t}\rho(t) = T_{rc}(L_{23}C(t)\rho(t)), \tag{13a}$$

$$\langle L_{23}\rangle_{\rho,t}C(t) = T_{r\rho}(L_{23}C(t)\rho(t)), \tag{13b}$$

$$\Delta_t L_{23} = L_{23} - \langle L_{23}\rangle_{c,t} - \langle L_{23}\rangle_{\rho,t}. \tag{13c}$$

传播子

$$g(t, t') \equiv T\exp\left\{-i\int_{t'}^{t} dt''(1 - P(t''))L(t'')\right\}, \tag{14}$$

$T$ 是 Dyson 编时算符.

由 (12a, b) 清楚地看到,除了忽略初始关联外, 它严格考虑了声子与单粒子之间,以及它们与相对运动之间的全部相互作用,其中 $\langle L_{23}\rangle c(\rho)$, $t$ 是对 $L_2(L_3)$ 的附加平均场, 它们是声子(单粒子)激发对原有平均场的修正. $\Delta_t L_{23}$ 是剩余相互作用. 传播子 $g(t, t')$

中也包含着所有高次效应，因而对方程 (12a, b) 的进一步近似取决于 $g(t, t')$ 的近似的取法，下面讨论一级玻恩近似情况．

由于方程 (12a, b) 的碰撞项中有两个 $L_{23}$ 作用在 $g(t, t')$ 的两边，若假定单粒子与声子的耦合是弱的，则在 $g$ 中可忽略 $L_{23}$，对此称为一级玻恩近似．这时

$$g(t, t') = T\exp\left\{-i\left[(L_2 + L_3)(t - t') + \int_{t'}^{t} (L_{12}(t'') + L_{13}(t''))\, dt''\right]\right\}. \tag{15}$$

将(15)代入 (12a, b) 可以看出，虽然这时仅考虑到 $L_{23}$ 的二次项，但却包括了 $L_{12}$, $L_{13}$ 的各次项，这样的方程可以描述的物理过程是声子与单粒子耦合较弱，但它们与相对运动可有较强的耦合． 如果认为不仅声子与单粒子是弱耦合，而且它们与相对运动也是弱耦合，则可忽略三级以上的微扰项，同时做马尔科夫近似，这时耦合主方程具有更简单的形式:

$$\dot{C}(t) = -i(L_2 + L_{12}(t))C(t) - \int_0^\infty d\tau T_{r\rho} L_{23} e^{-i(L_2+L_3)\tau} L_{23} C(t)\rho(t), \tag{16a}$$

$$\dot{\rho}(t) = -i(L_3 + L_{13}(t))\rho(t) - \int_0^\infty d\tau T_{rc} L_{23} e^{-i(L_2+L_3)\tau} L_{23} C(t)\rho(t), \tag{16b}$$

将方程 (16a, b) 与 Takigawa 和 Ko 的工作进行比较可以看到，虽然 (16a, b) 只适用于弱耦合情况，与一般方程 (12a, b) 比较已经作了很大近似，但它仍有较普遍的应用意义．

为了对声子和单粒子相互作用进一步做无规位相近似，用矩阵元的形式表达更为方便．这样可与 Ko 的结果进行比较，同时便于数值计算，结果的物理意义也更明确．

$V_{23}$ 矩阵元的无规位相近似为

$$\overline{(V_{23})_{\alpha\alpha', nn'}(V_{23})_{\beta'\beta, m'm}\delta(\varepsilon_{\alpha'} + E_{n'} - \varepsilon_\beta - E_n)} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{nm}\delta_{n'm'}\overline{(V_{23}^2)}_{\alpha\alpha', nn'}, \tag{17}$$

