

研究简报

介子结构中的一种可能位势

吴邦惠 刘永贤 胡诗可

(四川大学)

摘 要

本文在层子模型的基础上,应用 B-S 方程讨论了介子结构. 结果指出,如果引入深底方位阱、谐振势和库仑型势的迭加位势,用于讨论介子束缚态时,能初步解释介子的能谱、平均半径与原点波函数等特性.

一、引 言

应用层子模型来研究介子结构的一个重要问题是:如何给出正确的介子能谱和介子结构波函数. 鉴于目前对层子间的超强相互作用性质了解得很少,一般应用 B-S 方程来研究介子结构时,常采用唯象的方法进行讨论. 文献[1—3]在瞬时作用近似下,对介子的 B-S 波函数和层子间位势结构的关系进行过较系统的讨论. 文献[4]应用标量粒子的 B-S 方程和三维谐振势来讨论介子结构,虽然能解释介子能谱,但求得的介子半径偏小,而介子原点波函数却偏大. 我们在超强作用为标量耦合的条件下,曾采用一种“ ν 势”和“差型 ν 势”来讨论介子结构^[6,7],了解到波函数和位势关系的一些特性,但求解中束缚态能量仍作为参量引入的. 文献[8]应用标量粒子的 B-S 方程和四维谐振势讨论过介子结构,文献[9]则采用赝标耦合下的 B-S 方程和四维谐振势来讨论介子结构,得到一些有意义的结果,文中也指出单用四维谐振势还存在的问题. 上述情况指出,应用 B-S 方程来讨论介子结构,在确定位势和波函数的旋量结构后,如何选择适当的位势的空间分布形式,仍是一个值得进一步探讨的问题.

二、介子结构的等效位势和计算结果

为了简便我们采用重层子模型进行讨论,即认为层子质量 M 远大于介子质量 m 和介子内层子的相对动量 p ,层子间的超强作用在质心系中近似等效于瞬时作用. 由于一般情形下对 B-S 方程的严格求解数学上存在困难,我们先应用标量粒子的 B-S 方程进行讨论(即暂不考虑层子的自旋). 将介子看作正反标量粒子组成的束缚态,选择位势使能导

致非相对论性内部运动。在动量表象中束缚态波函数 $\phi_p(p)$ 满足的 B-S 方程为^[8]:

$$\left[\left(\frac{P_\mu}{2} - p_\mu\right)^2 + M^2\right] \left[\left(\frac{P_\mu}{2} + p_\mu\right)^2 + M^2\right] \phi_p(p) = -M^2 \int d^4p' U(p, p') \phi_p(p'), \quad (2.1)$$

式中 P_μ 与 p_μ 分别为介子的质心动量与内部动量, $U(p, p')$ 为由 p' 到 p 的跃迁矩阵元。在瞬时作用近似下 $U(p, p') = U(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, 经过计算有关极点的留数积分, 将内部运动能量 p_0 积掉后, 得到介子三维波函数 $\phi(\mathbf{p})$ 满足的方程^[9]:

$$(E^2 - \mathbf{p}^2 - 4M^2) \phi(\mathbf{p}) = \frac{2M}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + 4M^2}} 2M \int U(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}') d^3p', \quad (2.2)$$

式中 E 为介子束缚态能量。在非相对论近似下, 过渡到坐标表象后得到下列形式的简化方程:

$$\left(E^2 - \frac{3}{2}\mathbf{p}^2 - 4M^2\right) \Psi(\mathbf{r}) = 2M V \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

$V(r)$ 与 $\Psi(\mathbf{r})$ 分别为坐标表象中的位势与波函数。方程(2.3)中能量参量 E 以平方形式出现, 保证了实验观测到的介子质量谱的平方性特征。

下面讨论位势 $V(r)$ 的空间分布形式。考虑到通常的平底位阱虽能解释介子质量谱, 却导致较小的介子半径和较大的介子原点波函数值, 说明位势中还需考虑由层子具有结构而引起的排斥项。假定这种排斥势为库仑型势, 并且只在很小的距离内起着重要作用。文献[10]曾指出层子-反层子作用势中包含硬核排斥项的可能性, 文献[11]用薛定格方程讨论介子能谱也曾引入库仑型势。这里引入库仑型排斥势仍然符合位势满足的非相对论性内部运动条件 $\pi/R \ll MC$ (R 为作用力程)。只是引入库仑型排斥势后, 为了使方程(2.3)解得的介子能谱具有 Regge 轨迹规律性, 相应的谐振势应修改为 $k(r - r_0)^2$ 形式 (k 与 r_0 为位势参量), 由上述图象这点也可理解。这样, 层子反层子间的位势可看作深底方位阱、谐振势和库仑型排斥势的迭加, 并可表为:

$$V = V_0 + V_1, \quad V_1 = k(r - r_0)^2 + \frac{\alpha}{r}, \quad (-2M \approx V_0 \langle 0, k, \alpha \rangle) \quad (2.4)$$