再引入下列标记

$$\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\alpha'}(t) = \pi \sum_{nn'} \overline{(V_{23}^2)}_{\alpha\alpha', nn'}\rho_{n'n'}(t),$$

$$\frac{1}{2}\Gamma_\alpha(t) = \pi \sum_{\alpha' nn'} \overline{(V_{23}^2)}_{\alpha\alpha', nn'}\rho_{n'n'}(t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha'}\Gamma_{\alpha\alpha'}(t),$$

$$\frac{1}{2}\Gamma_{nn'}(t) = \pi \sum_{\alpha\alpha'} \overline{(V_{23}^2)}_{\alpha\alpha', nn'} C_{\alpha'\alpha'}(t),$$

$$\frac{1}{2}\Gamma_n(t) = \pi \sum_{\alpha\alpha' n'} \overline{(V_{23}^2)}_{\alpha\alpha', nn'} C_{\alpha\alpha}(t) = \frac{1}{2}\sum_{n}\Gamma_{nn'}(t),$$

并应用

$$V_{12} = g_{12}\sum_{\lambda\mu} F_\lambda(R)(b_{\lambda\mu} y_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu}^{+} y_{\lambda\mu}^{*})$$

其中符号的意义同文献[6]．则:

$$\begin{aligned}\dot{C}_{\alpha\beta}(t) = & -i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)C_{\alpha\beta}(t) - ig_{12}\sum_{\lambda\mu} F_\lambda(R)[(N_\alpha + 1)^{1/2}C_{\alpha+1,\beta}(t)y_{\lambda\mu} \\ & + N_\alpha^{1/2}C_{\alpha-1,\beta}(t)y_{\lambda\mu}^{*} - (N_\beta + 1)^{1/2}C_{\alpha,\beta+1}(t)y_{\lambda\mu} - N_\beta^{1/2}C_{\alpha,\beta-1}(t)y_{\lambda\mu}^{*}] \\ & - \left[\frac{1}{2}(\Gamma_\alpha(t) + \Gamma_\beta(t))\, C_{\alpha\beta}(t) - \sum_{\alpha'}\Gamma_{\alpha\alpha'}^{(t)} C_{\alpha'\alpha'}(t)\,\delta_{\alpha\beta}\right],\end{aligned} \tag{17a}$$

$$\dot{\rho}_{nm}(t) = -i(E_n - E_m)\rho_{nm} - i\sum_{n'}[(V_{13})_{nn'}\rho_{n'n}(t) - \rho_{nn'}(t)(V_{13})_{n'n}]$$
$$-\left[\frac{1}{2}(\Gamma_n(t) + \Gamma_m(t))\rho_{nm}(t) - \sum_{n'}\Gamma_{nn'}(t)\rho_{nn'}(t)\delta_{nm}\right]. \quad (17\,b)$$

在方程 (17 a, b) 中 $\alpha, \beta, \cdots$ 表示具有各种 $\lambda$ 声子的量子数，详细写出应是 $\alpha_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots}$ 即 $N_\alpha = n_{\lambda_1} + n_{\lambda_2} + \cdots$ 这里下标省略. 而 $n, m, \cdots$ 表示单粒子 (激子) 状态的量子数. 方程 (17a, b) 以及方程 (2) 或 (5) 将是我们可以用来进行数值计算的三个耦合方程，它们将相对运动与集体振动和单粒子激发耦合起来. 在方程 (17a, b) 中非对角元起着重要作用，因为如果仅考虑对角元时就变成通常的声子粒子耦合主方程[8]，这时就不能再将相对运动自由度耦合起来. 此外对单粒子自由度我们不用热浴近似，因此 $\Gamma_\alpha(t)\Gamma_{\alpha\alpha'}(t)$ 及 $\Gamma_n(t)\Gamma_{nn'}(t)$ 都是含时间的，这是很合理的. 为进一步阐述上述方程的物理意义，让我们导出 (17a, b) 的经典对应方程. 已知与声子产生、消灭算符对应的坐标算符 $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ 为

$$\hat{\alpha}_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda\omega_\lambda}}(b^+_{\lambda\mu} + (-1)^\mu b_{\lambda\mu}), \quad (18)$$

其经典对应量为

$$\langle\alpha_{\lambda\mu}\rangle = T_{rc}(\hat{\alpha}_{\lambda\mu}C(t)), \quad (19)$$

定义 $\Gamma_{\lambda\mu}(t) = \frac{1}{2}(\Gamma_\alpha(t) + \Gamma_{\alpha-1}(t))$.