如果进一步要求方程(2.3)与(2.4)的解具有谐振型能谱与波函数, 则可确定位势中各参量间的关系, 并有:

$$V = V_0 + V_1, \quad V_1 = \frac{3\mu^2}{M} (r - r_0)^2 + \frac{3\mu}{M} \frac{r_0}{r} (l + 1), \quad \mu^2 = \frac{1}{3} M k. \quad (2.5)$$

上面引入的库仑型排斥势不仅和层子反层子间的距离有关, 还和它们的轨道运动状态有关。这种特性来自使上述方程的解具有谐振型的能谱与波函数这一要求。另外, 由于库仑型排斥势中包含因子 $1/M$ (M 为层子质量), 使这种位势只在相对介子平均半径为很小的距离内起着重要作用。和谐振势相比, 它将使介子原点波函数值减小而使层子分布半径增大, 这正是我们所期待的。文献[11]用薛定格方程讨论介子能谱时, 也曾引入这种和轨道量子数 l 有关的非静态位势, 只是这里引入的库仑型排斥势对应于轨角动量平方的一种较特殊的函数形式。

由方程(2.3)与(2.5)可以求得介子质心系的内部运动波函数。选取波函数的形式为 $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 代入(2.3)式后, 得出径向波函数满足的方程为

$$\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}(r)}{dr} + \left[\frac{2}{3} (E^2 - 4M^2 - 2MV_0) - \frac{4}{3} MV_1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl}(r) = 0, \tag{2.6}$$

方程 (2.6) 的一般解的形式为

$$R_{nl}(r) = r^l e^{-\mu(r-r_0)^2} \cdot v(r). \tag{2.7}$$

对于无径向激发的情形, $v(r)$ 为常量, 相应的能谱为

$$E^2 = (4M^2 + 2MV_0) + 6\mu \left(l + \frac{3}{2} \right). \tag{2.8}$$

对于存在径向激发的情形, 由方程 (2.6) 与 (2.7) 可以求得 $v(r)$ 的具体形式和能谱. 从 0^- 介子能谱的实验值可由 (2.8) 式定出 μ 值, 再从 0^- 介子衰变几率的实验值由 (2.7) 可以定出参量 $r_0^{[12]}$, 由此可进一步计算介子内层子分布的均方根半径.

取 $\mu = \frac{1}{6} \text{ GeV}^2$, 求得的介子原点波函数值和层子分布均方根半径随位阱参量 r_0 的变化关系如图 1 所示. 当 r_0 由 0.6 费米变到 0.7 费米时, 介子原点波函数平方值由 $2.38 \times 10^{-13} m_N^3$ 变至 $0.61 \times 10^{-3} m_N^3$, 而层子分布均方根半径则由 0.43 费米变至 0.47 费米. 文献 [12] 求得的 π 介子原点波函数平方值为 $1.52 \times 10^{-3} m_N^3$, 在上述范围内. 当 $r_0 = 0$, (2.5) 式的 V_1 相应于通常的谐振势, 由此得到的介子原点波函数平方值为 $5.2 \times 10^{-1} m_N^3$, 约比上述值大两个量级. 实验观测到的介子电磁半径除层子分布的贡献外, 还包括光子反冲和层子结构引起的贡献, 即层子分布半径应小于介子电磁半径^[2]. 由通常谐振势求得的层子分布半径仅为 0.2 费米, 与 π 介子电磁半径相比显得偏小.

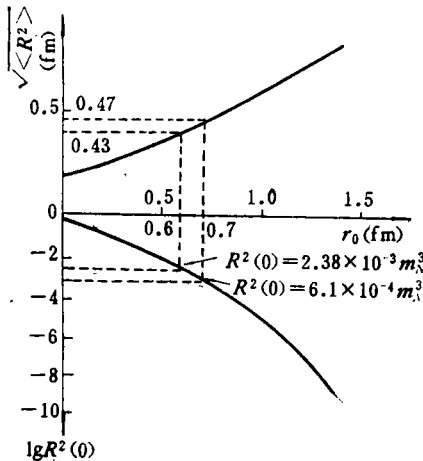


图 1 介子原点波函数平方值和层子分布均方根半径随位阱参量 r_0 的变化关系(标量粒子的情形)