这相当于忽略了 $\Gamma_\alpha(t)$ 与 $\alpha$ 的依赖关系. 很容易得到:

$$\frac{d^2\langle\alpha_{\lambda\mu}\rangle}{dt^2} + \frac{2\Gamma_{\lambda\mu}(t)}{\hbar^2}\frac{d\langle\alpha_{\lambda\mu}\rangle}{dt} + \left\{\frac{2}{\hbar^2}\frac{d\Gamma_{\lambda\mu}(t)}{dt} + \omega_\lambda^2 + \frac{\Gamma^2_{\lambda\mu}(t)}{\hbar^2}\right\}\langle\alpha_{\lambda\mu}\rangle$$
$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2B_\lambda\omega_\lambda}}\omega_\lambda F_\lambda(R)y_{\lambda\mu}. \quad (20)$$

将方程(20) 与 [6]中(4.11)式比较，这里的 $\Gamma_{\lambda\mu}(t)$ 相当于那里的 $K_{\lambda\mu}$，由于我们对相互作用 $V_{23}$ 的矩阵元做了无规位相近似，因而无能级移动修正 ($\Delta_{\lambda\mu} = 0$)，这是必然的. 当然，由于[6]中对单粒子自由度作了热浴近似，因而 $K_{\lambda\mu}$ 与 $t$ 无关，在 [5] 中虽然没作热浴近似，但近似地将相互作用矩阵元看成与单粒子态无关，因而结果也与 $t$ 无关，实际上这样做的结果声子方程与单粒子方程没有耦合起来.

总之，可以认为: 当相对运动做经典近似，并对内禀自由度采用与时间有关的投影算符方法时，可以得到一个具有普遍意义的理论框架，它们可以将相对运动，集体振动，单粒子激发等自由度自洽地耦合起来，在弱耦合近似以及对 $V_{23}$ 矩阵元做无规位相近似的条件下得到了比较简单，物理意义明确且便于数值计算的耦合方程，避免了文献 [6] 中对单粒子自由度取热浴近似的局限性，并将文献[5]中没有考虑到的单粒子与相对运动的直接耦合问题给出了解决办法，同时对粒子与声子的耦合图象做了更加细致的考虑.

对于推广到强耦合情况以及考虑声子与单粒子同时激发时多余自由度问题都是值得进一步探讨的.

## 参 考 文 献


[1] D. Agassi, C. M. Ko, H. A. Weidenmüler, *Ann. of Phys.*, **107** (1977), 140.
[2] W. Nörenberg, *J. de Phys.*, C5 (1976).
[3] H. Hoffman, P. J. Siemens, *Nucl. Phys.*, **A257** (1976), 165; **A275** (1977), 464.
[4] R. A. Broglia, C. M. Dusso, A. Winther, *Phys. Lett.*, **53B** (1974), 301; **61B** (1976), 113; **73B** (1978), 405.
[5] C. M. Ko, *Z. Phys.*, **A286** (1978), 405.
[6] S. Takigawa, *Nucl. Phys.*, **A315** (1979), 186.
[7] 卓益忠、吴锡真，高能物理与核物理，**3**(1979)，501.
[8] 张竞上、卓益忠、顾英圻，原子核物理，**2**(1980)，1.


# THE TRANSPORT THEORY OF A COUPLING SYSTEM SIMULTANEOUSLY INVOLVING THE RELATIVE MOTION COLLECTIVE OSCILLATIONS AND SINGLE PARTICLE EXCITATIONS


ZHUO YI-ZHONG  ZHANG JING-SHANG
WU XI-ZHEN  MA ZHONG-YU
*(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)*


### ABSTRACT


In this paper, by using the time dependent projection operater method, the coupling equations of the relative motion, in classical limit, collective osillations and single particle excitions have been derived.

These theorelical formulations are expected to be useful for the descriptions of the transport process for the inelastic collision between heavy ions as well as nuclear fission.