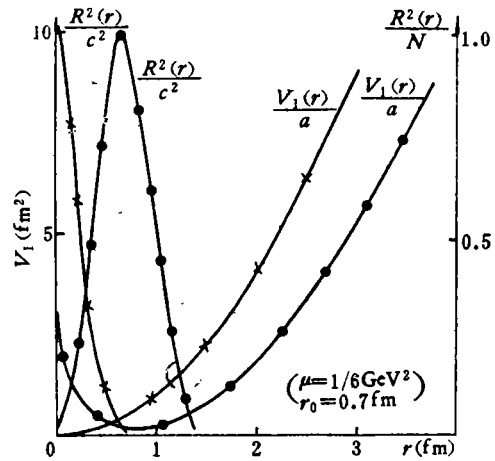


图 2 谐振势和谐振-库仑迭加势及其相应的介子波函数(标量粒子的情形)
 -x-x- 谐振势 -●-●- 谐振-库仑迭加势

为了便于比较, 图 2 给出通常的谐振势和文中的谐振-库仑迭加势及其相应的介子波函数.

三、考虑层子自旋情形的进一步讨论

在上面的讨论中我们没有考虑层子的自旋,因而这些结果对介子只能具有定性的意义.为了使讨论更符合物理情况,应该进一步考虑层子的自旋,采用旋量粒子的 B-S 方程进行讨论.如文献[3,5]指出的,采用赝标耦合能解释介子能谱和 π, K 介子的轻子两体衰变的分支比.因此,我们采用赝标耦合下旋量粒子的 B-S 方程进行讨论.这种方程在引入(2.4)形式的位势后难于精确求解,讨论中将采取一些近似.文献[5]指出,采用赝标耦合下旋量粒子的 B-S 方程时,在非相对论近似下介子波函数满足的波动方程为

$$(8MM' + 4\mathbf{p}^2 + 4MV_1 - m^2)\Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.1)$$

M 与 m 分别为层子与介子质量, V_1 约为 M^{-1} 的量级, $M' = M + \frac{V_0}{2}$ 可看作层子在位阱中的有效质量.比较(3.1)和(2.3)式可以看出,在非相对论近似下,由赝标耦合的旋量粒子的 B-S 方程和由标量粒子的 B-S 方程导出的介子波函数的波动方程在数学上具有相似的结构,差别只在相应的常数系数略有不同.

将(2.4)类型的位势代入波动方程(3.1)式,进一步要求方程(3.1)的解具有谐振型的能谱与波函数,可以确定位势中各参量的关系,并有

$$V = V_0 + V_1, \quad V_1 = \frac{4\lambda^2}{M}(r - r_0)^2 + \frac{4\lambda}{M} \frac{(l+1)r_0}{r}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} M k. \quad (3.2)$$

由(3.2)式看出, V_1 表示第二项的小系数因子 $1/M$ 使除原点及其邻域外,应用方程(3.1)所要求的 $V_1 \sim M^{-1}$ 条件近似地满足,而在原点这种形式的位势仍使波函数保持有限.由于(3.2)式和(2.5)式中的位势参量都相接近,可以期望方程(3.1)和(2.3)的解将给出相近的结果.

和上节的讨论相似,由方程(3.1)与(3.2)可求得介子波函数,取波函数为

$$\Psi_{nlm}(\gamma, \theta, \varphi) = R_{nl}(\gamma) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

得出径向部分满足的方程为

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \left[\frac{1}{4} (m^2 - 8MM') - MV_1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0. \quad (3.3)$$

方程(3.3)的一般解的形式仍为

$$R_{nl}(r) = r^l e^{-\lambda(r-r_0)^2} \cdot v(r). \quad (3.4)$$

对于无径向激发的情形, $v(r)$ 仍为常量,求得相应的介子能谱为

$$m^2 = 8MM' + \omega \left(l + \frac{3}{2} \right), \quad \omega = 16\lambda = 8\sqrt{Mk}. \quad (3.5)$$

对存在径向激发的情形,由方程(3.3)可以求出 $v(r)$ 的具体形式.利用 0^- 介子能谱实验值由(3.5)定出 λ ,再由 0^- 介子衰变率实验值在(3.4)中定出 r_0 ,可进一步计算层子分布半径.

取介子能级间隔 $\Delta m^2 = \omega \sim 1\text{GeV}^2$, 求得的介子原点波函数值和层子分布半径随 r_0 的变化关系如图3所示.图4则给出了当 r_0 取一定数值时的谐振-库仑迭加势和介子波函数随 r 的变化关系(图中曲线相应于 $r_0 = 0.8$ 费米).由图3可以看出,当 r_0 由 0.6 费

米变至 0.8 费米时, 介子原点波函数平方值由 $6.48 \times 10^{-3} m_N^3$ 变至 $1.96 \times 10^{-3} m_N^3$, 而层子分布半径则由 0.55 费米变至 0.63 费米. 这些数值和实验定出的介子原点波函数与介子电磁半径大致接近. 比较图 3, 4 和图 1, 2 还可看出, 对旋量粒子的情形, 波函数的分布更为平坦, 而其峰值位置略向右移, 这是由于在旋量粒子情形下由介子能级间隔定出参量 λ 的值较标量粒子情形下定出参量 μ 的值为小, 因而在旋量粒子情形下由介子波函数定出参量 r_0 的值将较标量粒子情形下定出的 r_0 值偏大. 文献[2]指出 0^- 介子能级间隔实验值可以略大于 1 GeV^2 , 此时参量 λ 和 μ 的值将略为增大, 而 r_0 的值将略为减小, 但上述结论基本不变.

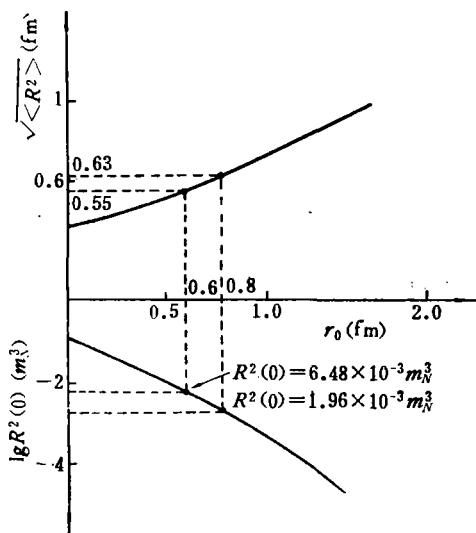


图 3 介子原点波函数平方值和层子分布均方根随位阱参量 r_0 的变化关系(旋量粒子的情形)

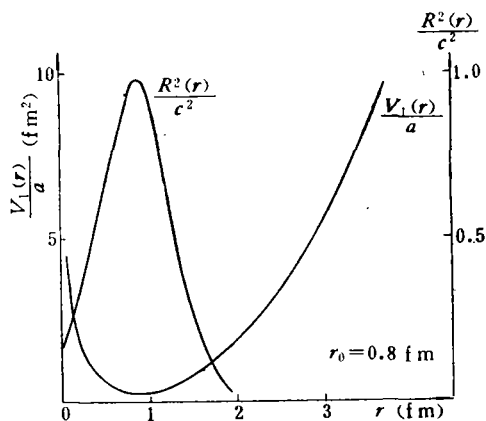


图 4 谐振-库仑迭加势及其相应的介子波函数(旋量粒子的情形)

综合上述讨论可以看出, 在层子模型基础上, 应用 B-S 方程和引入谐振-库仑迭加势来讨论介子结构, 经过适当的简化处理, 可以得到解析形式的能谱与波函数, 能初步解释介子的能谱、平均半径与原点波函数等特性. 当然, 上述讨论只是初步的探讨, 由于讨论中采用的一些近似, 这些结果还只具有定性的意义. 要作出确定的结论, 还需引入更恰当的位势, 并对旋量粒子的 B-S 方程作进一步的精确求解. 看来应用 B-S 方程讨论介子结构, 如何选择适当的位势旋量结构和位势空间分布, 仍然值得进一步探讨.

参 考 文 献

- [1] 北京大学学报(自然科学版), 12(1966), 209.
- [2] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, 25(1976), 316; 415.
- [3] 朱重远、安瑛, 中国科学, 4(1978), 387.
- [4] R. H. Dalitz, Methods and Problems of Theoretical Physics. (1970), 343.
- [5] 胡宁, 物理学报, 25(1976), 494.
- [6] 吴坚武、冼鼎昌、高仑、计数, 中国科学, 5(1977), 431.
- [7] 高仑, 高能物理与核物理, 3(1978), 211.
- [8] 吴詠时、何祚麻, 物理学报, 26(1977), 274.
- [9] 朱重远、安瑛, 科学通报, 23(1978), 154.

- [10] R. H. Dalitz, Proc. XIIIth Intern. Conf. of High Energy Physics (Univ. California Press, Berkeley 1967), p. 225.
- [11] J. Wills et al., *Phys. Rev.*, **D15** (1977) 3358.
- [12] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组, 原子能, **3**(1966), 137.

A POSSIBLE TYPE OF POTENTIAL FOR THE BOUND STATE OF MESONS

WU BANG-HUI LIU YONG-XIAN HU SHI-KE

(*Sichuan University*)

ABSTRACT

On the basis of the straton model, we have considered the bound state of mesons by using the Bethe-Salpeter equation. The result shows that by using the superposition of the deep square well, the harmonic and Coulomb-type potential, we can qualitatively explain the mass spectrum, the mean radius and the wave function at the origin for the bound state of mesons.